UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK: Matematika

Melisa Zulić

DIPLOMSKI RAD

Pojam logaritma s aspekta više matematike

Tuzla, juli 2013. godine

Mentor rada: Dr. sc. Mehmed Nurkanović, vanredni profesor
Rad ima: 34 stranice
Redni broj diplomskog rada: ___________________________

REZIME

Cilj ovog diplomskog rada jeste uvesti pojam logaritma koristeći se određenim integralom.

Rad ima četiri poglavlja.

U uvodu je navedena razlika između definisanja pojma logaritma koristeći se elementarnom matematikom i definisanja logaritma s aspekta više matematike.

U drugom poglavlju uvodimo pojam prirodnog logaritma preko izračunavanja površine lika u ravni pomoću određenog integrala. Zatim dajemo dobro poznate osobine logaritma i dokazujemo ih koristeći takvu definiciju.

U trećem poglavlju upoznajemo se sa postupkom računanja logaritma, navodimo formule za približno računanje logaritma i dajemo procjene greški. Ovdje također navodimo jednu primjenu logaritma u teoriji brojeva.

U četvrtom poglavlju pažnja je usmjerena na graf funkcije $f(x) = \ln x$ te je objašnjen značaj broja e.

SUMMARY

The aim of this thesis is to introduce the concept of natural logarithms using definite integral.

The paper consists four chapters.

In the introduction is given the difference between definition of the logarithm using elementary mathematics and defining logarithm using tools of higher mathematics.

The second chapter introduces the concept of the natural logarithm through computation of areas using the definite integral. Here we mention some well-known properties of logarithms and prove them using our definition.

In the chapter number three we present the method of computation natural logarithm by giving some approximation formulas an we estimate the errors we commit using these formulas. This chapter also consist one application of natural logarithm in theory of numbers.

In the chapter four, the focus is on the function $f(x) = \ln x$ and the number e.

Sadržaj

1 Uvod

Osnovni postupci diferencijalnog i integralnog računa daju znatno adekvatniju teoriju logaritma i eksponencijalne funkcije nego što to čine "elementarni postupci" koji se koriste u srednjoškolskoj nastavi. Tu se obično počinje sa cijelim stepenima a^n pozitivnog broja a. Tada se definiše $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, čime se dobija vrijednost izraza a^r za svako racionalno $r = \frac{m}{n}$. Vrijednost izraza a^x za svako iracionalno x se definiše tako da a^x bude neprekidna funkcija po x. Na kraju, logaritam broja y za osnovu a, $x = \log_a y$, definiše se kao inverzna funkcija za $y = a^x$, odnosno vrijedi:

$$x = \log_a y \Longleftrightarrow y = a^x.$$

Navedimo i dokažimo neke od osobina logaritma:

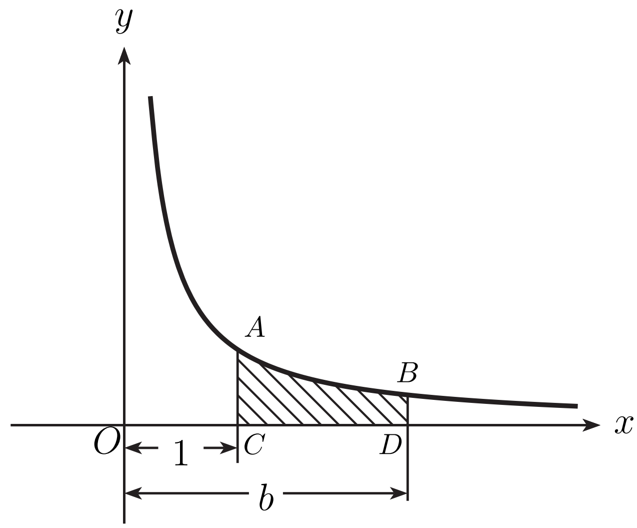
- $\log_a 1 = 0 \qquad i \qquad \log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
  Stavimo da je $\alpha = \log_a x$ i $\beta = \log_a y$. To znači da je $a^\alpha = x$ i $a^\beta = y$, pa vrijedi:
  $$a^{\log_a(xy)} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$
  $$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$
  Ovo slijedi iz:
  $$a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = a^{\alpha \cdot \log_a x} \Longleftrightarrow \log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x.$$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log ay$
  Ovo vrijedi zbog:
  $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log ay.$$

Pod *prirodnim logaritmom* broja x podrazumijevamo logaritam broja x kada mu je baza broj e, a označavamo ga sa $\ln x$. U sljedećoj teoriji idemo obrnutim redoslijedom, prvo uvodimo pojam prirodnog logaritma, na osnovu diferencijalnog i integralnog računa, zatim dokazujemo gore navedena pravila koristeći ovu definiciju i na kraju se osvrćemo na eksponencijalnu funkciju.

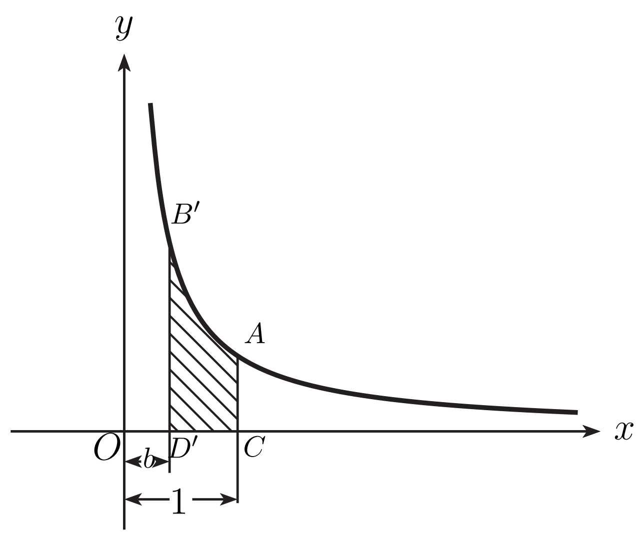
2 Pojam i osobine prirodnog logaritma

2.1 Uvođenje prirodnog logaritma s aspekta više matematike

Posmatrajmo $\int_1^b \frac{1}{x}dx$. Ako je $b > 1$, onda ovaj integral predstavlja površinu krivolinijskog trapeza $ACDB$ (Slika 1). Ako je $b = 1$, onda je ovaj integral jednak nuli.



Slika 1



Slika 2

Na kraju, za slučaj kada je $0 < b < 1$, tada je donja granica integrala manja od gornje, pa dobijamo

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = -\int_b^1 \frac{1}{x}dx.$$

Ovo znači da se u ovom slučaju integral razlikuje samo u predznaku od površine krivolinijskog trapeza $B'D'CA$ (slika 2). U bilo kojem slučaju, za proizvoljan pozitivan broj b integral $\int_1^b \frac{1}{x}dx$ je dobro definisan, i to pozitivan za $b > 1$, jednak nuli kad je $b = 1$ i negativan za $b < 1$. Jasno je da je $\int_1^b \frac{1}{x}dx$ funkcija od b. Ova funkcija je vrlo važna u matematici; nazivamo je *prirodni logaritam* broja b i označava se sa "$\ln b$". Ovdje su "l" i "n" uzeta kao prva slova latinskog naziva za prirodni logaritam (logarithmus naturalis). Prema tome,

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln b.$$

2.2 Osobine prirodnog logaritma

Navedimo sada neka pravila prirodnog logaritma, prije svega

$$\ln b > 0, za\ b > 1;$$

$$\ln 1 = 0;$$

$$\ln b < 0, za\ 0 < b < 1.$$

Dokažimo sada jedan od osnovnih pravila za logaritme:

Teorem 1 *Logaritam proizvoda dva broja jednak je sumi njihovih logaritama, odnosno:*

$$\ln(bc) = \ln b + \ln c$$

Dokaz: Dokažimo da vrijedi:

$$\int_1^{bc} \frac{1}{x}dx = \int_1^b \frac{1}{x}dx + \int_1^c \frac{1}{x}dx$$

Zaista, znamo da vrijedi:

$$\int_1^c \frac{1}{x}dx = \int_q^{qc} \frac{1}{x}dx$$

za bilo koje $q > 0$. Neka je $q = b$; onda imamo da je:

$$\int_1^c \frac{1}{x}dx = \int_b^{bc} \frac{1}{x}dx.$$

Stoga je

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx + \int_1^c \frac{1}{x}dx = \int_1^b \frac{1}{x}dx + \int_b^{bc} \frac{1}{x}dx;$$

ali desna strana gornje jednakosti jednaka je $\int_1^{bc} \frac{1}{x}dx$. Pa vrijedi:

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx + \int_1^c \frac{1}{x}dx = \int_1^{bc} \frac{1}{x}dx,$$

što je trebalo i dokazati.♣

Napomena 1 *Ovaj teorem možemo dokazati i na sljedeći način. Neka je* $F(x) = \ln x$. *Tada je* $F'(x) = \frac{1}{x}$. *Posmatrajmo funkciju* $k(x) = \ln(ax)$. *Uvedimo smjenu* $ax = w$. *Tada je* $k(x) = \ln w = F(w)$. *Neka je* $f(x) = ax$. *Imamo da vrijedi*

$$k'(x) = [F(f(x))]' = F'_w \cdot f'_x = \frac{1}{w} \cdot a = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x},$$

jer je $f'(x) = a$ *i* $F'(w) = \frac{1}{w}$. *Dobili smo da je* $k'(x) = F'(x)$, *a odavde na osnovu jednog od fundamentalnih teorema diferencijalnog i integralnog računa o primitivnoj funkciji imamo da vrijedi:*

$$k(x) = F(x) + C.$$

Uzimajući da je $x = 1$ *dobijemo*

$$k(1) = F(1) + C$$

$$k(1) = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Kako vrijedi $F(1) = \ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{x}dx = 0$, *imamo da je* $\ln a = 0 + C$, *odnosno* $C = \ln a$. *Dobili smo da vrijedi:*

$$k(x) = F(x) + \ln a,$$

odnosno, vrijedi

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln a,$$

za svako $x > 0$. *Uzmimo da je* $x = b$, *pa imamo*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

što je trebalo i dokazati.

Iz ovog teorema izvodimo i sljedeća pravila. Neka je $b > 0$; tada prema dokazanom imamo:

$$\ln 1 = \ln\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln\frac{1}{b}$$

a kako je $\ln 1 = 0$; to vrijedi:

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b.$$

Jasno je da smo ovo pravilo mogli dokazati i koristeći definiciju logaritma preko integrala, jer vrijedi

$$\ln\frac{1}{b} = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{1}{x}dx = \int_{1\cdot b}^{\frac{1}{b}\cdot b} \frac{1}{x}dx = \int_b^1 \frac{1}{x}dx = -\int_1^b \frac{1}{x}dx = -\ln b$$

Dalje, ako su $b > 0$ i $c > 0$, tada

$$\ln\frac{b}{c} = \ln\left(b \cdot \frac{1}{c}\right) = \ln b + \ln\frac{1}{c}$$

odnosno:

$$\ln\frac{b}{c} = \ln b - \ln c.$$

Drugim riječima: *Logaritam količnika jednak je logaritmu djeljenika umanjenog za logaritam djelioca.*

Dokažimo i ovo pravilo koristeći definiciju logaritma preko integrala. Pokažimo da vrijedi:

$$\int_1^{\frac{b}{c}} \frac{1}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx - \int_1^c \frac{1}{x} dx.$$

Znamo da je:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \int_{1 \cdot \frac{1}{c}}^{b \cdot \frac{1}{c}} \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{c}}^{\frac{b}{c}} \frac{1}{x} dx$$

i

$$\int_1^c \frac{1}{x} dx = \int_{1 \cdot \frac{1}{c}}^{c \cdot \frac{1}{c}} \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{c}}^{1} \frac{1}{x} dx.$$

Dobili smo da je

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx - \int_1^c \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{c}}^{\frac{b}{c}} \frac{1}{x} dx - \int_{\frac{1}{c}}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{c}}^{\frac{b}{c}} \frac{1}{x} dx + \int_{1}^{\frac{1}{c}} \frac{1}{x} dx = \int_1^{\frac{b}{c}} \frac{1}{x} dx,$$

što je trebalo dokazati.

Dokazali smo osnovno pravilo za logaritam proizvoda dva faktora, ali jasno je da ovo pravilo možemo primijeniti na proizvod proizvoljnog broja faktora.

Primijenimo ovu činjenicu na b^k, gdje je eksponent k pozitivan cijeli broj. Imamo da je

$$\ln b^k = \ln(\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{\text{k-puta}}) = \underbrace{\ln b + \ln b + \ldots + \ln b}_{\text{k-puta}} = k \cdot \ln b.$$

Neka je sada $c = \sqrt[k]{b}$; odnosno $c^k = b$ stoga imamo da je

$$\ln b = \ln c^k = k \cdot \ln c = k \cdot \ln \sqrt[k]{b}$$

odakle je

$$\ln \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \cdot \ln b.$$

Ako je $c = b^{\frac{p}{q}}$, gdje su p i q pozitivni cijeli brojevi, onda na bazi prethodno dobijenih činjenica, imamo

$$\ln b^{\frac{p}{q}} = \ln \sqrt[q]{b^p} = \frac{1}{q} \cdot \ln b^p = \frac{1}{q} \cdot p \cdot \ln b = \frac{p}{q} \cdot \ln b.$$

To znači da jednakost

$$\ln b^k = k \cdot \ln b,$$

osim što vrijedi kad je k pozitivan cijeli broj, vrijedi i kad je k razlomak oblika $\frac{p}{q}$, gdje su p i q pozitivni cijeli brojevi.
Jasno je da data jednakost vrijedi i za slučaj kad je k negativan (cijeli broj ili razlomak). Zaista, ako je $k < 0$, tada je $-k > 0$, pa imamo

$$\ln b^k = \ln \frac{1}{b^{-k}} = -\ln b^{-k} = -(-k \cdot \ln b) = k \cdot \ln b$$

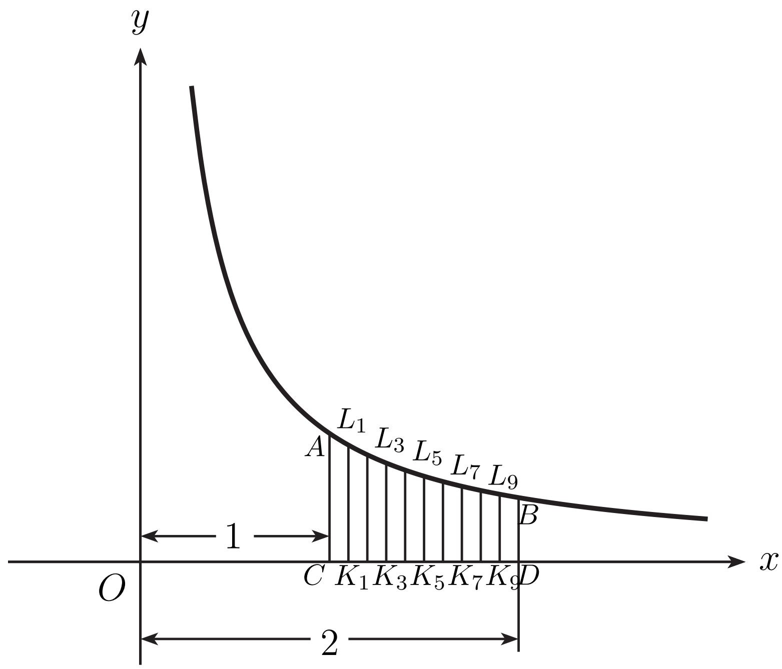
Na kraju, ova jednakost vrijedi i za $k = 0$:

$$\ln b^0 = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln b.$$

Prema tome, pomenuta jednakost važi za bilo koji racionalan broj k. Također važi i u slučaju kada je k iracionalan (što ćemo prihvatiti bez dokazivanja).

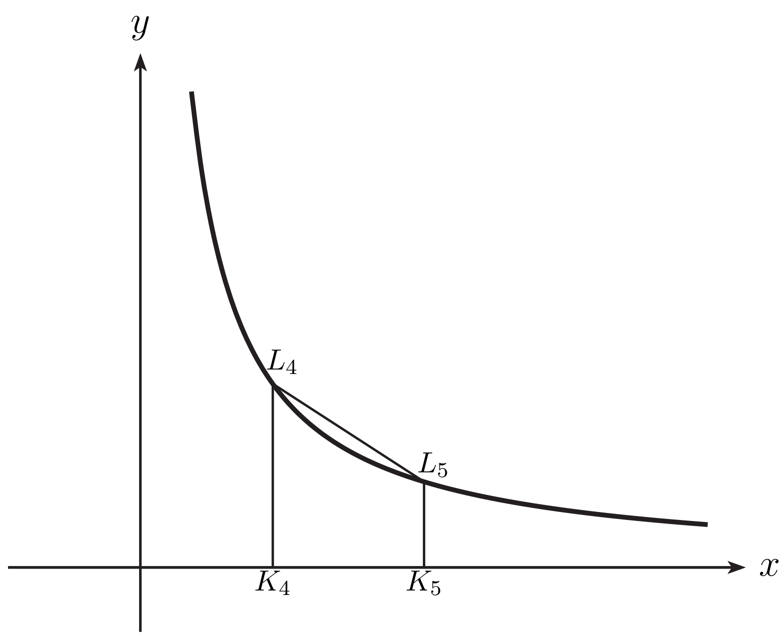
3 Upoznavanje sa računanjem logaritma

Posvetimo se sada računanju logaritma. Izračunajmo vrijednost od $\ln 2$, to jest površinu zakrivljenog trapeza $ACDB$ prikazanog na Slici 3. Podijelimo segment CD na deset jednakih dijelova i povucimo odgovarajuće odsječke: $K_1L_1, K_2L_2, ..., K_9L_9$. Kako bismo pronašli najbolju moguću aproksimaciju od $\ln 2$, zamijenićemo svaki od deset novonastalih zakrivljenih trapeza, običnim trapezom. Da bismo to uradili povucimo duž od tačke A do L_1, zatim duž od L_1 do $L_2, ...,$ i na kraju od L_9 do B.



Slika 3

Na pomenutoj slici teško je uočiti razliku između običnog i zakrivljenog trapeza, pa u tu svrhu na Slici 4 prikazat ćemo tu razliku na jednom od trapeza.



Slika 4

Površina svakog trapeza jednaka je polovini proizvoda njegove visine i zbira njegovih osnovica. U našem slučaju sve visine su iste:

$$\overline{CK_1} = \overline{K_1K_2} = \ldots = \overline{K_9D} = 0.1.$$

Stoga će površine trapeza biti:

$$\frac{\overline{AC} + \overline{K_1L_1}}{2} \cdot 0.1; \frac{\overline{K_1L_1} + \overline{K_2L_2}}{2} \cdot 0.1; \ldots; \frac{\overline{K_9L_9} + \overline{BD}}{2} \cdot 0.1.$$

Suma svih ovih površina iznosi:

$$0.1 \cdot \frac{(\overline{AC} + \overline{K_1L_1}) + (\overline{K_1L_1} + \overline{K_2L_2}) + \ldots + (\overline{K_9L_9} + \overline{BD})}{2}$$

ili

$$0.1 \cdot (0.5\overline{AC} + \overline{K_1L_1} + \overline{K_2L_2} + \ldots + \overline{K_9L_9} + 0.5\overline{BD}).$$

Ostalo nam je još da primijetimo da su dužine baza trapeza jednake ordinatama tačaka na grafu funkcije $y = \frac{1}{x}$, gdje su apscise tih tačaka date sljedećim redoslijedom:

$$1,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.6,\ 1.7,\ 1.8,\ 1.9,\ 2.$$

Pa imamo:

$$\overline{AC} = \frac{1}{1} = 1.000, \qquad \overline{K_1L_1} = \frac{1}{1.1} = 0.909,$$

$$\overline{K_2L_2} = \frac{1}{1.2} = 0.833, \qquad \overline{K_3L_3} = \frac{1}{1.3} = 0.769,$$

$$\overline{K_4L_4} = \frac{1}{1.4} = 0.714, \qquad \overline{K_5L_5} = \frac{1}{1.5} = 0.667,$$

$$\overline{K_6L_6} = \frac{1}{1.6} = 0.625, \qquad \overline{K_7L_7} = \frac{1}{1.7} = 0.588,$$

$$\overline{K_8L_8} = \frac{1}{1.8} = 0.556, \qquad \overline{K_9L_9} = \frac{1}{1.9} = 0.526,$$

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} = 0.500.$$

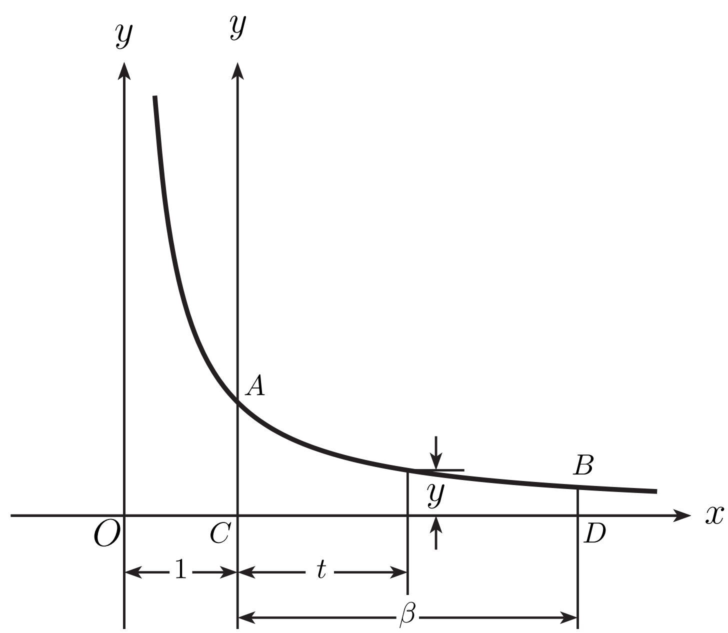
Stoga je suma površina trapeza jednaka

$$0.1(0.500 + 0.909 + 0.833 + 0.769 + 0.714 + 0.667$$
$$+0.625 + 0.588 + 0.556 + 0.526 + 0.250) = 0.6937.$$

Ako se vratimo na Sliku 3, jasno je da sabiranjem površina ovih trapeza dobijemo broj nešto veći od površine početnog zakrivljenog trapeza. Ovo znači da smo našli aproksimaciju vrijednosti $\ln 2$ sa odstupanjem, odnosno $\ln 2$ je nešto manje od 0.6937.
U nastavku ćemo pokazati druge metode računanja logaritma, koje će nam omogućiti da izračunamo $\ln 2$ sa većom preciznošću.

3.1 Formule za približno računanje logaritma

Ako krenemo mjeriti apscise, ne od kordinatnog početka već od tačke C (Slika 5) i nove apscise označimo sa t, tada će veza između starih i novih apscisa jedne te iste tačke biti data sljedećom relacijom: $x = 1 + t$.



Slika 5

Ova relacija vrijedi za bilo koju tačku pod pretpostavkom da je $t > 0$ kad je $x > 1$ i $t \leq 0$ kad je $x \leq 1$. Zamjenom x sa $1+t$, funkcija $y = \frac{1}{x}$ postaje $y = \frac{1}{1+t}$, ali njen grafik ostaje isti. Promjena koja se javlja pri uvođenju t sastoji se samo u tome što sada imamo novi koordinatni početak (tačka C umjesto O), samim tim i novu $y-$osu Cy (koja je paralelna sa Oy) dok kriva ostaje nepromjenjena. Površina lika $ACDB$ također ostaje nepromjenjena.

U slučaju kada je x bila apscisa ova površina je bila predstavljena integralom

$$\int_1^{1+\beta} \frac{1}{x} dx = \ln(1+\beta),$$

gdje je $\beta = \overline{CD}$. Sada, kad posmatramo t kao apscisu ista ta površina je data integralom $\int_0^\beta \frac{1}{1+t} dt$. Usporedbom ova dva integrala vidimo da je:

$$\ln(1+\beta) = \int_0^\beta \frac{1}{1+t}.$$

Pozovimo se na sljedeći identitet:

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots - t^{2n-1} = \frac{1-t^{2n}}{1+t}$$

iz kog slijedi:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots - t^{2n-1} + \frac{t^{2n}}{1+t}.$$

Pa imamo da je:

$$\ln(1+\beta) = \int_0^\beta \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots - t^{2n-1} + \frac{t^{2n}}{1+t}\right) dt.$$

Budući da je integral zbira (razlike) jednak zbiru (razlici) integrala, imamo da je

$$\ln(1+\beta) = \int_0^\beta 1dt - \int_0^\beta tdt + \int_0^\beta t^2dt - \int_0^\beta t^3dt$$

$$+\ldots-\int_0^\beta t^{2n-1}dt+\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt.$$

Svi integrali na desnoj strani gornje jednakosti lahko se računaju pa imamo:

$$\ln(1+\beta)=\left(\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}\right)+\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt.$$

Izraz u zagradi se lako izračuna ukoliko nam je poznato β i ukoliko je pozitivan cijeli broj n određen (n možemo uzeti proizvoljno). Jedino je integral $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt$ teže izračunati. Međutim, za $-1<\beta\leq 1$ ovaj integral možemo učiniti proizvoljno malim, birajući dovoljno veliko n. U tom slučaju možemo u potpunosti zanemariti posljednji integral u računanju $\ln(1+\beta)$, sa zanemarivom greškom pri dobijanju rezultata.

Stoga dobijamo sljedeću aproksimaciju:

$$\ln(1+\beta)\approx\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}. \tag{1}$$

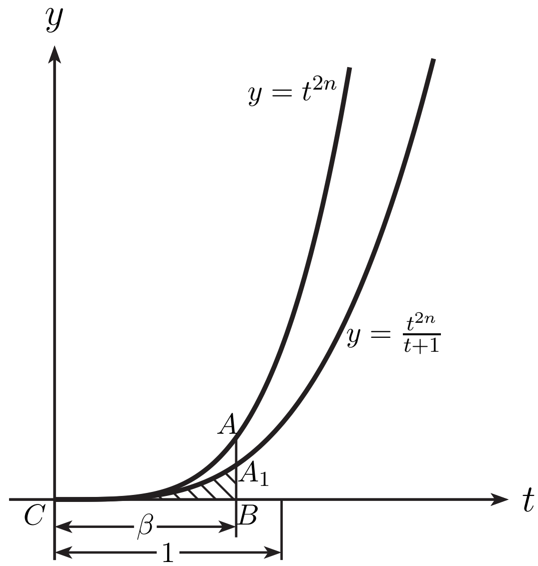
3.2 Procjena greške za $0<\beta\leq 1$

Da bismo procijenili grešku koju učinimo koristeći aproksimaciju datu sa (1) potrebno je razmatrati odbačeni integral $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt$. Na samom početku pretpostavimo da je $0<\beta\leq 1$. Zatim, unutar granica integracije t ostaje pozitivno, a samim tim vrijedi i sljedeće:

$$0<\frac{t^{2n}}{1+t}<t^{2n}.$$

Ovo znači da grafik funkcije $y=\frac{t^{2n}}{1+t}$ leži ispod grafika funkcije $y=t^{2n}$ što je prikazano na Sliici 6. Imamo da je površina lika CBA_1 je manja nego površina lika CBA, odnosno vrijedi:

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt<\int_0^\beta t^{2n}dt=\frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}.$$



Slika 6

Tako da je formula (1) dobra za $0 < \beta \leq 1$ s greškom manjom od

$$\frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}.$$

Budući da je $0 < \beta \leq 1$ možemo ovu grešku učiniti proizvoljno malom uzimajući za n dovoljno velik prirodan broj.

Primjer 1 *Neka je $\beta = 1$, primjenjujući gornju formulu dobijamo:*

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

pri čemu je greška manja od $\frac{1}{2n+1}$. Ukoliko želimo ovom metodom izračunati $\ln 2$, sa tačnošću od 0.001, onda je potrebno da bude $\frac{1}{2n+1} < 0.001$, odnosno $2n+1 > 1000$. Ovaj uslov je zadovoljen uzimajući da je $2n = 1000$, ali ovo znači da će suma na desnoj strani jednakosti sadržati 1000 sabiraka, što je naravno previše.

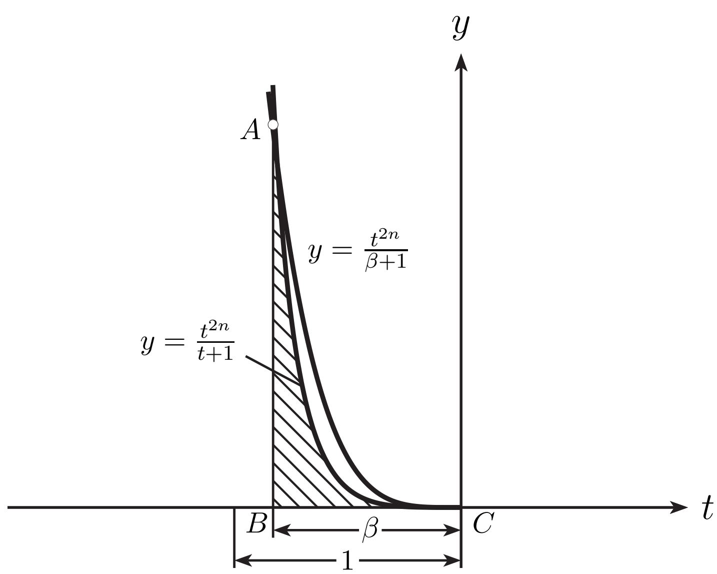
3.3 Procjena greške za $-1 < \beta \leq 0$

Vratimo se ponovno na integral $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt$, ali sada razmatramo slučaj kada je $-1 < \beta \leq 0$. Poznato nam je da vrijedi:

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}dt = -\int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+t}dt.$$

Integral $\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t}dt$ jednak je površini figure ABC osjenčenoj na Slici 7, gdje je AC luk na krivoj $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$. Ova figura leži iznad ose Ct, jer je $y = \frac{t^{2n}}{1+t} > 0$ za $t > -1$. Samim tim površina pomenutog lika ABC, odnosno integral $\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t}dt$ je pozitivan broj. Razlikuje se od integrala $\int_{0}^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t}dt$ samo u predznaku a i jednak je svojoj apsolutnoj vrijednosti:

$$\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t}dt = \left| \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t}dt \right|.$$



Slika 7

Primijetimo, također, da za $t > \beta$ i $\beta > -1$ vrijedi sljedeća nejednakost:

$$1 + t > 1 + \beta > 0;$$

odnosno

$$\frac{1}{1+t} < \frac{1}{1+\beta} \qquad i \qquad \frac{t^{2n}}{1+t} < \frac{t^{2n}}{1+\beta}.$$

Ovo znači da grafik funkcije $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ leži ispod grafika funkcije $y = \frac{t^{2n}}{1+\beta}$ na intervalu $\beta < t < 0$. Odnosno površina lika ABC, gdje je AC luk na krivoj $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$, je manja od površine lika ABC, kada je AC luk na krivoj $y = \frac{t^{2n}}{1+\beta}$, tj.

$$\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t} dt < \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+\beta} dt.$$

Desnu stranu gornje nejednakosti je lako izračunati:

$$\int_{\beta}^{0} \frac{1}{1+\beta} t^{2n} dt = \frac{1}{1+\beta} \int_{\beta}^{0} t^{2n} dt = \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{0^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2n+1}$$
$$= -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}.$$

Ovo je pozitivan broj jer je $\beta^{2n+1} < 0$, $1+\beta > 0$ i $2n+1 > 0$. Tako dobijamo:

$$\left| \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t} dt \right| = \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}}{1+t} dt < -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}.$$

Samim tim, izostavljajući izraz $\int_{0}^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t} dt$ u relaciji za računanje $\ln(1+\beta)$, načinimo grešku čija je apsolutna vrijednost manja od izraza $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$ pri čemu je jasno da je $-1 < \beta \leq 0$. Ovaj izraz teži ka nuli kada n postaje proizvoljno velik broj. To znači da sproksimacija:

$$\ln(1+\beta) \approx \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \ldots - \frac{\beta^{2n}}{2n}$$

je dobra za $-1 < \beta \leq 0$ sa greškom koja nije veća od:

$$-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}.$$

Primjer 2 *Uzmimo da* $\beta = -\frac{1}{2}$. *Tada će greška date aproksimacije biti manja od:*

$$\frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2}(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n}}.$$

Ako uzmemo da je $n = 4$*, onda će posljednji razlomak biti jednak:*

$$\frac{1}{9 \cdot 2^8} = \frac{1}{9 \cdot 256} = \frac{1}{2304} < 0.0005.$$

Samim tim, s ovim stepenom preciznosti možemo pisati da je:

$$\ln \frac{1}{2} \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} - \ldots - \frac{1}{2^8 \cdot 8}.$$

Nakon što izvršimo sljedeća računanja:

$$\frac{1}{2} = 0.5000; \quad \frac{1}{2^2 \cdot 2} = 0.1250; \quad \frac{1}{2^3 \cdot 3} = 0.0417; \quad \frac{1}{2^4 \cdot 4} = 0.0156;$$
$$\frac{1}{2^5 \cdot 5} = 0.0062; \quad \frac{1}{2^6 \cdot 6} = 0.0026; \quad \frac{1}{2^7 \cdot 7} = 0.0011; \quad \frac{1}{2^8 \cdot 8} = 0.0005;$$

dobijemo da je

$$\ln \frac{1}{2} \approx -0.6927 \approx -0.693$$

sa tačnošću od 0.001 *(uzimajući u obzir činjenicu da formula sama po sebi može sadržavati grešku do* 0.0005 *i da, pored toga, pretvaranjem svakog od osam razlomaka u decimalan broj, može se načiniti greška do 0.00005.)*
Budući da je $\ln 2 = -\ln \frac{1}{2}$ *slijedi da je:*

$$\ln 2 \approx 0.693$$

sa tačnošću do na 0.001*. Sada smo dobili rezultat za* $\ln 2$ *sa znatno manje računanja nego što je to bilo potrebno u prethodnoj sekciji.*

Primjer 3 *Ako u aproksimaciji za* $\ln(1+\beta)$ *uzmemo da je* $\beta = -\frac{2}{3}$*, tada analognim postupkom kao u prethodnom primjeru možemo izračunati* $\ln \frac{1}{3}$*, a samim tim i* $\ln 3$*. Odnosno u opštem slučaju, ukoliko uzmemo da je* $\beta = -\frac{k}{k+1}$*, pa pošto je* $\ln\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \ln \frac{1}{k+1}$*, imamo i* $\ln(k+1) = -\ln \frac{1}{k+1}$*. Međutim, ispostavlja se da je ovaj način računanja logaritma preobiman. Tako, na primjer, ukoliko želimo izračunati* $\ln 11$*, onda uzimajući da je*

$k+1=11$, *to jest* $k=10$, *tada nam mora biti* $\beta=-\frac{10}{11}$. *Tada će i greška u formuli za približno računanje biti manja nego:*

$$\frac{\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}}{(2n+1)\left(1-\frac{10}{11}\right)}=\frac{11}{2n+1}\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}.$$

Imamo da je:

$$\frac{10}{11}\approx 0.91,\qquad \left(\frac{10}{11}\right)^{2}\approx 0.83,\qquad \left(\frac{10}{11}\right)^{4}\approx 0.69,\qquad \left(\frac{10}{11}\right)^{8}\approx 0.48,$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{16}\approx 0.29,\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{32}\approx 0.08,\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{64}\approx 0.006,\quad \left(\frac{10}{11}\right)^{65}\approx 0.005.$$

Stoga, uzimajući da je $2n+1=65$, *možemo garantovati da će greška za približno računanje* $\ln\frac{1}{11}$ *biti manja od* $\frac{11}{65}\cdot 0.005\approx 0.001$. *Očigledno je da će proces računanja* $\ln\frac{1}{11}$ *ovim metodom biti dug, jer je potrebno izračunati sumu od* 64 *sabirka:*

$$-\frac{10}{11}-\frac{1}{2}\left(\frac{10}{11}\right)^{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{10}{11}\right)^{3}-\ldots--\frac{1}{64}\left(\frac{10}{11}\right)^{64}.$$

3.4 Efikasna formula za računanje prirodnog logaritma

Zaključak do kojeg smo došli u pogledu formule za približno računanje $\ln(1+\beta)$ navodi nas na to da potražimo drugu formulu koja zahtijeva manje operacija. Ustvari, takva formula uistinu i postoji. Da bismo došli do nje, uzmimo proizvoljan pozitivan cijeli broj k i pretpostavimo da je $\beta=\frac{1}{2k+1}$. Onda posmatrajmo:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\approx\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)^2}+\frac{1}{3(2k+1)^3}-\frac{1}{4(2k+1)^4}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}-\frac{1}{2n(2k+1)^{2n}}.$$

Koristeći procjenu greške koju smo ranije izveli u sekciji 3.2 vidimo da je greška u gornjoj aproksimaciji manja od $\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$.

Sada uzmimo da je β negativan i neka je jednak $-\frac{1}{2k+1}$ dobijamo sljedeću aproksimaciju:

$$\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) \approx -\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)^2}-\frac{1}{3(2k+1)^3}-\frac{1}{4(2k+1)^4}-\dots$$
$$-\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}-\frac{1}{2n(2k+1)^{2n}}.$$

koja nam računa $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$ greškom manjom od:

$$\frac{\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}}{(2n+1)\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)} = \frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Napomenimo da smo ovdje koristili formulu izvedenu u sekciji 3.3 koja služi za procjenu greške pri računanju $\ln(1+\beta)$, gdje nam je $\beta = -\frac{1}{2k+1}$.

Od prve dobijene aproksimacije oduzmemo drugu i imamo:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) \approx \frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+$$
$$+\frac{5}{5(2k+1)^5}+\dots+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}.$$

Greška u ovoj aproksimaciji ne prelazi iznos zbira svih mogućih grešaka koje se javljaju pri računanju $\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$ i $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$ uzetu po apsolutnoj vrijednosti, odnosno manja je od:

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}+\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2k+1)^{2n+1}} =$$
$$=\frac{4k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2k+1)^{2n+1}} <$$
$$< \frac{4k+2}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2k+1)^{2n+1}} = \frac{1}{k(2n+1)(2k+1)^{2n}}.$$

Budući da je razlika logaritama jednaka logaritmu količnika, dobijemo sljedeće:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2k+1}}{1-\frac{1}{2k+1}}$$

$$=\ln\frac{2k+2}{2k}=\ln\frac{k+1}{k}=\ln(k+1)-\ln k$$

$$\ln(k+1)-\ln k\approx\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{5}{5(2k+1)^5}+\ldots+ + \frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}; \quad (2)$$

sa greškom manjom od $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n}}$.

Ovo je formula koju smo tražili. Omogućava nam da izračunamo $\ln(k+1)$ ukoliko nam je poznato $\ln k$. Koristeći činjenicu da je $\ln 1=0$ možemo sada izračunati $\ln 2$, uzimajući da je $k=1$, pri čemu je greška manja od

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n}}.$$

Uzmimo da je $n=5$. Tada možemo tvrditi da će greška ovim putem biti manja od $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{10}}=\frac{1}{11\cdot 59049}<0.000002$, pa je:

$$\ln 2=\ln 2-\ln 1\approx\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\frac{2}{7\cdot 3^7}+\frac{2}{9\cdot 3^9}$$

sa greškom manjom od 0.000002. Pretvaranjem svakog od pet razlomaka u decimalne brojeve zaokružene na šest decima i sabirajući ih, dobijemo vijednost broja $\ln 2$ sa tačnošću od $0.000002+5\cdot 0.0000005<0.000005$:

$$\ln 2\approx 0.693146\approx 0.69315.$$

Uzmimo sada da je $k=2$ i $n=3$ u formuli (2), dobijemo:

$$\ln 3-\ln 2\approx\frac{2}{5}+\frac{2}{3\cdot 5^3}+\frac{2}{5\cdot 5^5}\approx 0.40546$$

sa greškom manjom od $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^6} = \frac{1}{14 \cdot 15623} < 0.000005$. To znači da je:

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 0.40546 \approx 1.09861$$

Dalje, primijećujemo da je:

$$\ln 4 = 2 \cdot \ln 2 \approx 1.38630.$$

Stavljajući sada da je $k = 4$ i $n = 3$ u formulu (2), dobijemo:

$$\ln 5 - \ln 4 \approx \frac{2}{9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} \approx 0.223144 \approx 0.22314$$

sa greškom manjom od $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^6} = \frac{1}{25 \cdot 531441} < 0.0000001$ odnosno

$$\ln 5 \approx \ln 4 + 0.22314 \approx 1.60944.$$

Sada možemo izračunati i $\ln 10$:

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 \approx 2.30259.$$

Na kraju stavljajući da je $k = 10$ i $n = 2$ u pomenutoj formuli dobijemo:

$$\ln 11 - \ln 10 \approx \frac{2}{21} + \frac{2}{3 \cdot 21^3} \approx 0.09531$$

sa greškom manjom od $\frac{1}{10}\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{21^4} < 0.0000001$, pa je:

$$\ln 11 \approx \ln 10 + 0.09531 \approx 2.39790.$$

Ovi primjeri pokazuju kako možemo doći do tablice prirodnog logaritma. Na gore pokazan način možemo dobiti tablicu logaritama za cijele brojeve od 1 do 100, gdje je svaki unos određen sa tačnošću od 0.0005.

3.5 Računanje uz pomoć tablice

Vidjeli smo da se logaritam proizvoda računa preko sabiranja, logaritam količnika računamo preko oduzimanja, zatim logaritam stepena računamo preko množenja eksponentom i logaritam korijena računamo preko dijeljenja sa stepenom korijena. Samim tim, ukoliko imamo tablicu logaritma, možemo uz pomoć nje izvršiti zamjenu množenja i sabiranja, dijeljenja i oduzimanja, zatim stepenovanja i množenja, i korjenovanja i dijeljenja, odnosno svaku radnju zamjenjujemo jednostavnijom. Pokažimo to na jednostavniom primjeru:

n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0.000	21	3.045	41	3.714	61	4.111	81	4.394
2	0.693	22	3.091	42	3.738	62	4.127	82	4.407
3	1.099	23	3.135	43	3.761	63	4.143	83	4.419
4	1.386	24	3.178	44	3.784	64	4.159	84	4.431
5	1.609	25	3.219	45	3.807	65	4.174	85	4.443
6	1.792	26	3.258	46	3.829	66	4.190	86	4.454
7	1.946	27	3.296	47	3.850	67	4.205	87	4.466
8	2.079	28	3.332	48	3.871	68	4.220	88	4.477
9	2.197	29	3.367	49	3.892	69	4.234	89	4.489
10	2.303	30	3.401	50	3.912	70	4.248	90	4.500
11	2.398	31	3.434	51	3.932	71	4.263	91	4.511
12	2.485	32	3.466	52	3.951	72	4.277	92	4.522
13	2.565	33	3.497	53	3.970	73	4.290	93	4.533
14	2.639	34	3.526	54	3.989	74	4.304	94	4.543
15	2.708	35	3.555	55	4.007	75	4.317	95	4.554
16	2.773	36	3.584	56	4.025	76	4.331	96	4.564
17	2.833	37	3.611	57	4.043	77	4.344	97	4.575
18	2.890	38	3.638	58	4.060	78	4.357	98	4.585
19	2.944	39	3.664	59	4.078	79	4.369	99	4.595
20	2.996	40	3.689	60	4.094	80	4.382	100	4.605

Tablica prirodnog logaritma

$(1-100)$

Primjer 4 *Pretpostavimo da trebamo izračunati koliko je* $\sqrt[5]{2}$. *Koristiti ćemo vrijednost iz tablice* $\ln 2 \approx 0.693$. *Sada djeljenjem sa* 5 *dobijemo da je* $\ln \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5} \cdot \ln 2 \approx 0.139$. *Ostaje nam još da nadjemo* $\sqrt[5]{2}$. *Ali gornja tablica nije dovoljno dobra za to. Međutim, sadrži broj* 0.000 *koji odgovara logaritmu broja* 1 *i broj* 0.693 *koji odgovara logaritmu broja* 2. *Prvi od ovih brojeva je previše mali dok je drugi prevelik. Za sada* *možemo zaključiti samo da je* $1 < \sqrt[5]{2} < 2$. *Ali možemo primijetiti da je* $\ln 10 \cdot \sqrt[5]{2} = \ln 10 + \ln \sqrt[5]{2} \approx 2.30. + 0.139 \approx 2.442$. *U tablici najveći broj manji od* 2.442 *je broj* 2.398 ($\approx \ln 11$) *dok je najmanji veći od datog broja broj* 2.485 ($\approx \ln 12$), *pa iz ovoga slijedi da je* $11 < 10\sqrt[5]{2} < 12$. *Pošto broj* 2.442 *je negdje na polovini između* $\ln 11$ *i* $\ln 12$ *možemo tvrditi da je* $10\sqrt[5]{2} \approx 11.5$ *to jest da je:*

$$\sqrt[5]{2} \approx 1.15.$$

Da bismo provjerili ovo, primijetimo sljedeće:

$$\ln(100\sqrt[5]{2}) = \ln 100 + \ln \sqrt[5]{2} \approx 4.605 + 0.139 = 4.744$$
$$\ln 115 = \ln 5 + \ln 23 \approx 1.609 + 3.135 = 4.744$$

3.6 Primjena logaritma u teoriji brojeva

Prirodni logaritam javlja se pri rješavanju mnogih matematičkih i fizičkih problema koji na prvi pogled nemaju nikakve veze sa površinama krivolinijskih trapeza omeđenih hiperboličkim lukom. Navedimo ovdje jedan takav problem koji je iznio ruski matematičar Pafnutii Lvovich Chebyshev: treba pronaći formulu za približno izračunavanje broja prostih brojeva koji su manji ili jednaki datom broju n. Ukoliko n nije veliko, onda taj broj možemo jednostavno izračunati, a zapisujemo ga kao $\pi(n)$. Pa ako je $n = 10$, prosti brojevi koji nisu veći od n su $2, 3, 5, 7$ a to znači da je $\pi(10) = 4$. Ukoliko je $n = 100$ tada metodom Eratostenovog sita dolazimo do 25 prostih brojeva koji su manji ili jednaki od 100, pa je $\pi(100) = 25$. Međutim, ukoliko je n veliki broj onda, ovaj problem postaje težak. Postavlja se pitanje: kako izračunati $\pi(n)$, bar i nagrubo, ukoliko je n jednak jednom milionu ili milijardi i slično. Chebyshev je otkrio da, ukoliko želimo približno izračunati $\pi(n)$, dovoljno je da n podijelimo sa prirodnim logaritmom od n :

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}.$$

Relativna greška ovog izraza je možda velika, ali teži nuli kada n teži u beskonačnost. Chebyshevljevu aproksimaciju posebno je pogodno koristiti kada je n oblika $n = 10^k$. Tada dobijemo da je $\ln 10^k = k \cdot \ln 10 \approx 2.303k$, pa je

$$\pi(10^k) \approx \frac{10^k}{2.303k}.$$

Kako je $\frac{1}{2.303} \approx 0.434$ dobijemo još pogodniju formulu:

$$\pi(10^k) \approx 0.434 \frac{10^k}{k}.$$

Pa za $k = 1$ i $k = 2$ vidimo da je:

$$\pi(10) \approx 0.434 \cdot 10 \approx 4.34 \qquad (\textit{rezultat } 4)$$
$$\pi(100) \approx 0.434 \cdot \frac{100}{2} \approx 21.7 \qquad (\textit{rezultat } 25).$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijemo:

$$\pi(1000) \approx 0.434 \cdot \frac{1000}{3} \approx 145 \qquad (\textit{rezultat } 168)$$
$$\pi(10000) \approx 0.434 \cdot \frac{10000}{4} \approx 1090 \qquad (\textit{rezultat } 1229)$$
$$\pi(10^6) \approx 0.434 \cdot \frac{10^6}{6} \approx 72300 \qquad (\textit{rezultat } 78498).$$

Relativna greška posljednjeg rezultata iznosi:

$$\frac{78498 - 72300}{78498} \approx 0.08,$$

to jest 8% (od broja $\pi(10^6)$), što je još uvijek vrlo značajna greška. Međutim, dokazuje se da relativna greška Chebyshevljeve formule može postati proizvoljno mala ukoliko je 10^k dovoljno velik broj. Pa tako možemo doći do slučaja kada je manja od 1%, zatim manja od 0.1%, pa i 0.001% i tako dalje. Upravo u ovoj činjenici leži veliki teorijski značaj

Chebyshevljeve formule. Chebyshev je, međutim, ponudio još jednu formulu za približno računa-nje $\pi(n)$, koja je malo složenija, ali daje bolje rezultate:

$$\pi(n) \approx \int_2^n \frac{dt}{\ln t}.$$

Navedimo neke rezultate dobijene ovom formulom:

$$\int_2^{1000} \frac{dt}{\ln t} \approx 177 \qquad (rezultat\ 168)$$

$$\int_2^{10000} \frac{dt}{\ln t} \approx 1245 \qquad (rezultat\ 1229)$$

$$\int_2^{1000000} \frac{dt}{\ln t} \approx 78627 \qquad (rezultat\ 78498).$$

Relativna greška poslednje aproksimacije iznosi:

$$\frac{|78498 - 78627|}{78498} \approx 0.0016 = 0.16\%.$$

4 Grafik funkcije $f(x) = \ln x$

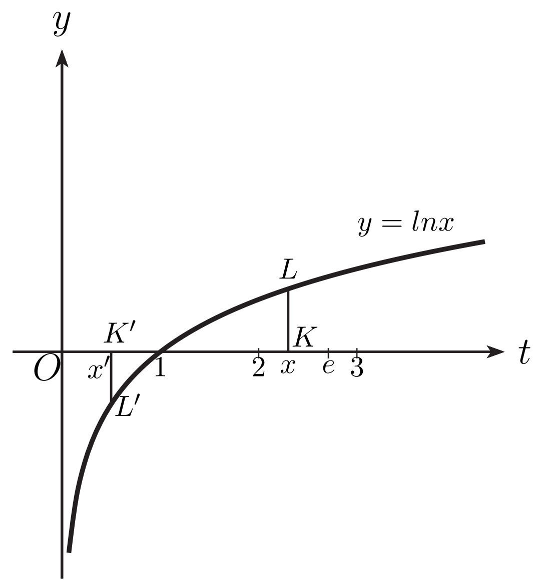
Kako bismo nacrtali grafik funkcije $y = \ln x$, nakon što povučemo kordinatne ose i odaberemo mjerne jedinice, tada svakom x ($x > 0$), pridružimo duž čija jedna krajnja tačka odgovara vrijednosti $\ln x$ a normalna je na $x-$osu u tački $(x, 0)$. Skup krajnjih tačaka ovakvo dobijenih normalnih duži za svako x leži na krivoj koja predstavlja graf logaritamske funkcije (Slika 8).

Na Slici 9 prikazana je vrijednost $\ln x$ preko površine. Primijećujemo da je za određeno x površina krivolinijskog trapeza jednaka dužini duži KL na Slici 8 Primijetimo da, ukoliko je $0 < x' < 1$, tada je $\ln x'$ negativan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka površini trapeza $B'D'CA$;

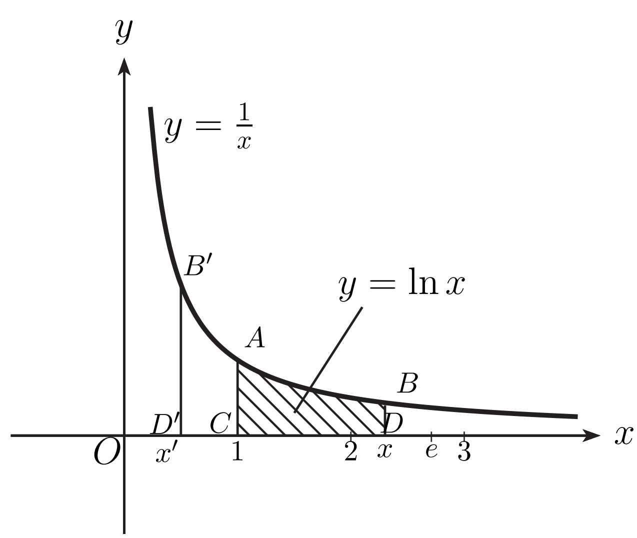
zbog činjenice da je:

$$\ln x' = \int_1^{x'} \frac{dx}{x} = -\int_{x'}^1 \frac{dx}{x};$$

pa u ovom slučaju na Slici 8 $\ln x'$ je prikazan preko duži $K'L'$ koja leži ispod grafika.



Slika 8



Slika 9

Sva svojstva grafika funkcije $y = \ln x$ možemo izvući iz definicije i osobina prirodnog logaritma. Na primjer, $\ln x$ je negativno za $x < 1$, jednako nuli za $x = 1$ i pozitivno za $x > 1$. Samim tim i grafik logaritamske funkcije leži ispod $x-$ose za $x < 1$, siječe osu za $x = 1$ i leži iznad $x-$ose za $x > 1$. Štaviše, $y = \ln x$ raste kako x raste. Ova činjenica je očigledna za $x > 1$, ali također vrijedi i za $x = x' < 1$, jer u tom slučaju ukoliko se x povećava, apsolutna vrijednost površine trapeza $B'D'CA$ se smanjuje, ali pošto je $\ln x$ suprotnog znaka, to se ona povećava. Da je logaritamska funkcija rastuća slijedi i iz činjeice da je njen grafik nagnuta kriva koja raste sa lijeva u desno. U početku ovaj nagib je strm, a kasnije sve manji i manji. Grafik logaritamske funkcije u daljem tekstu nazivati ćemo *logaritamskom krivom.*

Ukoliko povučemo horizontalnu krivu duž $x-$ ose i pratimo je u desnu stranu počevši od kordinatnog početka primijećujemo da se lijevi kraj krive gubi u beskonačnosti. Međutim dovoljno je napraviti korak od jedne jedinice dužine kako bismo imali očigledniju predstavu. Krećući se našom putanjom vidimo da za svaki korak kriva se podiže, pa tako poslije dva koraka $(x = 2)$ dostiže visinu $\ln 2 \approx 0.693$, poslije tri $\ln 3 \approx 1.099$, i tako dalje.

Izračunajmo koliko će nagib narasti kada poslije m koraka uzmemo jedan više. Kako će visina krive nakon m koraka biti $\ln m$, a nakon $m+1$ koraka biti $\ln(m + 1)$, imamo:

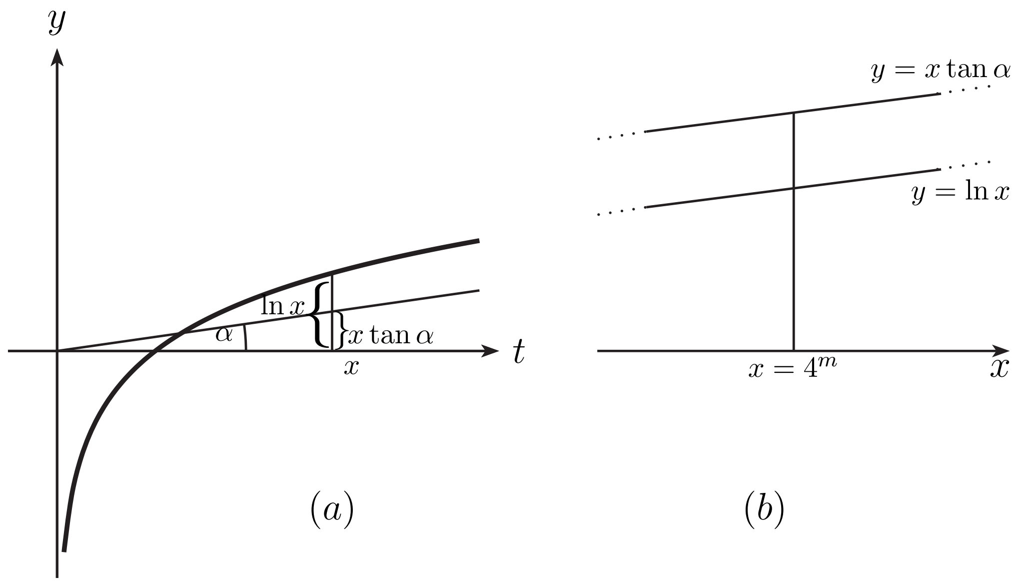
$$\ln(m+1) - \ln m = \ln \frac{m+1}{m} = \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Što više koraka napravimo to je razlomak $\frac{1}{m}$ manji, a suma $1+\frac{1}{m}$ bliža osi dok $\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ se približava nuli. To znači da povećanje visine krivulje postaje sve manje i manje kako idemo u desno, odnosno kriva postaje sve ravnija. Smanjenje nagiba krive ne spriječava je da i dalje raste i ide u beskonačnost. Ustvari ako načinimo 2^m, koraka kriva će biti na visini od:

$$\ln 2^m = m \cdot \ln 2 \approx 0.693m,$$

a ovo možemo učiniti proizvoljno velikim uzimajući m dovoljno veliko.

Ako na mjestu horizontalne putanje kroz kordinatni početak povučemo pravolinisku putanju sa nekim usponom α koje može biti proizvoljno malo, prije ili kasnije krećući se ovom putanjom, ne samo da ćemo dostiči logaritamsku krivulju, već je i prestići i ostaviti ispod sebe.



Slika 10

Da bismo ovu činjenicu razjasnili dokažimo sljedeću lemu.

Lema 1 *Za proizvoljan prirodan broj m vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\frac{4^m}{m^2} \geq 4$$

Dokaz *Ako povećamo m za jedan, tada i razlomak* $\frac{4^m}{m^2}$ *se poveća. Odnosno:*

$$\frac{4^m}{m^2} < \frac{4^{m+1}}{(m+1)^2};$$

ovo slijedi iz činjenice da nejednakost:

$$\frac{\frac{4^{m+1}}{(m+1)^2}}{\frac{4^m}{m^2}} = \frac{4m^2}{(m+1)^2} = \left(\frac{2m}{m+1}\right)^2 = \left(\frac{m+m}{m+1}\right)^2 \geq 1,$$

vrijedi za svako $m \geq 1$. *To znači da od sljedećih razlomaka:*

$$\frac{4^1}{1^2}, \quad \frac{4^2}{2^2}, \dots, \frac{4^m}{m^2};$$

prvi je najmanji. To jest za proizvoljno $m \geq 1$ *vrijedi:*

$$\frac{4^1}{1^2} \leq \frac{4^m}{m^2}$$

što je trebalo i dokazati. ♠

Primijetimo sada da za svaku tačku nagnute pravoliniske putanje vrijedi sljedeća relacija

$$y = x \cdot \tan \alpha,$$

gdje je α ugao nagiba putanje. Kako je α oštar ugao, to je $\tan \alpha > 0$. Ukoliko uzmemo da je $x = 4^m$, onda će visina putanje za ovo x biti $4m^m \cdot \tan \alpha$, dok će visina logaritamske krivulje biti $\ln(4^m) = m \cdot \ln 4$. Odnos prve visine naspram druge iznosi:

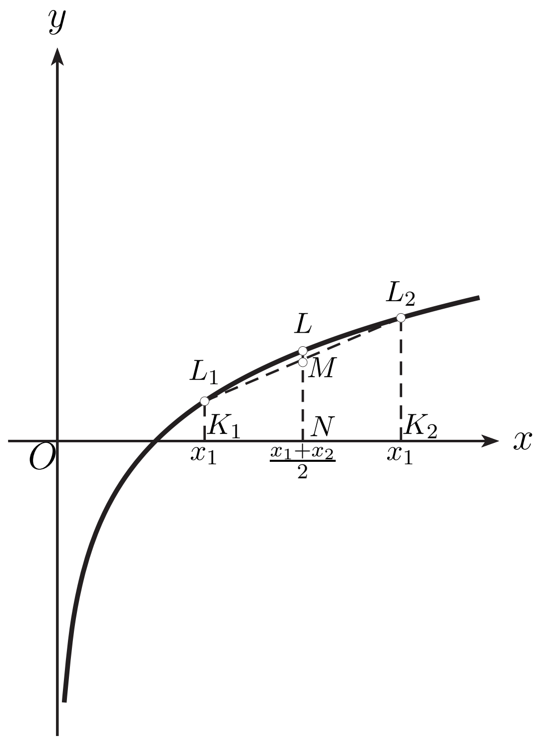
$$\frac{4^m \cdot \tan \alpha}{m \cdot \ln 4} = \frac{4^m \cdot \tan \alpha}{m^2 \cdot \ln 4} m.$$

Ali poznato nam je $\frac{4^m}{m^2} \geq 4$. Pa odnos pomenute dvije visine nije manji od $\frac{4 \cdot \tan \alpha}{\ln 4} m$, što možemo učiniti proizvoljno velikim, birajući za m dovoljno velik broj, odnosno za $x = 4^m$ i m dovoljno veliko, nagnuta pravolinijska putanja dostiže visinu znatno veću od logaritamske krive. Napomenimo da je logaritamska kriva glatkog zakrivljenog oblika i konveksna je prema gore. Geometrijski rečeno, to znači da proizvoljan luk logaritamske krive uvijek se nalazi iznad duži čiji su krajevi krajnje tačke tog luka (Slika 11). Označimo sa x_1 i x_2 apscise krajnjih tačaka proizvoljnog luka L_1L_2 i sa $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ aritmetičku sredinu tih apscisa. Tada tačka L koja odgovara x na luku mora ležati iznad tačke M na tetivi. Zaista:

$$\overline{NL} = \ln \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad \overline{NM} = \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{2}.$$

Zbog srednje linije trapeza $L_1K_1K_2L_2$ vrijedi:

$$\overline{NM} = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}.$$



Slika 11

Dokažimo da je:

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}.$$

Ali kako je

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} = \frac{1}{2} \ln(x_1 x_2) = \ln \sqrt{x_1 x_2},$$

treba dokazati da je ustvari:

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2}.$$

Primijetimo da je

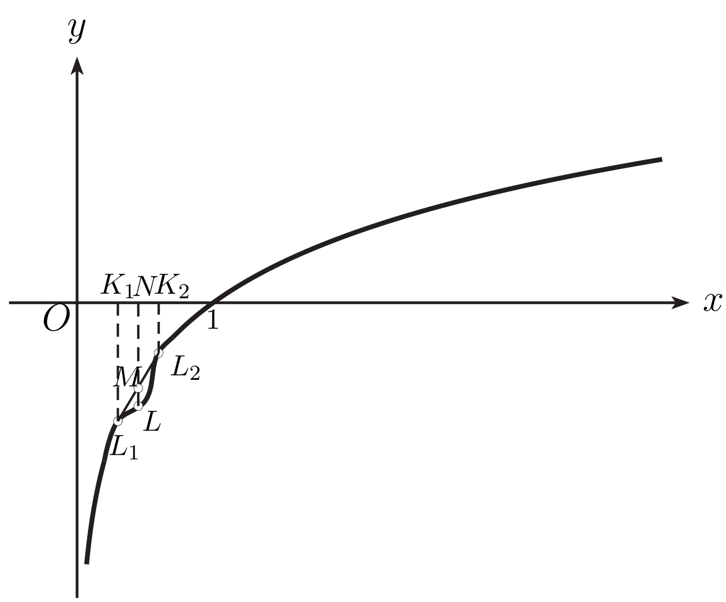
$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 > 0,$$

ukoliko su x_1 i x_2 dva različita pozitivna broja. Pa je $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2}$ odnosno $\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$, a samim tim i

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ovo znači da bilo koji luk na grafiku logaritamske funkcije i tačka na luku koja odgovara apscisi aritmetičke sredine krajnjih tačaka leži iznad središnje tačke tetive datog luka koja spaja njegove krajnje tačke.

Ovo povlači da logaritamska kriva ne zadrži nikakva udubljenja. Jer ako pretpostavimo suprotno, došli bi u kontradikciju sa već dokazanom činjenicom i postojala bi tačka na luku koja leži ispod odgovarajuće tačke na tetivi.



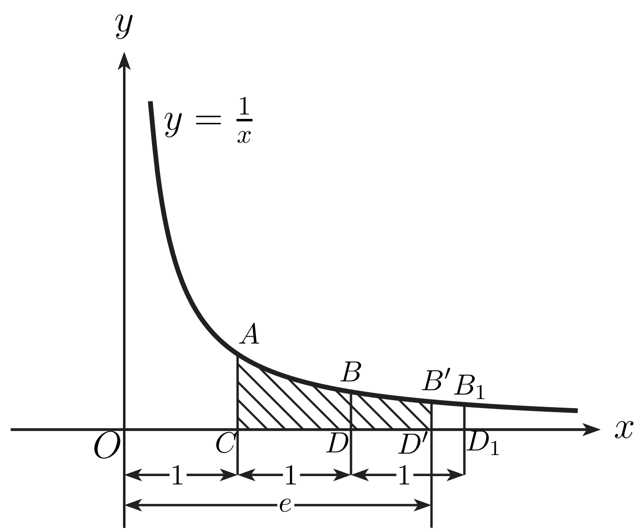
Slika 12

4.1 Broj e

Vidjeli smo da je:

$$\ln 2 \approx 0.69315 < 1, \qquad \ln 3 \approx 1.09861 > 1.$$

To znači da je površina $ACDB$ na Slici 13 manja od jedan dok je površina ACD_1B_1 veća od jedan. Stoga je za očekivati da negdje između tačaka D i D_1 postoji tačka D' takva da je površina $ACD'B'$ jednaka jedan. Takva tačka uistinu i postoji.



Slika 13

Ukoliko označimo duž $\overline{OD'}$ slovom e, onda možemo tvrditi da je $2 < e < 3$. Uz pomoć logaritamske tablice možemo utvrditi da je $2.7 < e < 2.8$, jer je

$$\ln 2.7 = \ln 27 - \ln 10 \approx 0.993$$

$$\ln 2.8 = \ln 28 - \ln 10 \approx 1.029.$$

Postoji nekoliko metoda za odrediti broj e sa bilo kojom preciznošću, međutim, ovdje ćemo odmah dati rezultat:

$$e \approx 2.7182818.$$

Prema definiciji imamo da je:

$$\ln e = 1.$$

Broj e se naziva baza prirodnog logaritma ili Napierov broj po Škotskom matematičaru koji je prvi objavio tablicu logaritma, 1614. godine. Koristeći osobine prirodnog logaritma možemo dokazati sljedeću bitnu činjenicu: *Prirodni logaritam bilo kojeg pozitivnog broja b je eksponent kojim moramo stepenovati broj e da bismo dobili b.* Drugim riječima: ukoliko je $\ln b = \alpha$ tada $b = e^{\alpha}$. Na primjer, iz $\ln 2 \approx 0.69315$, slijedi da je $2 \approx e^{0.69315}$; a kako je $\ln 10 \approx 2.30259$, slijedi da je $10 \approx e^{2.30259}$.
Da bismo dokazali ovu činjenicu dovoljno je koristiti pravilo za logaritmiranje stepena. Neka je $b = e^x$. Tada je $\ln b = \ln e^x = x \cdot \ln e$, ali kako je $\ln e = 1$ imamo da je $\ln b = x$.

Na ovaj način smo mogli definisati prirodni logaritam bez upotrebe geometrije. Pa smo tako u samom početku mogli reći da prirodni logaritam broja b je broj kojim trebamo stepenovati $e \approx 2.71828$ da bismo dobili broj b. Međutim, ovom definicijom se neobjašnjava zašto se broju e daje veći značaj od ostalih brojeva. S druge strane, definicijom logaritma preko površina ne javlja se takva konfuzija.

Međutim, moramo staviti do znanja da pored prirodnog logaritma postoje i drugi logaritmai sa drugim bazama. Pa tako logaritam po bazi 10 broja b je broj kojim treba stepenovati 10 da bismo dobili b. Logaritam od b po bazi 10 zapisujemo kao $\log b$, a ovakav logaritam nazivamo dekadskim logaritmom. Ako uzmemo da je $\log b = \beta$, tada po definiciji je $b = 10^{\beta}$. Očigledno je da je $\log 10 = 1$.

Postoji jednostavna veza između prirodnog i dekadskog logaritma. Neka je $\ln b = \alpha$, a $\log b = \beta$. To znači da je $b = e^{\alpha}$ i $b = 10^{\beta}$. Što dalje povlači da je $e^{\alpha} = 10^{\beta}$, a samim tim i $\ln e^{\alpha} = \ln 10^{\beta}$ ili $\alpha \cdot \ln e = \beta \cdot \ln 10$, odnosno $\alpha \approx \beta \cdot 2.30259$. Pa je:

$$\ln b \approx 2.30259 \cdot \log b$$

ili

$$\log b \approx \frac{1}{2.30259} \ln b \approx 0.43429 \ln b.$$

Množeći svaki od logaritama u tablici prirodnog logaritma sa 0.43429 dobijemo tablicu dekadskog logaritma. Tako je:

$$\log 2 \approx 0.43429 \ln 2 \approx 0.43429 \cdot 0.69315 \approx 0.30103.$$

Za $\log 10$ jasno je da ćemo dobiti vrijednost 1 :

$$\log 10 \approx 0.43429 \ln 10 \approx 0.43429 \cdot 2.30259 \approx 1.$$

Činjenica da 10, tj. bazu dekadskog sistema brojeva, uzmemo za bazu logaritma olakšava računanje s logaritmima. Tako npr. kako znamo da je $\log 2 \approx 0.30103$ i $\log 10 = 1$ lako dobijemo:

$$\log 20 = \log 2 + \log 10 \approx 0.30103 + 1 \approx 1.30103$$
$$\log 200 = \log 2 + \log 10^2 \approx 0.30103 + 2 \cdot 1 \approx 2.30103$$

S druge strane, kako je $\ln 2 \approx 0.69315$ i $\ln 10 \approx 2.302585$, ukoliko sada želimo da izračunamo $\ln 20$ i $\ln 200$ potrebno je izvršiti sljedeće operacije:

$$\ln 20 \approx \ln 2 + \ln 10 \approx 0.69315 + 2.30259 \approx 2.99574,$$
$$\ln 200 = \ln 2 + \ln 10^2 \approx 0.69315 + 2 \cdot 2.302585 \approx 5.29832.$$

Stoga, ukoliko koristimo logaritme kao alat za računanje, preporučuje se dekadski logaritam, ali to ni u kom slučaju ne umanjuje značaj prirodnog logaritma u rješavanju nekih od najznačajnijih problema u matematici i nauci.

Literatura

[1] I. Markushevic, *Areas and Logarithms (Translated from Rusian)*, D.C. Heat and Company, Boston, 1963.

[2] I. Milanović, Đ. Takači, R.Vukobratović, Uvođenje logaritamske funkcije preko integrala-metodički pristup, *Pedagoška stvarnost*, Vol.58, Br.1(2012), 61-78.

[3] J.R. Buchanan, *Natural logarithm as an integral/MATH 161 calculus*, Millersville University-Department of mathematics, 2010.

[4] S.R. Ghorpade, B.V. Limaye, *A course in calculus and real analysis*, Springer, New York, 2006.

[5] M. Nurkanović, *Elementarna matematika sa stanovišta više matematike (fragmenti predavanja)*, Tuzla, 2011.