UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA

Prof. dr. Mehmed Nurkanović

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Skripta - u izradi

Predgovor

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Asimptotske oznake o i O. Ekvivalentne funkcije

Definicija 1.1.1 *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$ (realna funkcija) i $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tačka gomilanja skupa D_f. Za funkciju f kažemo je* ***beskonačno mala veličina (infinitezimala)*** *kad $x \to a$ ako vrijedi*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Primjer 1.1.1 *Primjeri beskonačno malih veličina:*
i) $\frac{1}{x}$ *kad* $x \to \pm\infty$,
ii) x^n $(n \in \mathbb{N})$ *kad* $x \to 0$,
iii) $e^x - 1$ *kad* $x \to 0$,
iv) a^x $(a > 1)$ *kad* $x \to -\infty$, a^x $(0 < a < 1)$ *kad* $x \to +\infty$,
v) $\ln x$ *kad* $x \to 1$. ♣

Definicija 1.1.2 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***beskonačno velika veličina*** *kad $x \to a$, gdje je $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tačka gomilanja skupa D_f, ako vrijedi*

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty.$$

Primjer 1.1.2 *Primjeri beskonačno velikih veličina:*
i) $\frac{1}{x}$ *kad* $x \to 0$,
ii) x^n $(n \in \mathbb{N})$ *kad* $x \to +\infty$,
iii) $\frac{1}{x-2}$ *kad* $x \to 2$,
iv) a^x $(a > 1)$ *kad* $x \to +\infty$, a^x $(0 < a < 1)$ *kad* $x \to -\infty$,
v) $\ln x$ *kad* $x \downarrow 0$. ♣

Definicija 1.1.3 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***beskonačno mala veličina u odnosu na funkciju*** *$g : D_g \to \mathbb{R}$ kad $x \to a$, gdje je $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tačka gomilanja skupa $D_f \cap D_g$, ako vrijedi*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

odnosno ako postoji okolina $O'(a)$ tačke a i infinitezimala $\alpha(x)$ kad $x \to a$, takva da vrijedi

$$f(x) = g(x)\,\alpha(x)$$

za sve $x \in O'(a)$, što simbolički zapisujemo u obliku

$$f = o(g) \quad (x \to a)$$

i čitamo "f je malo o od g kad $x \to a$".

Primjer 1.1.3 *i)* $x^2 = o(x) \quad (x \to 0)$,
ii) $\ln x = o(x) \quad (x \to 1)$,
iii) $x \sin x = o(x) \quad (x \to 0)$. ♣

Napomena 1.1.1 *Primijetimo da u Definiciji 1.1.3 funkcije f i g ne moraju biti infinitezimale. Međutim, ako to one jesu, onda kažemo da je funkcija f infinitezimala ili* ***beskonačno mala veličina višeg reda*** *u odnosu na infinitezimalu g kad $x \to a$. S druge strane, ako je funkcija f beskonačno velika veličina kad $x \to a$ i pri tome je $f = o(g)$ $(x \to a)$, onda kažemo da je funkcija g* ***beskonačno velika veličina višeg reda*** *u odnosu na funkciju f kad $x \to a$.*

Napomena 1.1.2 *Ako je $f : D_f \to \mathbb{R}$ infinitezimala kad $x \to a$, onda vrijedi*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1} = 0,$$

što prema Definiciji 1.1.3 znači da u ovom slučaju možemo upotrijebiti oznaku

$$f = o(1) \quad (x \to a).$$

Tako je, na primjer, $\frac{1}{x} = o(1) \quad (x \to \pm\infty)$ i $\sin x = o(1) \quad (x \to 0)$.

Teorem 1.1.1 *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$ (realna funkcija) i $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tačka gomilanja skupa D_f. Tada funkcija f ima konačnu graničnu vrijednost b u tački a (tj. postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$) ako i samo ako postoji okolina $O'(a)$ tačke a i infinitezimala $\alpha(x)$ kad $x \to a$ tako da je*

$$f(x) = b + \alpha(x),$$

za sve $x \in O'(a)$.

Dokaz. i) Pretpostavimo da postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Tada je

$$\lim_{x \to a} f(x) - b = 0,$$

tj.

$$\lim_{x \to a} \underbrace{(f(x) - b)}_{=\alpha(x)} = 0,$$

pa imamo $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Dakle, $\alpha(x)$ je infinitezimala kad $x \to a$ i vrijedi $\alpha(x) = f(x) - b$, odnosno $f(x) = b + \alpha(x)$, za sve $x \in O'(a)$.

ii) Neka je $\alpha(x)$ infinitezimala kad $x \to a$ i vrijedi $f(x) = b + \alpha(x)$, za sve $x \in O'(a)$. Tada je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (b + \alpha(x)) = b + \lim_{x \to a} \alpha(x) = b + 0 = b.$$

■

Definicija 1.1.4 *Za funkciju $g : D_g \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***dominirajuća funkcija nad funkcijom*** *$f : D_f \to \mathbb{R}$ kad $x \to a$, gdje je $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tačka gomilanja skupa $D_f \cap D_g$, ako postoji okolina $O'(a)$ tačke a tako da je količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ ograničen u okolini $O'(a)$, odnosno ako postoji funkcija β koja je ograničena u okolini $O'(a)$ takva da je $f(x) = g(x)\beta(x)$ za sve $x \in O'(a)$. Simbolički to označavamo s*

$$f = O(g) \qquad (x \to a)$$

i čitamo: "f je veliko O od g kad $x \to a$".
Ako za realne funkcije f i g vrijedi $f = O(g)$ i $g = O(f)$ $(x \to a)$, kažemo da su funkcije f i g istog reda kad $x \to a$.

Uočimo da, ako postoji konstanta $K > 0$ takva da je $\frac{f(x)}{g(x)} \leq K$ za sve $x \in O'(a)$ ili ako postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = b$, onda je $f = O(g) \quad (x \to a)$ u oba slučaja, ali ako je u pitanju drugi slučaj, tada su funkcije f i g istog reda kad $x \to a$. Tako su funkcije $f(x) = 1 - \cos x$ i $g(x) = x^2$ istog reda kad $x \to 0$, jer vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Također, jednostavno se vidi da je $x\sin x = O(x)$ $(x \to \pm\infty)$.

Definicija 1.1.5 *Za realne funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ i $g : D_g \to \mathbb{R}$ kažemo da su* ***ekvivalentne*** *funkcije (ili da se funkcija f* ***asimptotski ponaša kao funkcija*** *g) kad $x \to a$, gdje je $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tačka gomilanja skupa $D_f \cap D_g$, ako vrijedi*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

i simbolički zapisujemo $f \sim g$ $(x \to a)$ (čita se: "f je ekvivalentna sa g kad $x \to a$").

Primjer 1.1.4 *i)* $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$,
ii) $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$,
iii) $\ln(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$. ♣

Navedimo sada neke važne osobine ekvivalentnih funkcija.

1. *Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije.*

   a) Refleksivnost: $f \sim f$ $(x \to a)$ jer je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)} = 1$

   b) Simetričnost:

$$f \sim g\,(x\to a) \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{1} = 1$$

   c) Tranzitivnost: pretpostavimo da je $f \sim g$ $(x \to a)$ i $g \sim h$ $(x \to a)$, što znači da vrijedi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \;\text{ i }\; \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} = 1,$$

pa imamo

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{h(x)}{g(x)}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}}}=\frac{1}{\frac{1}{1}}=1\Longrightarrow f\sim h\ \ (x\to a)$$

2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\Longrightarrow f\sim b\ (x\to a)$

   Zaista,

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\Longrightarrow\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{b}=1\Longrightarrow\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}b}=1\Longrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{b}=1,$$

   što prema Definiciji 1.1.5 znači da je $f\sim b\ (x\to a)$.

3. $\left(f\sim g\,(x\to a)\wedge\lim\limits_{x\to a}g(x)=b\right)\Longrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$

   Koristeći osobinu 2. imamo

$$\left(f\sim g\,(x\to a)\wedge\lim_{x\to a}g(x)=b\right)\Longrightarrow\left(f\sim g\,(x\to a)\wedge g\sim b\,(x\to a)\right),$$

   odakle, zbog tranzitivnosti relacije $\sim$, slijedi $f\sim b\ (x\to a)$, odnosno opet zbog osobine 2. je $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

4. $(f\sim\alpha,\ g\sim\beta,\ h\sim\gamma,\ k\sim\eta\ \ (x\to a))\Longrightarrow\dfrac{f\cdot g}{h\cdot k}\sim\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot\eta}$

   Zaista,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)\cdot k(x)}&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{g(x)}{\beta(x)}}{\frac{h(x)}{\gamma(x)}\cdot\frac{k(x)}{\eta(x)}}\cdot\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\gamma(x)\cdot\eta(x)}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\beta(x)}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{\gamma(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{k(x)}{\eta(x)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\gamma(x)\cdot\eta(x)}\\&=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1}\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\gamma(x)\cdot\eta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\gamma(x)\cdot\eta(x)}.\end{aligned}$$

5. *$f\sim g\,(x\to a)$ ako i samo ako postoji okolina $O(a)$ i funkcija γ tako da je $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=1$ i $f(x)=g(x)\gamma(x)$ za sve $x\in O'(a)$.*

6. *$f\sim g\ (x\to a)$ ako i samo ako postoji infinitezimala $\alpha(x)\ (x\to a)$ tako da vrijedi*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1+\alpha(x)\quad(x\to a),$$

   odnosno

$$f(x)=g(x)+g(x)\,\alpha(x)\quad(x\to a),$$

   ili drugačije zapisano

$$f\sim g\,(x\to a)\ \text{ ako i samo ako } f=g+o(g)\quad(x\to a).$$

   Dokazi osobina 5. i 6. se izvode slično dokazu Teorema 1.1.1.

Primjer 1.1.5 *Koristeći osobinu 4. možemo jednostavno izračunati sljedeću graničnu vrijednost*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^6 x\ln(1+x)}{(e^x-1)^{17}\cos^{10}x}.$$

Naime, kako je $\sin x\sim x\ (x\to 0)$, $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$, $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$ *i* $\cos x\sim 1$ $(x\to 0)$, *prema osobini 4. imamo*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^6 x\ln(1+x)}{(e^x-1)^{17}\cos^{10}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6\cdot x}{x^{17}\cdot 1}=+\infty.$$

Primjer 1.1.6 *a.* $\sin x\sim x\ (x\to 0)\overset{6.}{\Longrightarrow}$*postoji infinitezimala* $\alpha(x)\ (x\to 0)$ *takva da*

$$\sin x=x+\underbrace{x\alpha(x)}_{=o(x)\ (x\to 0)}\quad(x\to 0),$$

dakle,

$$\sin x=x+o(x)\quad(x\to 0). \tag{1.1}$$

b. $e^x-1\sim x\ (x\to 0)\overset{6.}{\Longrightarrow}$*postoji infinitezimala* $\alpha(x)\ (x\to 0)$ *takva da*

$$e^x=1+x+\underbrace{x\alpha(x)}_{=o(x)\ (x\to 0)}\quad(x\to 0),$$

odnosno

$$e^x=1+x+o(x)\quad(x\to 0). \tag{1.2}$$

c. $a^x-1\sim x\ln a\ (x\to 0)$, *pa analogno s b. imamo*

$$a^x=1+x\ln a+o(x)\quad(x\to 0). \tag{1.3}$$

d. $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$, *odakle slijedi*

$$\ln(1+x)=x+o(x)\quad(x\to 0). \tag{1.4}$$

e. Kako je, za $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}\overset{(1.2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha,$$

imamo da postoji infinitezimala $\beta(x)\ (x\to 0)$ *takva da*

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha+\beta(x)\quad(x\to 0),$$

odnosno

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)\quad(x\to 0).$$

f. Budući da je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, *vrijedi* $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$, *odakle slijedi da postoji infinitezimala* $\alpha(x)\ (x\to 0)$ *takva da*

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+x^2\alpha(x)\quad(x\to 0),$$

to jest

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\quad(x\to 0). \tag{1.5}$$

♣

U prethodnom primjeru smo imali priliku vidjeti da neki sabirak ima oznaku $o(x)$ ili $o\left(x^2\right)$ kad $x \to a$. Šta nam to znači? Naime, znamo da je $f = o(g)$ $(x \to a)$ oznaka za *jednu* funkciju f koja je beskonačno mala u odnosu na funkciju g kad $x \to a$. S druge strane, oznaka $o(f)$ $(x \to a)$ nije oznaka za jednu funkciju, nego za cijelu *klasu* funkcija koje su beskonačno male u odnosu na funkciju f kad $x \to a$. To nam je važno kako zbog narednog teorema, tako i zbog kasnije primjene Landauovih oznaka, posebno u izračunavanju graničnih vrijednosti funkcija.

Teorem 1.1.2 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. $f \sim g\ (x \to a) \Longrightarrow o(f) = o(g)\ (x \to a)\,,$
2. $f \cdot o(g) = o(fg)\ (x \to a)\,,$
3. $o(f) \pm o(f) = o(f)\ (x \to a)\,,$
4. $o(o(f)) = o(f)\ (x \to a)\,,$
5. $f = o(g)\ (x \to a) \Longrightarrow f = O(g)\ (x \to a)\,,$
6. $O(f) + O(f) = O(f)\ (x \to a)\,.$

Dokaz. 1. $f \sim g$ $(x \to a)$ implicira da postoji funkcija γ takva da $\gamma(x) \to 1$ $(x \to a)$ i $f = g\gamma$ $(x \to a)$. Uvedimo oznaku $o(f) = h$ $(x \to a)$. To znači da postoji infinitezimala $\alpha(x)$ $(x \to a)$ takva da je $h = f\alpha$ $(x \to a)$, pa je $h = g(\gamma\alpha)$ $(x \to a)$, pri čemu je $\gamma\alpha$ infinitezimala $(x \to a)$. Odavde je $h = o(g)$ $(x \to a)$, to jest klasa funkcija beskonačno malih u odnosu na funkciju f kad $x \to a$ je podskup klase $o(g)$. Analogno, iz oznake $o(g) = h$ $(x \to a)$, dobit ćemo da je $h = o(f)$ $(x \to a)$, što znači i da je klasa funkcija beskonačno malih u odnosu na funkciju g kad $x \to a$ podskup klase $o(f)$. Time smo dobili da ustvari vrijedi $o(f) = o(g)$ $(x \to a)$.

2. Iz $o(g) = h$ $(x \to a)$ slijedi da postoji infinitezimala $\alpha(x)$ $(x \to a)$ takva da je $h = g\alpha$ $(x \to a)$, pa je $f \cdot o(g) = fh = (fg)\,\alpha = o(fg)$ $(x \to a)$.

3. Neka je $o(f) = h$ i $o(f) = k$ $(x \to a)$. Tada postoje infinitezimale $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ $(x \to a)$ takve da je $h = f\alpha$ i $k = f\beta$ $(x \to a)$ te imamo $o(f) + o(f) = h + k = f(\alpha + \beta)$ $(x \to a)$. No, kako je $\alpha(x) + \beta(x)$ infinitezimala kad $x \to a$, imamo da je $h + k = o(f)$ $(x \to a)$.

4. Neka je $h = o(f)$ $(x \to a)$, odnosno $h = f\alpha$, gdje je $\alpha(x)$ infinitezimala kad $x \to a$. Ako uvedemo oznaku $o(o(f)) = g$, odnosno $o(h) = g$, to će značiti da postoji infinitezimala $\beta(x)$ $(x \to a)$ takva da je $g = h\beta$ $(x \to a)$. Dakle, vrijedi $g = h\beta = f\alpha\beta$ $(x \to a)$, pri čemu je $\alpha\beta$ infinitezimala $(x \to a)$, pa je $g = o(f)$ $(x \to a)$.

5. $f = o(g)$ $(x \to a) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, a to znači da za proizvoljno odabrani broj $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da vrijedi

$$\left(\forall x \in O'_\delta(a)\right) \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon,$$

odakle slijedi da je $f = O(g)$ $(x \to a)$ prema definiciji simbola O.

6. Jednostavno se dokazuje (vježba!). ■

Primjer 1.1.7 *Odrediti graničnu vrijednost* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$.

Rješenje. *Koristeći (1.2) i (1.1) te osobinu 3. Teorema 1.1.2, imamo*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+ax+o(x))-(1+bx+o(x))}{(ax+o(x))-(bx+o(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(a-b)x+o(x)}{(a-b)x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(a-b)+\frac{o(x)}{x}}{(a-b)+\frac{o(x)}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(a-b)+o(1)}{(a-b)+o(1)} = 1 \quad (a,b\in\mathbb{R}, a\neq b). \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 1.1.8 *Odrediti graničnu vrijednost* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Rješenje. *a) Koristeći ekvivalentnost funkcija:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} &= \left[\begin{array}{c} 1-\cos ax\sim \frac{1}{2}a^2x^2 \ \ (x\to 0)\\ 1-\cos bx\sim \frac{1}{2}b^2x^2 \ \ (x\to 0)\end{array}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}a^2x^2\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{2}b^2x^2\right)}\\ &= \left[\begin{array}{c} \ln\left(1-\frac{1}{2}a^2x^2\right)\sim -\frac{1}{2}a^2x^2 \ \ (x\to 0)\\ \ln\left(1-\frac{1}{2}a^2x^2\right)\sim -\frac{1}{2}b^2x^2 \ \ (x\to 0)\end{array}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}a^2x^2}{-\frac{1}{2}b^2x^2}\\ &= \frac{a^2}{b^2}\end{aligned}$$

b) Koristeći Landauovu oznaku "o":

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos ax-1))}{\ln(1+(\cos bx-1))} \overset{(1.4)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1+o(\cos ax-1)}{\cos bx-1+o(\cos bx-1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1+o\left(2\sin^2\frac{ax}{2}\right)}{\cos bx-1+o\left(2\sin^2\frac{bx}{2}\right)}\\ &= \left[\begin{array}{c} o\left(2\sin^2\frac{ax}{2}\right)=h \Longrightarrow h(x)=2\sin^2\frac{ax}{2}\cdot\alpha(x),\ \lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0\\ \Longrightarrow h(x)=x^2\beta(x),\ \lim\limits_{x\to 0}\beta(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\frac{a^2x^2}{4}}\cdot\alpha(x)=0\\ \Longrightarrow h=o\left(x^2\right)\ \ (x\to 0)\end{array}\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1+o\left(x^2\right)}{\cos bx-1+o\left(x^2\right)} \overset{(1.5)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}a^2x^2+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)}{-\frac{1}{2}b^2x^2+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}a^2x^2+o\left(x^2\right)}{-\frac{1}{2}b^2x^2+o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}a^2+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}{-\frac{1}{2}b^2+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}a^2+o(1)}{-\frac{1}{2}b^2+o(1)} = \frac{a^2}{b^2}.\end{aligned}$$

Navedimo drugi način dokaza da je $o\left(2\sin^2\frac{ax}{2}\right)=o\left(x^2\right)\ (x\to 0)$. *Naime, koristit ćemo Zadatak 1.1 a) i Teorem 1.1.2. Tako je*

$$o\left(2\sin^2\frac{ax}{2}\right) \overset{Zad.\ 1.1\ \text{a)}}{=} o\left(\sin^2\frac{ax}{2}\right).$$

No, s druge strane vrijedi

$$\sin^2\frac{ax}{2}\sim\frac{a^2x^2}{4}\ \ (x\to 0) \overset{Th. 1.1.2\ 1.}{\Longrightarrow} o\left(\sin^2\frac{ax}{2}\right)=o\left(\frac{a^2x^2}{4}\right) \overset{Zad.\ 1.1\ \text{a)}}{=} o\left(x^2\right)\ \ (x\to 0)$$

Primjer 1.1.9 *Sljedeći primjer je zanimljiv*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\left[\begin{array}{c}\tan x\sim x\Longrightarrow \tan x=x+o\left(x\right)\quad (x\to 0)\\ \sin x\sim x\Longrightarrow \sin x=x+o\left(x\right)\quad (x\to 0)\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o\left(x\right)-\left(x+o\left(x\right)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{o(x)}{x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

jer dobijamo neodređeni izraz, tj. ne možemo izračunati graničnu vrijednost. Ovo nam je primjer gdje je neuspješno primijenjena upotreba Landauove oznake o u graničnom procesu. Dakle, ovaj metod treba koristiti samo kad nam standardni metodi ne pomažu (a gornju graničnu vrijednost lahko je naći na standardni način). ♣

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati:

a) $o\left(cf\right)=o\left(f\right)\ (x\to a)$, gdje je c konstanta,

b) $\dfrac{o\left(f\right)}{g}=o\left(\dfrac{f}{g}\right)\ (x\to a),\ g\left(x\right)\neq 0,$

c) $\dfrac{O\left(f\right)}{g}=O\left(\dfrac{f}{g}\right)\ (x\to a),\ g\left(x\right)\neq 0,$

d) $o\left(f+o\left(f\right)\right)=o\left(f\right)\ (x\to a),$

e) $o\left(f\right)+O\left(f\right)=O\left(f\right)\ (x\to a).$

2. Dokazati:

a) $2x+\ln x+\sin x=O\left(x\right)\quad (x\to +\infty);$

b) $x+2^{x+1}=O\left(2^x\right)\quad (x\to +\infty);$

c) $x2^{x+1}+x^{10}+7=O\left(3^x\right)\quad (x\to +\infty);$

d) $x\sin x+\sqrt{x}=O\left(x\right)\quad (x\to +\infty);$

e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)\quad (x\to +\infty);$

f) $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}=O\left(x\right)\quad (x\to +\infty).$

3. Dokazati:

a) $x^2+\sin x^2=o\left(x\right)\quad (x\to 0);$

b) $\left(1+x\right)^n=1+nx+o\left(x\right)\quad (x\to 0),\ n\in\mathbb{N};$

c) $\ln\left(\ln x\right)=o\left(\ln x\right)\quad (x\to +\infty).$

4. Pretpostavimo da je

$$f(x) = o(g(x)), \quad g(x) \to +\infty \qquad (x \to +\infty).$$

Dokazati da je tada

$$e^{f(x)} = o\left(e^{g(x)}\right) \qquad (x \to +\infty).$$

5. Dokazati:

a) $(1+x)^n - 1 \sim nx, \quad x \to 0,\ n \in \mathbb{N};$

b) $\sqrt{x^2+x+1} - x \sim \dfrac{1}{2} \quad (x \to +\infty)$

6. Odrediti:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x^a)}{\sin(\pi x^b)}, a, b \in \mathbb{R}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2} \ (a > 0, b > 0).$

Poglavlje 2

Neprekidnost funkcija

2.1 Pojam neprekidnosti funkcije

Pojam neprekidnosti funkcije može se interpretirati različitim pristupima, ali koji su međusobno ekvivalentni. Najjednostavniji pristup je sljedećom definicijom.

Definicija 2.1.1 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***neprekidna u tački*** *$a \in D_f$ ako postoji konačna granična vrijednost funkcije f u tački a, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i ako je ona jednaka vrijednosti funkcije u tački a, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Kažemo da je funkcija f ***prekidna*** *u tački $a \in D_f$ ako ona nije neprekidna u tački $a \in D_f$.*

Napomena 2.1.1 *Iz prethodne definicije neposredno slijedi*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right), \tag{2.1}$$

što znači da u slučaju neprekidne funkcije limes i funkcija mogu zamijeniti mjesta.

Primjer 2.1.1 *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data analitički sa*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

je neprekidna u svim tačkama iz $\mathbb{R}$. To je očigledno za sve tačke $a \neq 0$, a kako je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ i $f(0) = 0$, ona je neprekidna i u tački $a = 0$. ♣

Primjer 2.1.2 *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data analitički sa*

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

za proizvoljan broj $c \in \mathbb{R}$, nije neprekidna u tački $x = 0$, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, dok je očigledno neprekidna u svim ostalim tačkama iz $\mathbb{R}$. ♣

Neka je sada $a \in D_f$ i za proizvoljno $x \in D_f$ neka je $x = a + \Delta x$. Tada se izraz $\Delta x = x - a$ naziva *prirastom argumenta* x u tački a, a izraz

$$\Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

nazivamo *prirastom funkcije* f u tački a. Primijetimo da iz (2.1) slijedi

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0,$$

a zbog činjenice da $x\to a \Longleftrightarrow \Delta x\to 0$, imamo

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(a+\Delta x)-f(a)\right]=0,$$

to jest $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$. Na taj način smo došli do još jedne definicije neprekidnosti funkcije u tački $a\in D_f$ (Definicija 2.1.2) koja je očito ekvivalentna s Definicijom 2.1.1.

Definicija 2.1.2 *Za funkciju $f:D_f\to\mathbb{R}$ kažemo da je* ***neprekidna u tački*** *$a\in D_f$ ako beskonačno malom prirastu argumenta x u tački a odgovara beskonačno mali prirast funkcije f u tački a.*

Primjer 2.1.3 *Pokažimo da je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$, $n\in\mathbb{N}$ (tj. $f(x)=x^n$) neprekidna u svakoj tački $a\in\mathbb{R}$. Naime, kako je*

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(a+\Delta x)-f(a)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(a+\Delta x)^n-a^n\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\Delta x^{n-k}-a^n\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^k\Delta x^{n-k}=0,\end{aligned}$$

neprekidnost date funkcije u proizvoljnoj tački $a\in\mathbb{R}$ slijedi iz Definicije 2.1.2. ♣

Navedimo sada definiciju neprekidnosti funkcije koja je analogna Cauchyevoj definiciji granične vrijednosti funkcije, ali sa svojim specifičnostima.

Definicija 2.1.3 *Za funkciju $f:D_f\to\mathbb{R}$ kažemo da je* ***neprekidna u tački*** *$a\in D_f$ ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta=\delta(\varepsilon,a)>0)\,(\forall x\in D_f)\,(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)\,. \tag{2.2}$$

Napomena 2.1.2 *Uočimo da je prethodna definicija slična Cauchyevoj definiciji granične vrijednosti funkcije u tački $a\in D_f$ u slučaju kad su $a,b\in\mathbb{R}$. No, uočljive su i bitne razlike između tih definicija:*

1) U Definiciji 2.1.3 tačka a ne mora biti tačka gomilanja skupa D_f. Ona čak može biti i izolirana tačka i tada je u toj tački funkcija neprekidna jer, stavljajući $x=a$ u (2.2) Definicija 2.1.3 će biti zadovoljena.

2) U Definiciji 2.1.3 je $a\neq\pm\infty$, jer je $a\in D_f$.

3) U definiciji granične vrijednosti je $x\in O'_\delta(a)=(a-\delta,a)\cup(a.a+\delta)$ (tj. $x\neq a$), dok je u Definiciji 2.1.3 $x\in O_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)$, tj. može biti i $x=a$.

Primjer 2.1.4 *a) Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ (tj. $f(x)=x$) je neprekidna u svakoj tački $a\in\mathbb{R}$. Zaista, ako za proizvoljno odabrano $\varepsilon>0$ uzmemo da je $\delta=\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ takav da je $|x-a|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, imat ćemo*

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

♣

b) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (tj. $f(x) = x^2$) je neprekidna u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$. Naime, za proizvoljno odabrano $\varepsilon > 0$ vrijedit će

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left|x^2 - a^2\right| = \left|(x-a)^2 + 2ax - 2a^2\right| \\ &= \left|(x-a)^2 + 2a(x-a)\right| \\ &\leq |x-a|^2 + 2|a||x-a| + |a|^2 - |a|^2 \\ &= (|x-a| + |a|)^2 - |a|^2 < \varepsilon \end{aligned}$$

samo ako je

$$|x-a| < \sqrt{|a|^2 + \varepsilon} - |a|.$$

Sada je dovoljno uzeti da je $\delta = \sqrt{|a|^2 + \varepsilon} - |a|$.

***Uočimo važnu činjenicu da ovdje broj δ ne zavisi samo od ε već i od izbora tačke** a (kako je to i navedeno u (2.2)).* ♣

Naravno, slično Heineovoj definiciji granične vrijednosti funkcije, može se dati i sljedeća definicija neprekidnosti.

Definicija 2.1.4 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je **neprekidna u tački** $a \in D_f$ ako i samo ako vrijedi*

$$\left(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in D_f, n \in \mathbb{N}\right) \left(\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)\right). \tag{2.3}$$

Primjer 2.1.5 *Promatrajmo Dirichletovu funkciju $\chi : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ datu analitički u obliku*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljno, a niz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz racionalnih brojeva i niz $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ niz iracionalnih brojeva koji oba konvergiraju ka a. Kako je $\lim\limits_{x\to a} \chi(x_n) = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1$, a $\lim\limits_{x\to a} \chi(x_n') = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0$, prema Definiciji 2.1.4 funkcija χ je prekidna u tački $a \in \mathbb{R}$. Zbog proizvoljnosti izbora tačke $a \in \mathbb{R}$ slijedi da je Dirichletova funkcija prekidna u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$. ♣

Iako čudno djeluje, postoji funkcija koja je neprekidna u svim iracionalnim brojevima, ali je prekidna u svim racionalnim brojevima. Takva funkcija, poznata pod imenom *Thomaeova funkcija*[1] ili *popcorn funkcija*, predstavljena je u sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.6 *Thomaeova funkcija funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definira se kao*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ako je } x = \frac{m}{k}, \text{ gdje su } m,k \in \mathbb{N},\ m \text{ i } k \text{ nemaju zajedničkih djelitelja,} \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan.} \end{cases}$$

Pokažimo da je f neprekidna u svim iracionalnim brojevima, a prekidna u svim racionalnim brojevima iz svog domena.

Pretpostavimo prvo da je $a = \frac{m}{k}$ racionalan broj iz $(0, 1)$. Poznato je da tada postoji niz iracionalnih brojeva $\{x_n\}$ tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, ali je $f(a) = \frac{1}{k} \neq 0$, što znači da je f prekidna u a.

[1] Carl Johannes Thomae (1840-1921), njemački matematičar

Ako je a *iraconalan broj iz* $(0,1)$, *tada je* $f(a)=0$. *Neka je* $\{x_n\}$ *niz u* $(0,1)$ *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. *Za dato* $\varepsilon > 0$ *postoji prirodni broj* K *takav da je* $\frac{1}{K} < \varepsilon$ *prema Arhimedovom aksiomu. Ako je* $\frac{m}{k} \in (0,1)$ *(*m *i* k *bez zajedničkih djelitelja), onda je* $0 < m < k$ *i postoji samo konačno mnogo racionalnih brojeva u* $(0,1)$ *čiji nazivnik* k *je manji od* K. *Kako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *svaki broj različit od* a *može se pojaviti najviše konačno mnogo puta u* $\{x_n\}$. *Zato postoji broj* M *takav da za* $n \geq M$ *svi brojevi* x_n *koji su racionalni imaju nazivnik veći ili jednak* K. *Prema tome, za sve* $n \geq M$ *vrijedi*

$$|f(x_n) - 0| = f(x_n) \leq \frac{1}{K} < \varepsilon,$$

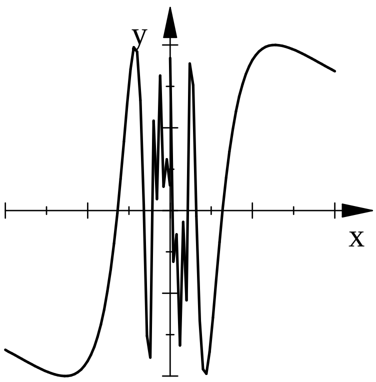
odnosno, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(a)$, *što znači da je funkcija* f *neprekidna u iracionalnom broju* a. *Vidjeti Sliku ??* ♣

SLIKA popcorn funkcije

Primjer 2.1.7 *Ispitajmo neprekidnost funkcije* $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ *datu analitički kao*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

koristeći Definiciju 2.1.4.



Funkcija f *je očito neprekidna u svim tačkama* $a \neq 0$. *Uzmimo sljedeće nizove:* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x'_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $n \in \mathbb{N}$, *za koje vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = f(0), \\
\lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2}(1+4n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(0),
\end{aligned}$$

pa prema Definiciji 2.1.4 funkcija f *je prekidna u tački* 0. ♣

Napomena 2.1.3 *Neprekidnost funkcije se može i geometrijski prepoznati iz grafa te funkcije. Naime, funkcija* f *je neprekidna u nekoj tački* $a \in D_f$ *ako se dio grafa u okolini tačke* a, *tj. prelazeći s jedne na drugu stranu tačke* $(a, f(a))$ *grafa, može nacrtati u jednom potezu - ne dižući olovku s papira.*

Napomenimo još da su sve navedene definicije neprekidnosti funkcije međusobno ekvivalentne (što ostavljamo čitaocu za vježbu).

Možemo, međutim, promatrati neprekidnost funkcije f samo s jedne strane tačke $a \in D_f$, tj. s lijeve ili s desne strane tačke $a \in D_f$.

Definicija 2.1.5 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***neprekidna u tački*** *$a \in D_f$* ***s lijeve strane*** *ukoliko postoji konačna lijeva granična vrijednost funkcije f u tački a i ako je ona jednaka vrijednosti funkcije u tački a, tj. ako je*

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a).$$

Analogno se definira i neprekidnost funkcije f u tački $a \in D_f$ s desne strane.

Definicija 2.1.6 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je neprekidna na skupu $A \subset D_f$ ako je ona neprekidna u svakoj tački skupa A. Simbolički ćemo to označavati s $f \in \mathcal{C}(A)$.*

Tako će nam $f \in \mathcal{C}((a,b))$ označavati da je funkcija f neprekidna u svim tačkama otvorenog intervala (a,b). S druge strane, $f \in \mathcal{C}([a,b))$ označava da je $f \in \mathcal{C}((a,b))$ i da je još f neprekidna u tački a s desne strane.

Objasniti šta znači: $f \in \mathcal{C}((a,b])$ i $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

2.2 Osobine neprekidnih funkcija

Navest ćemo nekoliko najvažnijih osobina neprekidnih funkcija. Neke od tvrdnji nećemo dokazivati budući da su dokazi slični dokazima odgovarajućih tvrdnji za graničnu vrijednost funkcije.

Teorem 2.2.1 *a) Pretpostavimo da su funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ i $g : D_g \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije u tački $a \in D_f \cap D_g$. Tada su u tački a neprekidne i sljedeće funkcije:*

1) αf $(\alpha \in \mathbb{R})$,

2) $f \pm g$,

3) fg,

4) $\dfrac{f}{g}$, uz uvjet da je $g(a) \neq 0$.

b) Svaka racionalna funkcija dobijena od neprekidnih funkcija u tački a (iz njihovog zajedničkog domena) je također neprekidna u tački a pod uvjetom da a pripada definicionom području te racionalne funkcije.

Dokaz. Izvest ćemo dokaz za slušaj a) 1). Ostali slučajevi se dokazuju analogno.

Prema pretpostavci teorema funkcija f je neprekidna u tački a i prema Definiciji 2.1.1 postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i vrijedi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Zbog toga je (za $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x) = \alpha f(a) = (\alpha f)(a),$$

to jest i funkcija αf je neprekidna u tački a. ■

Teorem 2.2.2 ***(Neprekidnost složene funkcije)*** *Pretpostavimo da je funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački $a \in D_f$ i da je funkcija $g : D_g \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački $f(a) \in D_g$. Tada je funkcija $h = g \circ f$ neprekidna u tački a.*

Dokaz. Iz činjenice da je f neprekidna u tački $a \in D_f$, prema Definiciji 2.1.4 slijedi da vrijedi (2.3). Uvedimo sada oznake: $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i $y_0 = f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Prema istoj definiciji, zbog neprekidnosti funkcije g u tački $y_0 = f(a)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(a)) = (g\circ f)(a) = h(a). \tag{2.4}$$

Zbog toga, iz činjenice da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) \overset{(2.4)}{=} g(y_0) = h(a),$$

a što, prema Definiciji 2.1.4 znači da je funkcija $h = g\circ f$ neprekidna u tački a. ■

Teorem 2.2.3 *Ako je funkcija $f: D_f \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački $a \in D_f$, tada je u tački a neprekidna i funkcija $|f|$. Obrnuto općenito ne vrijedi.*

Dokaz. Prema Definiciji 2.1.3 imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0)\,(\forall x \in D_f)\,(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Iskoristimo poznatu činjenicu:

$$||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha - \beta| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

pa imamo

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0)\,(\forall x \in D_f)\,(|x-a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |f(a)|| \le |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

tj. $|f|$ je neprekidna u tački a.

Da obrnuta tvrdnja općenito ne vrijedi pokazuje nam sljedeći kontraprimjer. Uzmemo li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, datu na sljedeći način

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \ge 0 \\ -\left(x^2+1\right), & x < 0 \end{cases}$$

i funkciju $|f|$, $|f(x)| = x^2 + 1$, vidimo da je $|f|$ neprekidna u tački $a = 0$, dok funkcija f nije neprekidna u toj tački. ■

Teorem 2.2.4 *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $a \in I$ i funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ neprekidna u tački a. Ako je $f(a) \ne 0$, onda funkcija lokalno oko tačke c (to jest u nekoj okolini $O_\delta(a)$ tačke a) čuva predznak. Preciznije, vrijedi*

$$f(c)\left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} 0 \Longrightarrow f(x)\left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} 0 \text{ za sve } x \in O_\delta(a).$$

Dokaz. U slučaju kad je $f(a) < 0$, zbog neprekidnosti funkcije u tački a, dovoljno je uzeti $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(a)$ za koje postoji $\delta(\varepsilon, x) > 0$ takav da za svako $x \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon = -\frac{1}{2}f(a) \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}f(a) < f(x) - f(a) < -\frac{1}{2}f(a) \Longrightarrow f(a) < \frac{1}{2}f(a) < 0. \end{aligned}$$

S druge strane, u slučaju kad je $f(a) > 0$ dovoljno je uzeti $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$ i postupiti analogno kao u prethodnom slučaju. ■

2.3 Prekidne funkcije. Vrste prekida

Definicija 2.3.1 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je prekidna u tački $a \in D_f$ ako ona u toj tački nije neprekidna.*

Uvest ćemo određenu klasifikaciju vrsta i tipova prekida.

A) **Prekidi prve vrste**

A1) *Prekid prve vrste prvog tipa*

Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ ima u tački $a \in D_f$ *prekid prve vrste prvog tipa* ako postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i pri tome je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, odnosno ako postoje konačna lijeva ($L = \lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$) i konačna desna ($D = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$) granična vrijednost funkcije f u tački a tako da je $L = D \neq f(a)$. Na primjer, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

ima u tački $a = 0$ prekid prve vrste prvog tipa jer je

$$L = \lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = D = 1, \quad f(0) = 2.$$

Napomena 2.3.1 *a) Uočimo da se funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$, koja u tački $a \in D_f$ ima prekid prve vrste prvog tipa može predefinirati u funkciju g koja je neprekidna u tački $a \in D_f$ na sljedeći način*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & x = a \end{cases}.$$

b) S druge strane, funkciju koja nije definirana u tački a, a jeste u nekoj njenoj okolini i pri tome postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, možemo dodefinirati do neprekidne funkcije g u tački a. Na primjer, funkcije: $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $f_2(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ i $f_3(x) = x \sin \frac{1}{x}$ su definirane u svim tačkama, osim u tački 0 i možemo ih dodefinirati do neprekidnih funkcija u tački 0, kako slijedi

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

$$g_3(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jer je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

A2) *Prekid prve vrste drugog tipa*

Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ ima u tački $a \in D_f$ *prekid prve vrste drugog tipa* ako postoje konačna lijeva ($L = \lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$) i konačna desna ($D = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$) granična vrijednost funkcije f u tački a tako da je $L \neq D$.

Takva je, na primjer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

B) **Prekidi druge vrste**

B1) *Prekid druge vrste prvog tipa - tzv. "tačka beskonačnosti"*

Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ ima u tački $a \in D_f$ *prekid druge vrste prvog tipa* ako ne postoji konačna lijeva ($L = \lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$) ili konačna desna ($D = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$) granična vrijednost funkcije f u tački a.

Takva je, na primjer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3}, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases},$$

jer je

$$L = \lim_{x\uparrow 3} f(x) = \lim_{x\uparrow 3} \frac{x}{x-3} = \left| \begin{array}{c} s : x = 3-\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3-\varepsilon}{-\varepsilon} = -\infty,$$

i

$$D = \lim_{x\downarrow 3} f(x) = \lim_{x\downarrow 3} \frac{x}{x-3} \left| \begin{array}{c} s : x = 3-\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty.$$

B2) *Prekid druge vrste drugog tipa - tzv. "tačka oscilacije"*

Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ ima u tački $a \in D_f$ *prekid druge vrste drugog tipa* ako ona oscilira kad $x \to a$.

Takva je, na primjer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases},$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan fiksan broj.

Napomena 2.3.2 *Može se, naravno, govoriti o prekidu funkcije u nekoj tački iz njenog domena, kao i o vrstama prekida samo s jedne strane u toj tački. Ukoliko je riječ o prekidima s lijeve strane u toj tački, onda iz gore navedenih situacija izostavimo slučaj D (desnu graničnu vrijednost u promatranoj tački). Analogno postupamo i u slučaju prekida s desne strane u nekoj tački domena funkcije.*

2.4 Uniformna neprekidnost

Ako pretpostavimo da je funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ neprekidna na skupu $D \subset D_f$, to znači da je ona u proizvoljnoj tački $x_0 \in D$ neprekidna, odnosno da vrijedi

$$(\forall x_0 \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall x \in D)\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,. \quad (2.5)$$

To ustvari znači da broj δ ne zavisi samo od ε nego i od izbora tačke x_0, tj. $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Nas će sada posebno zanimati situacija kada formula (2.5) ostane da vrijedi ali tako da broj δ zavisi isključivo od ε (dakle, ne i od izbora tačke $x_0 \in D$). Drugim riječima, kad svaki $x_0 \in D$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$ ima isto $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da vrijedi (2.5).

Definicija 2.4.1 *Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$ kažemo da je uniformno (ravnomjerno) neprekidna na skupu $D \subset D_f$ ako se za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može odrediti broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, koji zavisi isključivo od ε (dakle, ne i od izbora tačke $x_0 \in D$) tako da za proizvoljne $x_1, x_2 \in D$ vrijedi*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_1, x_2 \in D)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon). \tag{2.6}$$

Logička negacija formule (2.6) je

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in D)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon) \tag{2.7}$$

i ona se može u nekim slučajevima koristiti da se pokaže kako funkcija nije uniformno neprekidna na nekom skupu. Međutim, primijetimo da se iz (2.6) može izvesti tvrdnja da *funkcija f nije uniformno neprekidna na skupu D ako i samo ako postoje dva niza $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tako da je $x_n, y_n \in D$ $(n = 1, 2, ...)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, ali $|f(x_n) - f(y_n)|$ ne teži ka 0 kad $n \to \infty$*, što se češće koristi u praksi od negacije (2.7).

Odavde se dobije i sljedeća tvrdnja (vidjeti Zadatak 2.7): *Funkcija f je uniformno neprekidna na skupu D ako i samo ako postoje nizovi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tako da je $x_n, y_n \in D$ $(n = 1, 2, ...)$ i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0. \tag{2.8}$$

Ona se češće koristi u dokazivanju uniformne neprekidnosti neke funkcije na nekom skupu nego sama Definicija 2.4.1.

Uočimo da uniformna neprekidnost funkcije na nekom skupu D implicira neprekidnost te funkcije na D, ali obrnuto ne vrijedi. Pokazuje nam to sljedeći primjer.

Primjer 2.4.1 *Funkcija $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ je neprekidna funkcija na cijelom domenu. Međutim, pokazat ćemo sada da ona nije uniformno neprekidna na $(0, +\infty)$. Oslonimo se isključivo na Definiciju 2.4.1. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabrano i neka je $x_0 \in (0, +\infty)$ također proizvoljno odabran. Neka je $\delta_1 > 0$ takav da je*

$$\frac{1}{x_0} + \varepsilon = \frac{1}{x_0 - \delta_1},$$

odnosno $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$. Uzmemo li proizvoljno $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$, imat ćemo

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Za isto ε odaberimo broj $\delta_2 > 0$ takav da je

$$\frac{1}{x_0} - \varepsilon = \frac{1}{x_0 + \delta_2},$$

odnosno $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1 - \varepsilon x_0}$. Uzmimo proizvoljno $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, pa vrijedi

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$. *Tada*

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Međutim, broj δ *ovdje ne zavisi samo od* ε, *nego i od izbora tačke* $x_0 \in (0, +\infty)$, *pa funkcija* f *nije uniformno neprekidna na* $(0, +\infty)$.

S druge strane, pokažimo da je funkcija f *uniformno neprekidna na bilo kojem zatvorenom intervalu* $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. *Naime, za* $x, x_0 \in [\alpha, \beta]$ *i proizvoljno* $\varepsilon > 0$, *vrijedi*

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} \leq \frac{1}{\alpha^2}|x - x_0| < \varepsilon,$$

uzimajući da je $\delta = \alpha^2 \varepsilon$, *koji, dakle zavisi isključivo od* ε, *pa je* f *uniformno neprekidna na* $[\alpha, \beta]$.

Naravno da se ovaj dokaz mogao izvesti i korištenjem tvrdnje vezane za (2.8), vidjeti Zadatak 2.7. ♣

Dakle, vidimo da neprekidna funkcija f iz Primjera 2.4.1 jeste i uniformno neprekidna na zatvorenom intervalu. To nije slučajno, kao što ćemo kasnije vidjeti, Teorem 2.5.1, nego vrijedi da kad god je funkcija neprekidna na zatvorenom intervalu, dakle kompaktnom skupu, ona mora biti i uniformno neprekidna na tom intervalu.

Primjer 2.4.2 *Ispitajmo uniformnu neprekidnost funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ *na* $\mathbb{R}$.

Za proizvoljno odabrane $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *imamo da vrijedi*

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= \left|\frac{1}{1+x_1^2} - \frac{1}{1+x_2^2}\right| = \frac{|(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)|}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)} \\
&= |x_1 - x_2| \left|\frac{x_1}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)} + \frac{x_2}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\right| \\
&\leq |x_1 - x_2| \left(\frac{|x_1|}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)} + \frac{|x_2|}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\right) \\
&\leq |x_1 - x_2| \left(\frac{|x_1|}{1+x_1^2} + \frac{|x_2|}{1+x_2^2}\right) \leq |x_1 - x_2| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= |x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Primijetimo da smo koristili sljedeću ekvivalenciju

$$\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0.$$

Za proizvoljno odabrano $\varepsilon > 0$ *odaberimo* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, *pa imamo*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Kako broj δ *zavisi samo od* ε, *ali ne i od izbora tačke* $x \in \mathbb{R}$, *prema Definiciji 2.4.1 funkcija* f *je uniformno neprekidna na* $\mathbb{R}$. ♣

Primjer 2.4.3 *Promatrajmo funkciju $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $x\mapsto\cos x$ i provjerimo da li je ona uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.*

Za proizvoljno odabrane $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ imamo

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\cos x_1-\cos x_2|=\left|-2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right|$$
$$=2\underbrace{\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|}_{\le\frac{|x_1-x_2|}{2}}\underbrace{\left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right|}_{\le 1}\le 2\frac{|x_1-x_2|}{2}=|x_1-x_2|\,.$$

Uzimajući za proizvoljno odabrano $\varepsilon>0$ da je $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, imamo

$$|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

S obzirom da broj δ zavisi isključivo od ε, ali ne i od izbora tačke $x\in\mathbb{R}$, funkcija f je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. ♣

Primjer 2.4.4 *(i) U Primjeru 2.1.4 pokazano je da je kvadratna funkcija neprekidna na $(-\infty,+\infty)$ i da pri tome broj δ ne zavisi samo od proizvoljno odabranog $\varepsilon>0$, nego i od izbora tačke $a\in(-\infty,+\infty)$. To znači da kvadratna funkcija nije uniformno neprekidna na $(-\infty,+\infty)$. Ipak na bilo kojem zatvorenom intervalu $[\alpha,\beta]$ ona je unifromno neprekidna. Naime, za proizvoljno $\varepsilon>0$ i proizvoljne $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ $(-\infty<\alpha<\beta<+\infty)$ vrijedi*

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|=|x_1-x_2|\,|x_1+x_2|\le 2\,|\beta|\,|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

pri čemu je dovoljno uzeti $\delta=\frac{\varepsilon}{2|\beta|}$, koje zavisi isključivo od ε, ali ne i od izbora tačaka x_1 i x_2.

(ii)Funkcija $f:(0,+\infty)\to[-1,1]$, $x\mapsto\sin\frac{1}{x}$ je neprekidna na intervalu $(0,1]$. To se može pokazati korištenjem Teorema 2.2.2, jer je f kompozicija dviju neprekidnih funkcija, $\frac{1}{x}$ i $\sin x$, na $(0,+\infty)$. Da funkcija f nije uniformno neprekidna može se dokazati uzimajući nizove

$$x_n=\frac{2}{(4n+1)\pi},\quad y_n=\frac{2}{(4n+3)\pi},\quad(n=1,2,...)\,.$$

Očito je da je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, ali je $|f(x_n)-f(y_n)|=2$ za svako $n\in\{1,2,...\}$. ♣

2.5 Osobine funkcija definiranih i neprekidnih na zatvorenom intervalu

Teorem 2.5.1 *(Cantor) Pretpostavimo da je funkcija f definirana i neprekidna na $[a,b]$. Tada je f uniformno neprekidna na $[a,b]$.*

Dokaz. Podsjetimo se definicije uniformne neprekidnosti funkcije $f:D_f\to\mathbb{R}$ na skupu $D\subseteq D_f$:

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)\,\left(\forall x',x''\in D\right)\left(\left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon\right).\tag{2.9}$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji teorema, tj. pretpostavimo da funkcija f nije uniformno neprekidna na $[a,b]$, tj. da vrijedi negacija logičke formule (2.9) za slučaj $D=[a,b]$:

$$(\exists\varepsilon>0)\,(\forall\delta=\delta(\varepsilon)>0)\left(\exists x'_\delta,x''_\delta\in[a,b]\right)\left(\left|x'_\delta-x''_\delta\right|<\delta\wedge\left|f\left(x'_\delta\right)-f\left(x''_\delta\right)\right|\ge\varepsilon.\right)\tag{2.10}$$

Za ovako odabrano $\varepsilon > 0$ formirajmo niz $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ za koji će virjediti (2.10), tj.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\forall \delta_n = \frac{1}{n}\right) (\exists a_n, b_n \in [a,b]) \left(|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \wedge \underbrace{|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon}_{(\Delta)} \right), \quad (2.11)$$

uz pretpostavku $b - a < 1$, što neće narušiti općenitost dokaza.

Na ovaj način dobili smo dva beskonačna niza, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, u potpunosti sadržana u $[a,b]$, što znači da su i ograničeni. Prema Bolzano-Weierstrasseovom (B-W) teoremu iz niza $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se može izdvojiti podniz $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ koji konvergira ka nekom broju $\alpha \in [a,b]$, a iz niza $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ se može izdvojiti podniz $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ koji konvergira ka nekom broju $\beta \in [a,b]$, tj. vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha, \quad \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \beta. \quad (2.12)$$

Dokažimo sada da je $\alpha = \beta$. Uočimo prvo da vrijedi nejednakost

$$0 \leq |b_{n_k} - \alpha| \leq |b_{n_k} - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha|. \quad (2.13)$$

Prema (2.12) vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - \alpha| = 0,$$

a iz (2.11) slijedi

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |b_{n_k} - a_{n_k}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |b_{n_k} - a_{n_k}| = 0.$$

Prema "Sendvič teoremu", iz (2.13) slijedi $\lim\limits_{k\to\infty} |b_{n_k} - \alpha| = 0$, odnosno

$$\beta = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \alpha.$$

Zbog neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$ (i činjenice da limes i funkcija f mogu zamijeniti mjesta), dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} a_{n_k}\right) = f(\alpha),$$
$$\lim_{k\to\infty} f(b_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} b_{n_k}\right) = f(\beta) = f(\alpha).$$

Oduzimanjem posljednje dvije jednakosti. imamo

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(b_{n_k}) = 0,$$

odnosno

$$\lim_{k\to\infty} [f(a_{n_k}) - f(b_{n_k})] = 0. \quad (2.14)$$

Iz (2.14) slijedi da za razmatrano $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno velik prirodni broj k takav da vrijedi

$$|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon,$$

što je u kontradikciji s (Δ) u (2.11). Dakle, ova kontradikcija nam govori da nije dobra pretpostavka da funkcija f nije uniformno neprekidna na $[a,b]$, nego da je tačna tvrdnja teorema da je f uniformno neprekidna na $[a,b]$. ■

Navedim sada još jedan dokaz Teorema 2.5.1, koristeći Heine-Borelov teorem.
Dokaz. (Drugi način dokaza Teorema 2.5.1) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran. Iz neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$ slijedi da, za svako $t \in [a,b]$, postoji $\delta_t > 0$ tako da je

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kad god je } |x - t| < 2\delta_t \text{ i } x \in [a,b]. \tag{2.15}$$

Označimo s $\mathcal{I} = \{I_t \mid I_t = (t - \delta_t, t + \delta_t), t \in [a,b]\}$ familiju otvorenih intervala koja je očito otvoreni pokrivač od $[a,b]$. Kako je interval $[a,b]$ kompaktan skup, prema Heine-Borelovom teoremu iz te familije se može izdvojiti otvoreni potpokrivač $\{I_{t_1}, I_{t_2}, ..., I_{t_{n_0}}\}$ $(t_1, t_2, ..., t_{n_0} \in [a,b])$ od $[a,b]$. Neka je sada

$$\delta = \min\{\delta_{t_1}, \delta_{t_2}, ..., \delta_{t_{n_0}}\}. \tag{2.16}$$

Neka su $x, x' \in [a,b]$ takvi da je $|x - x'| < \delta$. Tada, za neko $k \in \{1, 2, ..., n_0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(f(x) - f(t_k)) + (f(t_k) - f(x'))| \\ &\leq |f(x) - f(t_k)| + |f(t_k) - f(x')|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Kako je $\{I_{t_1}, I_{t_2}, ..., I_{t_{n_0}}\}$ pokrivač od $[a,b]$, x mora biti u jednom od ovih intervala. Pretpostavimo da je $x \in I_{t_k}$, zbog čega je

$$|x - t_k| < \delta_{t_k}. \tag{2.18}$$

Uzimajući $t = t_k$ u (2.15), dobijamo

$$|f(x) - f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.19}$$

Koristeći (2.18), vrijedi

$$|x' - t_k| = |(x' - x) + (x - t_k)| \leq |x' - x| + |x - t_k| < \delta + \delta_{t_k}.$$

Prema tome, uzimajući da je $t = t_k$ i zamjenjujući x sa x', iz (2.15) slijedi

$$|f(x') - f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

To, zajedno s (2.17) i (2.19) daje

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \text{ kad god je } |x - x'| < \delta \text{ i } x, x' \in [a,b],$$

čime smo pokazali da je funkcija f uniformno neprekidna na $[a,b]$. ■

Ovaj drugi dokaz pokazuje korisnost Heine-Borelovog teorema koji nam je dopustio (zbog izdvajanja konačnog potpokrivača od $[a,b]$) izbor δ u (2.16) kao najmanjeg broja iz konačnog skupa pozitivnih brojeva, tako da je i δ sigurno pozitivan broj. (Poznato je da se iz beskonačnog skupa pozitivnih brojeva ne može uvijek izdvojiti najmanji pozitivan broj, kao npr. u slučaju otvorenog intervala $(0,1)$.)

Teorem 2.5.2 *(Weierstrass) Pretpostavimo da je funkcija f definirana i neprekidna na $[a,b]$. Tada je f ograničena na $[a,b]$.*
(Simbolički: $f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{B}([a,b])$.)

Dokaz. Dokažimo prvo ograničenost funkcije f odozgo. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, tj. da funkcija f nije ograničena odozgo. To znači da vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, (\exists a_n \in [a,b])\ \ f(a_n) \geq n. \tag{2.20}$$

Na ovaj način dobili smo niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ koji je u potpunosti sadržan u intervalu $[a,b]$, tj. ograničen je, pa prema B-W teoremu postoji barem jedna tačka gomilanja α tog niza. Drugim riječima, iz niza $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ može se izdvojiti podniz $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ koji konvergira ka α, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. Uočimo da je $\alpha \in [a,b]$ jer iz $a \leq a_{n_k} \leq b$ slijedi $a \leq \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha \leq b$. No, kako je prema (2.20)

$$f(a_{n_k}) \geq n_k \quad (k \in \mathbb{N}),$$

to je

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) \geq \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty.$$

Zbog neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$ vrijedi

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{k\to\infty} a_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = +\infty. \tag{2.21}$$

Budući da je $\alpha \in [a,b]$ i f definirana i neprekidna na $[a,b]$, to funkcija f u svakoj tački iz $[a,b]$ uzima konačnu vrijednost, pa i u tački α, što je kontradikcija sa (2.21). Time smo dokazali da je funkcija f ograničena odozgo na $[a,b]$.

Naravno, može se analogno dokazati da je funkcija f ograničena i odozdo na intervalu $[a,b]$, ali može i na sljedeći način. Formirajmo funkciju φ kao

$$\varphi(x) = -f(x) \quad \text{za sve } x \in [a,b].$$

Očigledno je i funkcija φ definirana i neprekidna na zatvorenom intevalu $[a,b]$, pa je prema već dokazanom ona i ograničena odozgo na $[a,b]$. To znači da postoji neka konstanta $K > 0$ takva da je

$$\varphi(x) \leq K \quad \text{za sve } x \in [a,b],$$

odnosno

$$-f(x) \leq K \quad \text{za sve } x \in [a,b],$$

tj.

$$f(x) \geq -K \quad \text{za sve } x \in [a,b],$$

što znači da je funkcija f ograničena odozdo na $[a,b]$. ■

Navest ćemo još jedan dokaz Teorema 2.5.2, koji se oslanja na "epsilon-delta tehniku".

Dokaz. (Drugi način dokaza Teorema 2.5.2) Pretpostavimo da je $t \in [a,b]$. Kako je funkcija f neprekidna u t, postoji otvoren interval I_t $(t \in I_t)$ tako da vrijedi

$$|f(x) - f(t)| < 1, \quad \text{čim je } x \in I_t \cap [a,b], \tag{2.22}$$

što slijedi iz Definicije 2.1.3 uzimajući $\varepsilon = 1$ u (2.2). Uočimo da je familija intervala $\mathcal{I} = \{I_t \mid t \in [a,b]\}$ otvoreni pokrivač segmenta $[a,b]$. Budući da je $[a,b]$ kompaktan skup, prema Heine-Borelovom teoremu, iz $\mathcal{I}$ se može izdvojiti konačni potpokrivač $\left\{I_{t_1}, I_{t_2}, ..., I_{t_{n_0}}\right\}$ segmenta $[a,b]$. Prema (2.22), uzimajući $t = t_i$, $i \in \{1,2,...,n_0\}$, imamo

$$|f(x) - f(t_i)| < 1, \quad \text{čim je } x \in I_{t_i} \cap [a,b],\ i \in \{1,2,...,n_0\}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x) - f(t_i) + f(t_i)| \leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i)| \\ &\leq 1 + |f(t_i)|, \quad \text{čim je } x \in I_{t_i} \cap [a,b], \ i \in \{1,2,...,n_0\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Neka je

$$K = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} |f(t_i)|.$$

Pošto je $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} (I_{t_i} \cap [a,b])$, iz (2.23) slijedi da je $|f(x)| \leq K$ za bilo koje $x \in [a,b]$, to jest $f \in \mathcal{B}([a,b])$. ■

Prethodni dokaz nam daje još jednu ilustraciju korisnosti Heine-Borelovog teorema, koji nam omogućava (zbog izdvajanja konačnog potpokrivača od $[a,b]$) da izaberemo K kao najveći broj iz *konačnog skupa* brojeva. Također, Teorem 2.5.2 implicira sljedeću važnu činjenicu.

Posljedica 2.5.1 *Ako je funkcija f naprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, onda f ima infimum i supremum na $[a,b]$.*

Sljedeći teorem pokazuje da neprekidna funkcija f na zatvorenom intervalu $[a,b]$ uzima infimum i supremum u nekim određenim tačkama u $[a,b]$ i to kao minimalnu i maksimalnu vrijednost, respektivno.

Teorem 2.5.3 *Ako je funkcija f definirana i neprekidna na $[a,b]$, tada ona uzima svoju maksimalnu vrijednost u barem jednoj tački iz $[a,b]$ i uzima svoju minimalnu vrijednost u barem jednoj tački iz $[a,b]$.*

Dokaz. Izvedimo dokaz prvo za slučaj maksimalne vrijednosti.

Prema Posljedici 2.5.1 postoji

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Dokažimo da je M maksimum funkcije na $[a,b]$. U tu svrhu, pretpostavimo suprotno, tj. da je $f(x) < M$ za sve $x \in [a,b]$, odnsono da je $M - f(x) > 0$ za sve $x \in [a,b]$. Zbog toga je funkcija $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ definirana i neprekidna na $[a,b]$, pa je prema Teoremu 2.5.2 i ograničena na $[a,b]$, tj. postoji broj $C > 0$ dovoljno velik takav da je

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} < C \quad \text{za svaki } x \in [a,b]. \tag{2.24}$$

Po definiciji supremuma, za $\varepsilon = \frac{1}{C}$ postoji neko $x_C \in [a,b]$ tako da vrijedi $M - \varepsilon < f(x_C)$, tj. $M - f(x_C) < \varepsilon = \frac{1}{C}$, odnosno

$$\frac{1}{M - f(x_C)} > C. \tag{2.25}$$

Relacija (2.24) vrijedi za sve $x \in [a,b]$, pa i za $x_C \in [a,b]$, tj.

$$\frac{1}{M - f(x_C)} < C,$$

a to je u kontradikciji sa (2.25). Ova kontradikcija nas dovodi do zaključka da funkcija f dostiže maksimalnu vrijednost M u nekoj tački iz $[a,b]$.

Analogno se može pokazati da funkcija f dostiže svoju minimalnu vrijednost u nekoj tački iz intervala $[a,b]$. Međutim, može i na sljedeći način. Formirajmo funkciju

$$\phi(x) = -f(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Pošto je i funkcija ϕ definirana i neprekidna funkcija na $[a,b]$, prema već dokazanom ona dostiže svoju maksimalnu vrijednost M u nekoj tački intervala $[a,b]$, tj. vrijedi

$$\phi(x) \leq M \ \text{ za sve } x \in [a,b],$$

odnosno

$$-f(x) \leq M \ \text{ za sve } x \in [a,b].$$

Iz tog slijedi

$$f(x) \geq -M \ \text{ za sve } x \in [a,b].$$

■

Dokaz prethodnog teorema se mogao, također, izvesti primjenom Heine-Borelovog teorema (Zadatak **??**).

Sljedeći teorem ima veliki značaj u rješavanju problema egzistencije nula neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu.

Teorem 2.5.4 *Pretpostavimo da je funkcija f definirana i neprekidna na $[a,b]$ i da na krajevima intervala $[a,b]$ uzima vrijednosti suprotnih znaka. Tada postoji barem jedna tačka $c \in (a,b)$ koja je nula funkcije f, to jest da vrijedi $f(c) = 0$.*

(Simbolički:$(f \in \mathcal{C}([a,b]) \wedge f(a)f(b) < 0) \Rightarrow ((\exists c \in (a,b)) \ f(c) = 0)$.)

Dokaz. Moguća su dva slučaja: 1) $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$ i 2) $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$. Razmatrajmo prvo slučaj 1). Formirajmo niz zatvorenih intervala $J_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \{0,1,2,...\})$ na sljedeći način. Neka je $J_0 = [a_0, b_0] = [a,b]$ i neka je tačka ζ sredina intervala J_0, tj. $\zeta = \frac{a_0+b_0}{2}$. Ako je $f(\zeta) = 0$, dokaz je završen: $c = \zeta$. Ako to nije slučaj, onda za interval $J_1 = [a_1, b_1]$ uzmimo onaj od intervala $[a_0, \zeta]$ ili $[\zeta, b_0]$ u kojem se dešava slučaj 1), tj. gdje je funkcija negativna u lijevom kraju i pozitivna u desnom kraju tog intervala. Zatim ponovimo isti metod i za interval J_1 kao i na interval J_0, tj. poloveći ga. Ukoliko je vrijednost funkcije u tački polovljena jednak nuli, dokaz je završen. Ukoliko to nije slučaj, od dvije polovine intervala J_1 dobijamo novi interval $J_2 = [a_2, b_2]$ za koji vrijedi $f(a_2) < 0$ i $f(b_2) > 0$. Nastavljajući ovaj postupak u nedogled, dobit ćemo ili direktno tačku c kao sredinu nekog intervala ili ćemo dobiti beskonačni niz zatvorenih intervala $J_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \{0,1,2,...\})$ takvih da je

$$J_n \supset J_{n+1} \text{ i } d_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} \quad (n \in \{0,1,2,...\}),$$

gdje je d_n dužina intervala J_n $(n \in \{0,1,2,...\})$ i očito $d_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Na ovaj način smo dobili tzv. gnijezdo zatvorenih intervala pa možemo primijeniti teorem o gnijezdu prema kojem postoji tačno jedna tačka c sadržana u svim tim intervalima, tj. $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$. Očito je niz $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotono rastući, dok je niz $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotono opadajući. Oba su sadržana u intervalu $[a,b]$, tj. ograničena su, pa su i konvergentni i očito je da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c. \tag{2.26}$$

Prema konstrukciji niza J_n imamo da je

$$f(a_n) < 0 \text{ i } f(b_n) > 0 \quad (n \in \{0,1,2,...\}). \tag{2.27}$$

Budući da je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, to vrijedi

$$f(c) \overset{(2.26)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \overset{f \text{ neprekidna}}{=} \lim_{n\to\infty} f(a_n) \overset{(2.27)}{\leq} 0, \tag{2.28}$$

$$f(c) \overset{(2.26)}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \overset{f \text{ neprekidna}}{=} \lim_{n\to\infty} f(b_n) \overset{(2.27)}{\geq} 0. \tag{2.29}$$

Iz (2.28) i (2.29) slijedi da je $f(c) = 0$, što je i trebalo dokazati.

Slučaj 2) se dokazuje analogno, ali može i na sljedeći način. Formirajmo funkciju

$$\varphi(x) = -f(x) \quad (x \in [a,b]),$$

pri čemu funkcija f zadovoljava slučaj 2). Tada je $\varphi(a) = -f(a) < 0$ i $\varphi(b) = -f(b) > 0$. Kako je funkcija φ neprekidna na $[a,b]$, prema već dokazanom dijelu teorema slijedi da postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $\varphi(c) = 0$, što znači da je i $f(c) = 0$. ■

Napomena 2.5.1 *Primijetimo da prethodni teorem ne govori o broju tačaka $c \in (a,b)$ u kojima može biti $f(c) = 0$. Očigledno je samo da ih mora biti neparan broj.*

Napomena 2.5.2 *Metod polovljenja intervala koji smo koristili u prethodnom slučaju je veoma koristan i značajan metod, te se često koristi u matematici. Posebno se koristi u numeričkoj matematici pri lokalizaciji rješenja neke jednadžbe. Na primjer, ako treba lokalizirati rješenje jednadžbe $x^3 - x - 1 = 0$, dovoljno je primijeniti metod polovljenja intervala i prethodni teorem na funkciju $f(x) = x^3 - x - 1$, koja je očito neprekidna na intervalu $[0,2]$ i za koju je $f(0) = -1 < 0$ i $f(2) = 5 > 0$. To znači da barem jedno rješenje date jednadžbe leži u intervalu $(0,2)$. Želimo li preciznije odrediti položaj tog rješenja, raspolovimo interval $J_0 = [0,2]$ i promatrajmo intervale $[0,1]$ i $[1,2]$. Kako je $f(1) = -1 < 0$, to možemo uzeti za $J_1 = [1,2]$. tj. zaključiti da se rješenje date jednadžbe nalazi u tom intervalu. Poloveći interval J_1, zbog $f(1.5) = 0.875$ dobijamo da se traženo rješenje sigurno nalazi u intervalu $J_2 = [1, 1.5]$. Još precizniji rezultat je da se rješenje nalazi u intervalu $J_3 = [1.25, 1.5]$ jer je $f(1.25) < 0$. Ovaj postupak možemo nastaviti sve dok ne dođemo intervala čija nam preciznost odgovara.*

Teorem 2.5.4 može se primijeniti uspješno i pri dokazivanju sljedećeg važnog rezultata o realnim nulama polinoma neparnog stepena.

Tvrdnja 2.5.1 *Polinom neparnog stepena ima barem jednu realnu nulu.*

Dokaz. Polinom neparnog stepena k možemo napisati u obliku

$$P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdje je $a_k \neq 0$. Dijeljenjem $f(x)$ s a_k dobije se tzv. monični polinom

$$Q_k(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0,$$

pri čemu je $b_j = \frac{a_j}{a_k}$, $j \in \{0,1,...,k-1\}$. Pokažimo da je $Q_k(n) > 0$ za neko veliko $n \in \mathbb{N}$. Prvo uporedimo stepen x^k najvišeg reda s preostalim dijelom polinoma. Očito je da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{k-1}n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0}{n^k} = 0.$$

Iz toga slijedi da postoji prirodni broj N takav da je

$$\left|\frac{b_{k-1}N^{k-1}+...+b_1N+b_0}{N^k}\right|<1,$$

odakle se dobije

$$-\left(b_{k-1}N^{k-1}+...+b_1N+b_0\right)<N^k,$$

to jest $Q_k(N)>0$.

Promatrajmo sada $Q_k(-n)$ za neko veliko $n\in\mathbb{N}$. Analogno prethodnom slučaju pokazuje se da postoji prirodni broj M takav da je

$$b_{k-1}(-M)^{k-1}+...+b_1(-M)+b_0<-M^k=(-M)^k,$$

odakle je $Q_k(-M)<0$.

Prema Teoremu 2.5.4 popstoji neko $c\in(-M,N)$ takav da je $Q_k(c)=0$. Međutim, kako je $Q_k(c)=\frac{P_k(c)}{a^k}$, slijedi da je $P_k(c)=0$. ■

Sljedeći teorem je poznat kao *Cauchy-Bolzanov teorem o međuvrijednosti.*

Teorem 2.5.5 ***(Teorem o međuvrijednosti**, Cauchy-Bolzano) Pretpostavimo da je funkcija f definirana i ne-prekidna na $[a,b]$, te da je $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ i $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. Osim toga, neka su $c,d\in[a,b]$ takvi da je $f(c)=m$ i $f(d)=M$. Tada za proizvoljnu tačku $\beta\in(m,M)$ postoji barem jedna tačka $\alpha\in[a,b]$ koja se nalazi između c i d (tj. $\alpha\in(\min\{c,d\},\max\{c,d\})$) tako da vrijedi $f(\alpha)=\beta$.*

Dokaz. Formirajmo funkciju φ na sljedeći način: $\varphi(x)=f(x)-\beta$. Odavde vidimo da je funkcija φ neprekidna funkcija na $[a,b]$ kao razlika neprekidne funkcije f i konstante β koja je također neprekidna funkcija na $[a,b]$(v. Teorem 2.2.1). Samim tim je φ neprekidna funkcija i na zatvorenom intervalu čije su krajnje tačke c i d, tj. na intervalu $[\min\{c,d\},\max\{c,d\}]$ i na krajevima tog intervala uzima vrijednosti suprotnog znaka, jer je

$$\varphi(c)=f(c)-\beta=m-\beta<0 \text{ i } \varphi(d)=f(d)-\beta=M-\beta>0.$$

Prema Teoremu 2.5.4 postoji barem jedna tačka α između c i d tako da je $\varphi(\alpha)=f(\alpha)-\beta=0$, odakle je $f(\alpha)=\beta$. ■

Posljedica 2.5.2 *Pretpostavimo da je funkcija f definirana i neprekidna na $[a,b]$ i da je $f(a)\neq f(b)$. Tada za proizvoljno odabranu tačku β između $f(a)$ i $f(b)$, tj. $\beta\in(\min\{f(a),f(b)\},\max\{f(a),f(b)\})$, postoji barem jedna tačka $\alpha\in(a,b)$ tako da je $f(\alpha)=\beta$.*

Dokaz. Bez ograničenja općenitosti pretpostavimo da je $f(a)<f(b)$, Tada je za $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ i $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$:

$$m\le f(a)<f(b)\le M.$$

Prema Teoremu 2.5.5 funkcija f uzima bilo koju vrijednost β između m i M u barem jednoj tački $\alpha\in(a,b)$, a tim prije će to biti zadovoljeno ako je β između $f(a)$ i $f(b)$. ■

2.6 Monotonost i neprekidnost

U ovoj sekciji koristit ćemo oznaku

$$\mathcal{W} = [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}],$$

gdje je f funkcija definirana na $[a, b]$.

Teorem 2.6.1 *Pretpostavimo da je funkcija f definirana, neprekidna i strogo monotona na $[a, b]$. Tada za proizvoljnu vrijednost $\beta \in \mathcal{W}$ postoji tačno jedna tačka $\alpha \in [a, b]$ takva da je $f(\alpha) = \beta$.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti u slučaju kada je f strogo monotono rastuća funkcija na $[a, b]$ (analogno se dokazuje slučaj kad je f strogo monotono opadajuća funkcija na $[a, b]$). Tada je $f(a) < f(b)$. Neka je dato neko $\beta \in [f(a), f(b)]$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji teorema, tj. pretpostavimo da postoje $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$ i $\alpha_1 \neq \alpha_2$ takvi da vrijedi $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \beta$. Koristeći činjenicu da je f strogo monotono rastuća funkcija na $[a, b]$, moguća su dva slučaja:

$$\begin{aligned} &i)\ \ \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow f(\alpha_1) < f(\alpha_2), \\ &ii)\ \alpha_1 > \alpha_2 \Longrightarrow f(\alpha_1) > f(\alpha_2), \end{aligned}$$

to jest, za $\alpha_1 \neq \alpha_2$ mora biti $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \beta$. Dakle, vrijedi tvrdnja teorema. ■

Vrijedi i obrat prethodnog teorema u sljedećem smislu.

Teorem 2.6.2 *Pretpostavimo da je f definirana i strogo monotona na $[a, b]$, i neka za proizvoljnu vrijednost $\beta \in \mathcal{W}$ postoji tačno jedna tačka $\alpha \in [a, b]$ takva da je $f(\alpha) = \beta$. Tada je f neprekidna na $[a, b]$.*

Dokaz. Razmatrajmo slučaj kada je f strogo monotono rastuća funkcija na $[a, b]$ (analogno se dokazuje u slučaju kad je strogo monotono opadajuća na $[a, b]$). Pretpostavimo suprotno tvrdnji teorema, to jest da f nije neprekidna na $[a, b]$. Preciznije, pretpostavimo da u nekoj tački $c \in [a, b]$ vrijedi

$$L = \lim_{x \uparrow c} f(x) \neq \lim_{x \downarrow c} f(x) = D.$$

Zbog činjenice da je f strogo monotono rastuća na $[a, b]$, slijedi da je $L \leq f(c)$, pa pretpostavimo da je $L < f(c)$ (slučaj $L = f(c)$ ostavljamo za vježbu). Neka je β takvo da je $L < \beta < f(c)$. Tada očito vrijedi

$$\begin{aligned} x' < c &\Longrightarrow f(x') < L < \beta, \\ x'' > c &\Longrightarrow f(x'') > f(c) > \beta, \end{aligned}$$

to jest vrijednost β funkcija f ne može uzeti ni u jednoj tački iz $[a, b]$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. Iz ove kontradikcije slijedi da je funkcija f neprekidna na $[a, b]$. ■

Napomena 2.6.1 *Tvrdnje teorema se mogu na određeni način objediniti u jednu tvrdnju:*

Ako je f monotona i nekonstantna na $[a, b]$, tada je f neprekidna na $[a, b]$ ako i samo ako je njeno područje vrijednosti $R_f = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ zatvoreni interval s krajnjim tačkama $f(a)$ i $f(b)$.

Teoremi 2.6.1 i 2.6.2 impliciraju sljedeći važan teorem (koji ima značajnu primjenu u matematici).

Teorem 2.6.3 *Pretpostavimo da je funkcija f definirana, neprekidna i strogo monotona na $[a,b]$. Tada je f bijekcija sa $[a,b]$ na $\mathcal{W}$, a funkcija $f^{-1}:\mathcal{W}\to[a,b]$ je neprekidna na $\mathcal{W}$ i također strogo monotona i iste prirode monotonosti kao i funkcija f.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti za slučaj kad je f strogo monotono rastuća funkcija na $[a,b]$ (analogno se dokazuje u slučaju kad je f strogo monotono opadajuća na $[a,b]$). Tada je $f(a)<f(b)$. Da je f surjekcija sa $[a,b]$ na $[f(a),f(b)]$ slijedi direktno iz Teorema 2.6.1. Da je f injekcija sa $[a,b]$ na $[f(a),f(b)]$ slijedi iz dokaza Teorema 2.6.1. Dakle, f je bijekcija sa $[f(a),f(b)]$ na $[a,b]$, pa postoji njoj inverzna funkcija $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$.
Neka su $y_1,y_2\in[f(a),f(b)]$ proizvoljno odabrani takvi da je $y_1<y_2$. Kako je f bijekcija, to postoje $x_1,x_2\in[a.b]$ takvi da je

$$f(x_1)=y_1 \ \text{ i } \ f(x_2)=y_2,$$

odnosno $x_1=f^{-1}(y_1)$ i $x_2=f^{-1}(y_2)$. Zbog toga imamo

$$y_1<y_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2) \overset{f \text{ str. mon. raste}}{\Longrightarrow} x_1<x_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2),$$

što znači da je funkcija f^{-1} strogo monotono rastuća kao i funkcija f. Da vrijedi $f^{-1}\in\mathcal{C}([f(a),f(b)])$ slijedi iz Teorema 2.6.2 jer funkcija f^{-1} zadovoljava pretpostavke tog teorema (naime, već je dokazano da je f^{-1} strogo monotono rastuća i još je i bijekcija). ■

Zanimljiva je situacija s prekidima kod monotone funkcije, što pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 2.6.4 *Neka je $I\subseteq R$ otvoren interval i $f:I\to R$ monotona funkcija na intervalu I. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) Funkcija f može imati isključivo prekide prve vrste.

b) Funkcija f može imati najviše prebrojivo mnogo prekida.

Dokaz. a) Od ranije je poznato da monotona funkcija ima u svakoj tački svog domena lijevu i desnu graničnu vrijednost (v. granična vrijednost funkcije jedne varijable). Ako f ima u nekoj tački a prekid, onda je zbog egzistencije graničnih vrijednosti $f(a-)$ i $f(a+)$ taj prekid ustvari prekid prve vrste.

b) Bez umanjenja općenitosti, pretpostavimo da je f monotono rastuća funkcija na I i neka je P skup svih tačaka prekida te funkcije na P (u slučaju monotonog opadanja funkcije f dokaz se izvodi analogno). Za svaku tačku $a\in P$ imamo $f(a-)<f(a+)$. Zbog toga toj tački možemo pridružiti otvoreni interval $I_a=(f(a-),f(a+))$. Ako su a i b dvije različite tačke iz skupa P, tada je $I_a\cap I_b=\emptyset$. Zaista, u slučaju kad je $a<b$, zbog činjenice $f(a+)=\inf\{f(x)\mid x\in I, a<x\}$ imamo da je $f(a+)\le f(a+\frac{b-a}{2})=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Slično, zbog $f(b-)=\sup\{f(x)\mid x\in I, x<b\}$ slijedi da je $f(b-)\ge f(b-\frac{b-a}{2})=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge f(a+)$. Dakle, $I_a\cap I_b=\emptyset$, jer su intervali otvoreni. Uzmimo sada za svako $a\in P$ neko $p_a\in I_a\cap\mathbb{Q}$. Na taj način dobili smo injekciju $a\mapsto p_a$ sa skupa P u skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Prema tome, skup P ima manji ili jednak kardinalni broj od skupa $\mathbb{Q}$, što znači da je skup P najviše prebrojiv skup. ■

2.7 Neprekidnost u Lipschitzovom smislu

Funkcije koje zadovoljavaju Lipschitzov uvjet igraju važnu ulogu u matematičkoj analizi te ćemo se ukratko upoznatis tim pojmom ovdje.

Definicija 2.7.1 *Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da zadovoljava* ***Lipschitzov uvjet*** *ili da je* ***Lipschitz***[2] ***neprekidna*** *na A, ako postoji konstanta $L > 0$ takva da vrijedi*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{2.30}$$

za sve x i y iz A.

Primjer 2.7.1 *a) Funkcije $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$ i $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$ su Lipschitz neprekidne finkcije na $\mathbb{R}$. Naime, za sve x i y iz $\mathbb{R}$ vrijedi*

$$|\sin x - \sin y| = 2\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\leq \frac{|x-y|}{2}}\underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq |x - y|$$

i

$$|\cos x - \cos sy| = 2\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\leq \frac{|x-y|}{2}}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq |x - y|.$$

U oba slučaja je konstanta $L = 1$.

b) Funkcija $f : [1, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ je Lipschitz neprekidna na $[1, +\infty)$. Zaista, za sve $x, y \in [1, +\infty)$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{1+1} = \frac{1}{2}|x - y|,$$

gdje je $L = \frac{1}{2}$. ♣

Važno nam je ustanoviti vezu između Lipschitz neprekidnosti i neprekidnosti u uobičajenom smislu. Učinit ćemo to preko odgovarajuće veze s uniformnom neprekidnošću.

Tvrdnja 2.7.1 *Lipschitz neprekidna funkcija je uniformno neprekidna.*

Dokaz. Dokaz u ovom slučaju je vrlo jednostavan. Naime, neka je $f : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidna funkcija na skupu A. To znači da postoji konstanta L takva da vrijedi $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ za sve $x, y \in A$. Za proizvoljno odabrano $\varepsilon > 0$ uzmimo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ tako da za sve x i y iz A vrijedi $|x - y| < \delta$. Tada vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

što znači da je f uniformno neprekidna na A. ■

Kako je unformno neprekidna funkcija ujedno i neprekidna, zaključujemo da je svaka Lipschitz neprekidna funkcija ujedno i neprekidna funkcija. Međutim, obrnuta tvrdnja ne vrijedi, to jest funkcija može biti uniformno neprekidna (pa, dakle, i neprekidna) na nekom skupu, a da pri tome nije Lipschitz neprekidna na tom skupu. Pokazuje nam to sljedeći kontraprimjer.

[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), njemački matematičar

Primjer 2.7.2 *Funkcija* $f : [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ *je uniformno neprekidna na* $[0, +\infty)$. *Naime, za proizvoljno* $\varepsilon > 0$ *neka je* $\delta = \varepsilon^2$, *tako da za proizvoljno odabrane* $x, y \in [0, +\infty)$ *vrijedi* $|x - y| < \delta$. *Tada je*

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2} \leq \sqrt{\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|} = \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Kako δ *zavisi isključivo od* ε *(a ne i od izbora tačaka* x *i* y*), prema Definiciji 2.4.1 funkcija* f *je uniformno neprekidna na* $[0, +\infty)$ *(vidjeti i Zadatak 2.7 b)). S druge strane, funkcija* f *nije Lipschitz neprekidna na* $[0, +\infty)$. *Ustanovimo zbog čega. Pretpostavimo da postoji neka konstanta* L *tako da vrijedi*

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x}\right| \leq L\,|x - y|$$

za sve x *i* y *iz* $[0, +\infty)$. *Uzmemo li da je* $y = 0$, *dobije se nejednakost* $\sqrt{x} \leq Lx$. *Ako je* $L > 0$, *tada za* $x > 0$ *dobijemo* $\frac{1}{L} \leq \sqrt{x}$, *što je nemoguće da vrijedi za sve* $x \geq 0$. *Dakle, takva konstanta* L *ne može postojati pa* f *nije Lipschitz neprekidna.* ♣

Također je zanimljiva geometrijska interpretacija Lipschitz neprekidnosti. Ako je f Lipschitz neprekidna na svom domenu s konstantom L, tada iz nejednakosti (2.30), za $x \neq y$, slijedi

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq L.$$

Uočimo da količnik $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ predstavlja nagib sjekante grafa funkcije f između tačaka $P(x, f(x))$ i $Q(y, f(y))$. Prema tome, f je Lipschitz neprekidna ako i samo ako svaka linija koja siječe graf od f u najmanje dvije različite tačke ima nagib manji ili jednak konstanti L. Vidjeti Sliku ??

SLIKA

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti za koje vrijednosti realnih parametara a i b su neprekidne na $\mathbb{R}$ sljedeće funkcije:

a) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1; \\ x^2 + x + 1, & x \geq 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < -1; \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 1; \\ -ax + 2b, & x > 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + a\sin x, & x \in [2n\pi, (2n+1)\pi], \quad n \in \mathbb{Z}; \\ bx, & x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

2. Nacrtati grafik i ispitati neprekidnost svake od sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (x-1)^{2n}}, \quad x \geq 0.$

3. Date su sljedeće funkcije neprekidne na $(0,1)$:

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; c) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$;

d) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$; e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Koje od navedenih funkcija su i uniformno neprekidne na $(0,1)$?

4. Date su sljedeće funkcije neprekidne na $[0,+\infty)$:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = x\sin x$;

d) $f(x) = \sin^2 x$; e) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$; f) $f(x) = e^x$;

g) $f(x) = e^{-x}$; h) $f(x) = \sin(\sin x)$; i) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Koje od navedenih funkcija su i uniformno neprekidne na $[0,+\infty)$, a koje na $[0,r]$ za $r > 0$?

5. Funkcije f i g su uniformno neprekidne na

(i) segmentu $[a,b]$,

(ii) poluosi $[a,+\infty)$.

Da li su i funkcije:

a) cf, $c \in \mathbb{R}$; b) $f+g$; c) fg; d) $x \mapsto f(x)\sin x$

uniformno neprekidne na (i) $[a,b]$? (ii) $[a,+\infty)$?

6. Dokazati da je funkcija f uniformno neprekidna na skupu A ako i samo ako za sve nizove $\{x_n \in A, n \in \mathbb{N}\}$ i $\{y_n \in A, n \in \mathbb{N}\}$ takve da $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ vrijedi relacija $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

7. Koristeći tvrdnju iz prethodnog zadatka, dokazati da funkcija $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ nije uniformno neprekidna na cijelom domenu.

8. Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}\log x$ na intervalu $(0,1)$.

9. Dokazati tvrdnju: Ako je funkcija f uniformno neprekidna na konačnom intervalu (a,b), tada postoje granične vrijednosti $L_1 = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$ i $L_2 = \lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$. Primjerom pokazati da ista tvrdnja ne vrijedi u slučaju beskonačnog intervala.

10. Neka je $f : [0,1] \to [0,1]$ i $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Dokazati da postoji barem jedna tačka $c \in [0,1]$ takva da je $f(c) = c$.

11. Neka su $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, pri čemu je $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Dokazati da postoji barem jedno $x \in (a,b)$ takvo da je $f(x) = g(x)$.

12. Dokazati da jednadžba

$$(1-x)\cos x = \sin x$$

ima rješenje koje leži između 0 i 1.

13. Neka je $f \in \mathcal{C}([0,2])$ i $f(0) = 2$. Dokazati da postoje $x, y \in [0,2]$ tako da vrijedi

$$y - x = 1, \quad f(x) = f(y) \quad \textbf{(teorem o sjekanti).}$$

Dati geometrijsku interpretaciju.

14. Neka je $f \in \mathcal{C}([0,2])$. Dokazati da postoje $x, y \in [0,2]$ tako da vrijedi

$$y - x = 1, \quad f(y) - f(x) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

Dati geometrijsku interpretaciju.

15. Navesti primjer funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da funkcija h definirana s $h(x) := f(x) + g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ bude neprekidna, a da f i g nisu neprekidne. Mogu li se naći f i g koji su u svim tačkama prekidne, ali da je h neprekidna u svim tačkama?

16. Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $f(r) = g(r)$ za sve racionalne brojeve r. Pokazati da je $f(x) = g(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

17. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ takva da je $g(0) = 0$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi $|f(x) - f(y)| \leq g(x - y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Pokazati da je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.

18. Pretpostavimo da je $A \subset \mathbb{R}$ i da su $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : A \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije na A. Definirajmo $h : A \to \mathbb{R}$ sa $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ i $k : A \to \mathbb{R}$ sa $k(x) := \min\{f(x), g(x)\}$. Dokazati da su funkcije h i k neprekidne na A.

19. Data je neprekidna funkcija $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(-1) = f(1)$. Dokazati da na zatvorenom intervalu $[-1,1]$ postoje tačke α i β tako da je $|\alpha - \beta| = 1$ i $f(\alpha) = f(\beta)$.

20. Dokazati ekvivalentnost definicija neprekidnosti funkcije: Definicije 2.1.1, Definicije 2.1.2, Definicije 2.1.3 i Definicije 2.1.4.

21. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna funkcija na A i neka je niz $\{x_n\}$ Cauchyjev. Tada je $\{f(x_n)\}$ također Cauchyjev niz. Dokazati.

22. Pretpostavimo da za funkciju $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vrijedi $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ za sve x i y iz $[0,1]$, kao i $f(0) = f(1) = 0$. Pokazati da je $|f(x)| \leq \frac{L}{2}$ za sve $x \in [0,1]$. Osim toga, primjerom pokazati da je $\frac{L}{2}$ najbolja moguća procjena, to jest da postoji takva nepre4kidna funkcija za koju je $|f(x)| \leq \frac{L}{2}$ za neko $x \in [0,1]$.

23. Pretpostavimo da je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za svako $\varsigma \in [a,b]$ postoje konstanta $L_\varsigma > 0$ i $\varepsilon_\varsigma > 0$ za koje je $|f(x) - f(y)| \leq L_\varsigma |x - y|$ za sve x i y iz $(\varsigma - \varepsilon_\varsigma, \varsigma + \varepsilon_\varsigma) \cap [a,b]$. Drugim riječima, f je *"lokalno Lipschitz neprekidna"*.

a) Dokazati da postoji jedno $L > 0$ takvo da je $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ za sve x i y iz $[a,b]$.

b) Naći kontraprimjer za gornju tvrdnju ako je interval otvoren, to jest naći $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ koja je lokalno Lipschitz neprekidna, ali nije Lipschitz neprekidna.

Poglavlje 3

Diferencijabilnost

3.1 Pojam diferencijabilnosti

Definicija 3.1.1 *Neka je funkcija f definirana na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $h = \Delta x$ tako da je $x_0 + \Delta x \in I$. Ako postoji konačna granična vrijednost*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{3.1}$$

odnosno

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{3.2}$$

*tada kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u tački x_0, a graničnu vrijednost (3.1) (odnosno(3.2)) nazivamo **izvodom** ili **derivacijom funkcije** f u tački x_0.*

Izvod funkcije f u tački x_0 označavat ćemo s $f'(x_0)$ ili $\frac{df}{dx}(x_0)$.
Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački intervala (a, b), tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b) i označavamo to simbolički s $f \in \mathcal{D}((a, b))$ (drugim riječima, oznaka $\mathcal{D}((a, b))$ predstavlja klasu funkcija diferencijabilnih na intervalu (a, b)).

Primjer 3.1.1 *Ispitati diferencijabilnost funkcije $y = \sqrt{5x}$ u tački $x_0 = 1$ i eventualno izračunati $y'(1)$.*

Rješenje. Prvo nađimo graničnu vrijednost oblika (3.2):

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(1+h)} - \sqrt{5}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(1+h)} - \sqrt{5}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5(1+h)} + \sqrt{5}}{\sqrt{5(1+h)} + \sqrt{5}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{5(1+h) - 5}{h\left(\sqrt{5(1+h)} + \sqrt{5}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{5(1+h)} + \sqrt{5}} \\
&= \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Pošto ta granična vrijednost postoji i konačna je, zaključujemo da je funkcija y diferencijabilna u tački $x_0 = 1$ i da je $y'(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. ♣

Primjer 3.1.2 *Ispitati diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$, u proizvoljnoj tački $x \in \mathbb{R}$.*

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+h)^4}+\sqrt[3]{(x+h)^2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(x+h)^4}+\sqrt[3]{(x+h)^2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^4}+\sqrt[3]{(x+h)^2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^4}+\sqrt[3]{(x+h)^2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},
\end{aligned}$$

zaključujemo da ta granična vrijednost postoji i konačna je u svim tačkama $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i da je u tim tačkama izvod funkcije $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. S druge strane je

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\uparrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\uparrow 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h} = \lim_{h\uparrow 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty,$$

i

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty,$$

što znači da ne postoji granična vrijednost $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}$, pa funkcija f u tački $x_0 = 0$ nije diferencijabilna. ♣

3.2 Diferencijabilnost elementarnih funkcija

U ovoj sekciji ispitivat ćemo diferencijabilnost elementarnih funkcija na njihovim domenima.

1. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ (c je konstanta) imamo da je granična vrijednost oblika (3.2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0,$$

koja je konačna, pa je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ i u svakoj toj tački vrijedi

$$f'(x) = (c)' = 0.$$

2. Prema Definiciji 3.1.1 za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} = \binom{n}{n-1} x^{n-1} = n x^{n-1},
\end{aligned}$$

što je konačna vrijednost za sve $x \in \mathbb{R}$. To znači da je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ i da u tim tačkama vrijedi

$$f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}.$$

Napomena 3.2.1 *Kasnije ćemo pokazati da isti zaključak vrijedi kad prirodni broj n zamijenimo proizvoljnim realnim brojem r.*

3. Za funkciju $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

a ta granična vrijednost postoji i konačna je za sve $x > 0$. Dakle, funkcija f je diferencijabilna na $(0, +\infty)$ i vrijedi

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \; x > 0.$$

4. Koristeći Definiciju 3.1.1, za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ $(0 < a \neq 1)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= a^x \ln a,
\end{aligned}$$

što je konačna vrijednost za bilo koje $x \in \mathbb{R}$ te je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ i u tim tačkama vrijedi

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Uzimajući specijalno $a = e$, dobije se da je i funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ i u svim tim tačkama vrijedi

$$f'(x) = (e^x)' = e^x.$$

5. Za funkciju $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&\overset{\log_a \text{ nepr. fja}}{=} \log_a \lim_{h\to 0} \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{h}{x}\cdot\frac{1}{h}} \\
&= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e \quad \left(= \frac{1}{x \ln a}\right).
\end{aligned}$$

Kako je to konačna granična vrijednost u svim tačkama domena funkcije f, tj. svim $x \in (0, +\infty)$, to je f diferencijabilna u svim tim tačkama i vrijedi

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad \left(= \frac{1}{x \ln a}\right).$$

Specijalno, za $a = e$, imamo da je funkcija $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ diferencijabilna u svim tačkama $x \in (0, +\infty)$ i da je u tim tačkama

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

6. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$ imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos \frac{2x+h}{2} \\
&\overset{\cos \text{ nepr. fja}}{=} 1 \cdot \cos\left(\lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{2}\right) \\
&= \cos x,
\end{aligned}$$

što je konačna granična vrijednost za sve $x \in \mathbb{R}$, pa je funkcija f diferencijabilna u svim tačkama $x \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Analogno se pokazuje da je funkcija $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$ diferencijabilna u svim tačkama $x \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

7. Ispitajmo još i diferencijabilnost funkcije $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$. Kako je (zbog neprekidnosti funkcije cos) granična vrijednost

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x \cos(x+h)}{h \cos(x+h) \cos x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sinh}}{h} \cdot \frac{1}{\cos x \lim\limits_{h\to 0} \cos(x+h)} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

konačna, to je funkija f diferencijabilna u svakoj tački $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i za sve takve x vrijedi

$$f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Analogno se pokazuje da je i funkcija $f : (0, \pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cot x$ diferencijabilna u svakoj tački $x \in (0, \pi)$ i vrijedi

$$f'(x) = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

3.3 Formula o razlaganju

Pojam diferencijabilnosti funkcije može se uvesti na različite načine. Pored načina kojeg smo mi naveli na početku ovog poglavlja (Definicija 3.1.1), diferencijabilnost funkcije je moguće definirati i kao činjenicu da ona zadovoljava tzv. *formulu o razlaganju*, ali se pokazuje da je to ekvivalentno s našom definicijom. Naime vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1 *Pretpostavimo da je funkcija f definirana na intervalu $I \subset D_f$. Tada je funkcija f diferencijabilna u tački $x \in I$ ako i samo ako vrijedi*

$$\Delta f = L\Delta x + \Delta x \alpha(\Delta x) \quad (\alpha(\Delta x) \to 0 \text{ kad } \Delta x \to 0), \tag{3.3}$$

odnosno,

$$\Delta f = L\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0), \tag{3.4}$$

gdje je $L \in \mathbb{R}$, a Δx i Δf su prirast argumenta, odnosno prirast funkcije u tački x, respektivno.

Napomenimo da se formula (3.3), odnosno (3.4), naziva formulom o razlaganju funkcije f u tački x.

Dokaz. i) Pretpostavimo da je funkcija diferencijabilna u taški $x \in I \subset D_f$, što prema Definiciji 3.1.1 znači postoji konačna granična vrijednost $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = L$ $(L \in \mathbb{R})$. Odavde vrijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - L = 0,$$

odnosno

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - L\right) = 0$$

i ako uvedemo smjenu $\frac{\Delta f}{\Delta x} - L = \alpha(\Delta x)$, jasno je da vrijedi $\alpha(\Delta x) \to 0$ kad $\Delta x \to 0$ i, osim toga,

$$\Delta f = L\Delta x + \Delta x \alpha(\triangle x),$$

tj vrijedi formula o razlaganju (3.3).

ii) Pretpostavimo sada da vrijedi formula o razlaganju (3.3). Tada iz te formule slijedi da je

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = L + \alpha(\Delta x) \quad (\alpha(\Delta x) \to 0 \text{ kad } \Delta x \to 0),$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = L + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = L,$$

to jest postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ i vrijedi $f'(x) = L$, što znači da je funkcija f diferencijabilna u tački x. $\blacksquare$

Sljedeći teorem govori o vezi između diferencijabilnosti i neprekidnosti funkcije, a jednostavno se dokaszuje priomjenom formule o razlaganju.

Teorem 3.3.2 *Ako je funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$, diferencijabilna u tački $x_0 \in I \subset D_f$ (I je interval), tada je ona i neprekidna u tački x_0. Obrnuto, općenito ne vrijedi.*

Dokaz. 1. način - primjenom formule o razlaganju
Iz pretpostavke o diferencijabiolnosti funkcije f u tački x_0 slijedi da ona zadovoljava formulu o razlaganju (3.3). Zbog toga je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left(L\Delta x + \Delta x \alpha \left(\Delta x \right) \right) = 0,$$

pa prema Definiciji 2.1.2 funkcija f je neprekidna u tački x_0.

2. način - primjenom Definicije 3.1.1
Iz pretpostavke o diferencijabiolnosti funkcije f u tački x_0 iz Definicije 3.1.1 slijedi da je

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}. \tag{3.5}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left[f\left(x\right) - f\left(x_0\right) \right] &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \left(x - x_0\right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \left(x - x_0\right) \\ &\overset{(3.5)}{=} f'\left(x_0\right) \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

to jest $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$, a to prema Definiciji 2.1.1 slijedi da je f neprekidna u tački x_0.

Da obrnuto ne vrijedi pokazuje sljedeći kontraprimjer.

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ je nprekidna u tački $x_0 = 0$, jer je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \uparrow 0} f\left(x\right) = \lim_{x \uparrow 0} |x| = \lim_{x \uparrow 0} \left(-x\right) = 0, \\ D &= \lim_{x \downarrow 0} f\left(x\right) = \lim_{x \downarrow 0} |x| = \lim_{x \downarrow 0} x = 0, \end{aligned}$$

odnosno $L = D = \lim\limits_{x \to 0} f\left(x\right) = 0 = f\left(0\right)$. S druge strane je

$$\begin{aligned} L' &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{f\left(0+h\right) - f\left(0\right)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{|h| - 0}{h} \overset{h<0}{=} \lim_{h \uparrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \left(-1\right) = -1, \\ D' &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f\left(0+h\right) - f\left(0\right)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} \overset{h>0}{=} \lim_{h \uparrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \uparrow 0} 1 = 1, \end{aligned}$$

pa ne postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$, to jest funkcija f nije diferencijabilna u $x_0 = 0$. ■

Navest ćemo i sljedeće slučajeve neprekidnih funkcija koje nisu diferencijabilne (zbog važnosti tih funkcija u narednom izlaganju).

Primjer 3.3.1 *a) U Primjeru 3.1.2 vidjeli smo da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ u tački $x_0 = 0$ nije diferencijabilna. Međutim, ona je u toj tački neprekidna funkcija jer vrijedi $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 = f\left(0\right)$.*

b) Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ je neprekidna u ački $x_0=0$ jer vrijedi $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0=f(0)$. S druge strane je

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty,$$

što znači da granična vrijednost, iako postoji, nije konačna, pa funkcija f nije diferencijabilna u tački $x_0=0$. ♣

3.4 Pravila za izvode

Od interesa je ispitati kako se osobina diferencijabilnosti funkcije u tački ponaša kod uobičajenih operacija s funkcijama. Na taj način ćemo dobiti i pravila za izračunavanje izvoda diferencijabilnih funkcija iskazana sljedećim teoremom.

Teorem 3.4.1 *Pretpostavimo da su funkcije $f:D_f\to\mathbb{R}$ i $g:D_g\to\mathbb{R}$ diferencijabilne u nekoj tački $x_0\in I\subset D_f\cap D_g$ (I je interval). Tada su u x_0 diferencijabilne i sljedeće funkcije: cf ($c\in\mathbb{R}$ neka konstanta), $f\pm g$, fg i $\frac{f}{g}$, ali posljednja uz pretpostavku da je $g(x)\neq 0$ za sve $x\in I$. Pri tome vrijedi:*
i) $(cf)'=cf'$,
ii) $(f\pm g)'=f'\pm g'$,
iii) $(fg)'=f'g+fg'$,
iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Dokaz. Zbog kompleksnosti izvest ćemo dokaze samo za iii) i iv).
iii) Neka je $\varphi=fg$. Tada je

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg)(x_0+\Delta x)-(fg)(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\\&+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)\\&+f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Zbog diferencijabilnosti funkcija f i g u tački x_0 vrijedi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0).$$

Osim toga, funkcija g je, prema Teoremu 3.3.2, i neprekidna u tački x_0, pa vrijedi

$$\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)=g\left(\lim_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)\right)=g(x_0).$$

Uzimajući to u obzir, dobije se

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0) = \big(f'g\big)(x_0)+\big(fg'\big)(x_0) = \big(f'g+fg'\big)(x_0),$$

to jest postoji ta granična vrijednost i konačna je, što znači da je funkcija $\varphi = fg$ diferencijabilna u tački x_0 i vrijedi

$$\varphi'(x_0) = (fg)'(x_0) = \big(f'g+fg'\big)(x_0),$$

odnosno $(fg)' = f'g+fg'$.

iv) Neka je $\varphi = \frac{f}{g}$. Tada vrijedi (koristeći osobine diferencijabilnosti funkcija f i g u tački x_0 kao u slučaju iii))

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+\Delta x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x_0+\Delta x)}{\Delta x g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x_0)}{\Delta x g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)} \\
&- \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\,g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\,g(x_0)}{\Delta x g(x_0)\,g(x_0+\Delta x)} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,\frac{g(x_0)}{g(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)} \\
&- \frac{f(x_0)}{g(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f'(x_0)\,g(x_0)}{[g(x_0)]^2}-\frac{f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{f'g-fg'}{[g]^2}(x_0).
\end{aligned}$$

To znači da postoji ta granična vrijednost i konačna je, pa je funkcija $\varphi = \left(\frac{f}{g}\right)$ diferencijabilna u tački x_0 i vrijedi

$$\varphi'(x_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)(x_0),$$

odnosno $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$. ■

Primijetimo da pravilo iii) u prethodnom teoremu implicira pravilo i). Naime, zbog činjenice da je konstantna funkcija diferencijabilna u svakoj tački i da je njen izvod u svim tim tačkama jednak 0, to jest $c' = 0$, imamo

$$(cf)' = c'f + cf' = cf'.$$

Također, sada možemo odrediti izvod funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$ za $n\in\mathbb{Z}^-$, to jest kad je n negativan cio broj. Uvedimo smjenu $n=-k$, $k\in\mathbb{N}$ i budući da smo ranije pokazali da je $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$, imat ćemo, prema pravilu iv) prethodnog teorema,

$$(x^n)' = \left(x^{-k}\right)' = \left(\frac{1}{x^k}\right)' \overset{(iv)}{=} \frac{1'x^k - 1\cdot kx^{k-1}}{x^{2k}} = \frac{-k}{x^{k+1}} = -kx^{-k-1} = nx^{n-1}.$$

Preostaje još da se dokaže da isti rezultat vrijedi i za bilo koji realan broj n.

Primjenom pravila iv) jednostavnije se mogu odrediti izvodi funkcija tan i cot. Naime,

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

i analogno za funkciju cot.

Kao neposredna posljedica prethodnog razmatranja javlja se sljedeća tvrdnja.

Posljedica 3.4.1 *Neka su funkcije $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u tački $\xi \in (a,b)$. Tada je za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcija $\alpha f + \beta g$ diferencijabilna u tački ξ i vrijedi*

$$(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi).$$

Skup svih funkcija s (a,b) u $\mathbb{R}$ diferencijabilnih u tački ξ čini vektorski prostor (s operacijama sabiranja i množenja skalarom definiranim po tačkama), a pridruživanje $f \mapsto f'(\xi)$ je linearni funkcional na tom vektorskom prostoru.

3.5 Diferencijabilnost složene funkcije (lančano pravilo)

Komplikovanije funkcije se često dobijaju kompozicijom, koje se diferenciraju koristeći tzv. lančano pravilo. Pravilo nam također govori kako se derivacija mijenja ako promijenimo varijable.

Teorem 3.5.1 ***(Lančano pravilo)*** *Neka su I_1 i I_2 intervali. Pretpostavimo da je funkcija $f : I_1 \to I_2$ diferencijabilna u tački $x_0 \in I_1$, a funkcija $g : I_2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački $u_0 = f(x_0)$. Tada je složena funkcija $h = g \circ f$ diferencijabilna u tački x_0 i vrijedi*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{3.6}$$

Dokaz. Neka je $E = E(h)$ funkcija definirana sa

$$E(h) = \begin{cases} 0, & \text{za } h = 0 \\ \dfrac{g(u_0 + h) - g(u_0)}{k} - g'(u_0), & \text{za } h \neq 0. \end{cases}$$

Prema definiciji izvoda imamo

$$\lim_{h \to 0} E(h) = \lim_{h \to 0} \frac{g(u_0 + h) - g(u_0)}{h} - g'(u_0) = g'(u_0) - g'(u_0) = 0 = E(0),$$

što znači da je funkcija $E(h)$ neprekidna u $h = 0$. Također, uočimo da za sve h ($h = 0$ ili ne) vrijedi

$$g(u_0 + h) - g(u_0) = \left[g'(u_0) + E(h)\right] h. \tag{3.7}$$

Sada stavimo da je $h = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, pa je $u_0 + h = f(x_0 + \Delta x)$ i

$$g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) \overset{(3.7)}{=} \left[g'(f(x_0)) + E(h)\right] \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right].$$

Budući da je funkcija f diferencijabilna u x_0, vrijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{3.8}$$

Istovremeno funkcija f je i neprekidna u x_0 (jer je diferencijabilna u x_0), tako da je

$$\lim_{\Delta x\to 0} h = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0. \tag{3.9}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} g(f(x_0)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[g'(f(x_0)) + E(h)\right]\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},\end{aligned}$$

odnosno, zbog neprekidnosti funkcije E u tački 0, kao i zbog (3.8) i (3.9), imamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} g(f(x_0)) &= \left[g'(f(x_0)) + E\left(\lim_{\Delta x\to 0} h\right)\right]\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\\ &= \left[g'(f(x_0)) + 0\right] f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).\end{aligned}$$

■

Primjer 3.5.1 *Odredimo izvod funkcije $y = \sqrt{1+x^2}$. Ovdje je $y = g(u)$, gdje je $u = f(x)$, pa je $y = g(f(x))$. Specijalno, u ovom primjeru je $g(u) = \sqrt{u}$ i $f(x) = 1 + x^2$. Budući da su odgovarajući izvodi od g i f:*

$$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad i \qquad f'(x) = 2x,$$

lančano pravilo nam daje rezultat

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 3.5.2 *Ispitajmo diferencijabilnost sljedeće funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Za $x \neq 0$ prema (3.6) je $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, a u tački $x = 0$ je

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Prema tome, imamo da je

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases}$$

što znači da je funkcija f diferencijabilna u svim tačkama $x \in \mathbb{R}$ (pa je i neprekidna). No, uočimo da je funkcija f' u tački 0 prekidna (0 je oscilirajuća tačka). ♣

Primjer 3.5.3 *Ranije smo pokazali da je funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ i da vrijedi $f'(x) = nx^{n-1}$. Međutim, koristeći lančano pravilo u mogućnosti smo da odredimo izvod funkcije $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}$. Naime, koristeći jednakost $x^s = e^{s\ln x}$, imamo*

$$(x^s)' = \left(e^{s\ln x}\right)' = e^{s\ln x} \cdot (s\ln x)' = e^{s\ln x} \cdot \frac{s}{x} = x^s \cdot \frac{s}{x} = sx^{s-1}.$$

Specijalno, za $f(x) = \frac{1}{x}$ dobijamo

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

a za $f(x) = \sqrt{x}$ je

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \clubsuit$$

Primjer 3.5.4 *Ranije smo vidjeli da je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ za $x > 0$. U slučaju kad je $x < 0$, koristeći lančano pravilo imamo da je*

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \text{ za } x < 0.$$

Zaključujemo da je funkciju $\ln|x|$, definirana za sve $x \neq 0$ i diferencijabilna u svim tačkama svog domena, pri čemu je

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \; x \neq 0. \quad \clubsuit$$

Primjer 3.5.5 *i) Izvode hiperbolnih funkcija izračunavamo koristeći pravila za izvode i lančano pravilo:*

$$\begin{aligned}
(shx)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-x)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx, \\
(chx)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx, \\
(thx)' &= \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'\,chx - shx\,(chx)'}{ch^2x} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}, \\
(cthx)' &= \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)'\,shx - chx\,(shx)'}{sh^2x} = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

ii) Odredimo izvode inverznih hiperbolnih funkcija. Prije toga doći ćemo do analitičkih oblika tih funkcija.

Koristeći osobine funkcija e^x i e^{-x}, zaključujemo da je funkcija $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotono strogo rastuća i neprekidna, pa prema Teoremu 2.6.3 ona ima inverznu funkciju $arsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je, također, monotono strogo rastuća i neprekidna. Iz $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ dobijemo kvadratnu jednadžbu po e^x:

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

odakle je $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$ (jer zbog $e^x > 0$ ne uzimamo u obzir $e^x = y - \sqrt{1+y^2}$), odnosno $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$. Dakle, dobili smo da je

$$arshy = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Prema lančanom pravilu imamo

$$(arshy)' = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $ch : \mathbb{R} \to [1,+\infty)$, *kao parna funkcija je strogo monotona i neprekidna na svakom od intervala* $(-\infty,0)$ *i* $[0,+\infty)$, *tako da njene restrikcije na tim intervalima,* $ch_- : (-\infty,0) \to [1,+\infty)$ *i* $ch_+ : [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ *jesu bijektivne funkcije, pa postoje njima inverzne funkcije* $arch_- : [1,+\infty) \to (-\infty,0)$ *i* $arch_+ : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$. *Prva od njih je monotono strogo opadajuća, a druga je monotono strogo rastuća i obje su neprekidne funkcije. Na sličan način kao i u slučaju funkcije* $arsh$, *dobijemo*

$$arch_- y = \ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right), \quad y \in [1,+\infty),$$
$$arch_+ y = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right), \quad y \in [1,+\infty),$$

što možemo, po dogovoru, smatrati da je

$$archy = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right), \quad y \in [1,+\infty).$$

Koristeći lančano pravilo, imamo

$$(archy)' = \frac{1}{y \pm \sqrt{y^2-1}}\left(1 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad y \in [1,+\infty).$$

Funkcija $th : \mathbb{R} \to (-1,1)$ *je strogo monotono rastuća (što se može ustanoviti iz:* $y = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$*), pa ima inverznu funkciju* $arth : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *oblika* $x = arthy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$. *Ona je diferencijabilna na intervalu* $(-1,1)$ *i vrijedi*

$$(arthy)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-y+1+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-y^2}, \quad |y| < 1.$$

I najzad, funkcija $cth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ *je strogo monotono opadajuća (što se vidi iz:* $y = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$, $x \neq 0$*) te ima inverznu funkciju* $arcth : (-\infty,1)\cup(1,+\infty) \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *čiji je analitički oblik* $x = arcthy = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}$. *Ona je diferencijabilna na* $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ *i vrijedi*

$$(arcthy)' = \frac{1}{1-y^2}, \quad |y| > 1. \qquad \clubsuit$$

Napomena 3.5.1 *a) Primijetimo da se lančano pravilo (3.6) može zapisati i na sljedeći način*

$$\frac{d(g\circ f)}{dx}(x_0) = \frac{d(g(f))}{dx}(x_0) = \frac{dg}{df}(f(x_0))\cdot\frac{df}{dx}(x_0)$$

ili skraćeno

$$\frac{d(g(f))}{dx} = \frac{dg}{df}\cdot\frac{df}{dx}.$$

b) Jednostavno se indukcijom pokazuje da vrijedi i općenito

$$\frac{d(f_n\circ f_{n-1}\circ\ldots\circ f_1)}{dx} = \frac{df_n}{df_{n-1}}\cdot\frac{df_{n-1}}{df_{n-2}}\cdots\frac{df_1}{dx},$$

uz odgovarajuće pretpostavke o diferencijabilnosti funkcija $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

3.6 Diferencijabilnost inverzne funkcije

Još uvijek nismo razmatrali diferencijabilnost inverznih trigonometrijskih funkcija. Da bismo to mogli uraditi neophodan nam je sljedeći teorem.

Teorem 3.6.1 *Neka je funkcija $f : I_1 \to I_2$ neprekidna i strogo monotona na I_1 i neka je $\varphi : I_2 \to I_1$ njena inverzna funkcija, pri čemu su $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ neki intervali. Pretpostavimo da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 i da je $f'(x_0) \neq 0$. Tada je funkcija φ diferencijabilna u tački $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

odnosno

$$\varphi'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(\varphi(y_0))}.$$

Dokaz. Neka je $y = f(x)$, $x \in I_1$. Tada je $x = \varphi(y)$ i $x_0 = \varphi(y_0)$. Zbog toga je

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Kako je

$$\lim_{x \to x_0} [y - y_0] = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0,$$
$$\lim_{y \to y_0} [x - x_0] = \lim_{y \to y_0} [\varphi(y) - \varphi(y_0)] = 0,$$

zbog neprekidnosti fukcije f u tački x_0 (po pretpostavci) i neprekidnosti funkcije φ u tački y_0 (kao inverzne funkcije strogo monotone funkcije f), zaključujemo da $x \to x_0$ ako i samo ako $y \to y_0$, pa dalje imamo

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dakle, funkcija φ je diferencijabilna u tački $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. ■

Primjer 3.6.1 *Za inverzne trigonometrijske funkcije* arcsin, arccos, arctan *i* arccot *ispitat ćemo njihovu diferencijabilnost i odrediti izvode koristeći Teorem 3.6.1.*

Funkcija $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ *je strogo monotono rastuća i neprekidna pa ima inverznu funkciju* $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Pri tome za funkciju* $y = \sin x$ *vrijedi da je* $(\sin x)' = \cos x \neq 0$ *za* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *i tada je* $|y| < 1$, *što znači da su zadovoljene prepostavke Teorema 3.6.1, pa imamo*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad |y| < 1.$$

Primijetimo da je znak $(+)$ *ispred korijena izabran zato što je* $\cos x > 0$ *za* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Slično se zaključuje da su funkcije $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *i* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *uzajamno inverzne funkcije, pri čemu je* $(\cos x)' = -\sin x \neq 0$ *za* $x \neq 0$ *i* $x \neq \pi$. *Za* $x \in (0, \pi)$ *imamo da za vrijednosti funkcije* $y = \cos x$ *vrijedi* $|y| < 1$. *Prema Teoremu 3.6.1 imamo*

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad |y| < 1.$$

I ovdje je znak ispred korijena izabran imajući na umu da je $\sin x > 0$ *za* $x \in (0,\pi)$.

Funkcije $\tan : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *i* $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *su uzajamno inverzne funkcije i zadovoljavaju uvjete Teorema 3.6.1, tako da na analogan način prethodnim slučajevima imamo*

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}.$$

Kako su funkcije $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ *i* $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ *uzajamno inverzne i također zadovoljavaju pretpostavke Teorema 3.6.1, dobijamo da za sve* $y \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$(\operatorname{arccot} y)' = \frac{1}{(\cot x)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\cot^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

♣

Primjer 3.6.2 *Za area funkcije, za koje smo već izračunali izvode koristeći lančano pravilo, sada do istih rezultata možemo doći koristeći Teorem 3.6.1. Naime,*

$$\begin{aligned}
(arshx)' &= \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R};\\
(archx)' &= \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{shy} = \pm\frac{1}{\sqrt{ch^2y-1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x \in [1,+\infty);\\
(arthx)' &= \frac{1}{(thy)'} = ch^2y = \frac{ch^2y}{ch^2y - sh^2y} = \frac{1}{1-th^2y} = \frac{1}{1-x^2},\ |x|<1;\\
(arcthx)' &= \frac{1}{(cthy)'} = -sh^2y = -\frac{sh^2y}{ch^2y-sh^2y} = -\frac{1}{cth^2y-1} = \frac{1}{1-x^2},\ |x|>1.
\end{aligned}$$

♣

3.7 Geometrijski i fizikalni smisao izvoda

Historijski gledano dva su po prirodi različita problema odigrala ključnu ulogu za razvoj diferencijalnog računa. Prvi od njih je geometrijski i odnosi se na egzistenciju jedinstvene tangente u nekoj tački grafa funkcije f. Za njegovo rješenje zaslužan je *G. W. Leibnitz*[1].

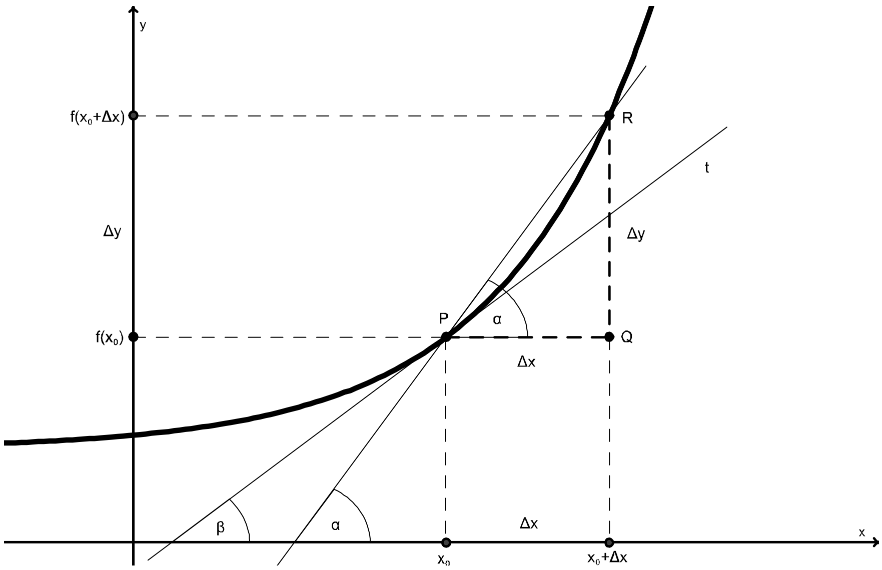
Pretpostavimo da se vrijednost neovisne varijable sa x_0 promijeni za Δx. Na grafu krive $y = f(x)$ označimo tačke $P(x_0, f(x_0))$ i $R(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ (Slika ??). Neka je α ugao koji sjekanta PR gradi s pozitivnim smjerom ose Ox. U pravouglom trouglu PQR je $\measuredangle QPR = \alpha$ (kao uglovi s paralelnim kracima). Ako pustimo da tačka R klizi duž grafa krive $y = f(x)$ prema tački P, uočavamo da će sjekanta PR težiti da zauzme položaj tangente t krive $y = f(x)$ u tački P. Pri tome se Δx sve više smanjuje, tj. $\Delta x \to 0$. Ako sa β označimo ugao koji tangenta t zaklapa s pozitivnim smjerom ose Ox, onda je jasno da vrijedi

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \alpha \to \beta,$$

odnosno

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\beta. \tag{3.10}$$

[1] Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), njemački matematičar



Geometrijsko značenje izvoda

Iz $\triangle PQR$ slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{RQ}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3.11}$$

Iz (3.10) i (3.11) dobijamo

$$\operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Dakle, *izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 jednak je tangensu ugla β koji tangenta t na krivu $y = f(x)$ u tački $P(x_0, f(x_0))$ zaklapa s pozitivnim smjerom ose Ox, tj. jednak je koeficijentu pravca tangente t, odnosno nagibu tangente t, krive $y = f(x)$ u tački $P(x_0, f(x_0))$.*

Uočimo i sljedeću činjenicu: kad je $y'(x_0) > 0$, tj. kad je nagib tangente t pozitivan, tada je graf funkcije rastuća kriva (odnosno, funkcija je rastuća); kad je $y'(x_0) < 0$, tj. kad je nagib tangente t negativan, graf funkcije je opadajuća kriva (odnosno, funkcija je opadajuća). U slučaju kad je $y'(x_0) = 0$, tada je tangenta t paralelna sa osom Ox.

Jednadžbu tangente u tački $P(x_0, f(x_0))$ grafika funkcije f možemo odrediti preko formule za jednadžbu prave kroz jednu tačku, koristeći već uočenu činjenicu da je nagib te tangente upravo $f'(x_0)$. Tako imamo

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

dok je jednadžba normale krive u tački P oblika

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Drugi problem koji je bio također motiv za nastanak diferencijalnog računa je fizikalnog karaktera i odnosi se na problem definiranja pojma brzine u određenom trenutku, za šta je zaslužan *Isaac Newton*[2]. Pretpostavimo da se materijalna tačka kreće iz položaja početne tačke O i da nakon vremena t zauzima položaj tačke M. Označimo sa $s(t)$, $t \geq 0$, funkciju koja označava pređeni put materijalne tačke za vrijeme t, to jest put od tačke O do tačke M. Neka se, zatim, materijalna tačka nakon vremena $t + \Delta t$ nađe u položaju tačke N (Slika ??). Pređeni put od tačke O do tačke N je $s(t + \Delta t)$, što znači da je pređeni put od tačke M do tačke N dat sa

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Vrijeme provedeno pri kretanju materijalne tačke od M do N je Δt. Poznato je da se srednja brzina $\overline{v}$ pri kretanju materijalne tačke od položaja M do položaja N definira kao

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Prirodno se nameće pitanje kako definirati pojam brzine u trenutku t (to jest u položaju tačke M). Naime, vidjeli smo da za izračunavanje srednje brzine na nekom intervalu puta treba moći izmjeriti i vremenski interval za koji se pređe taj interval puta. Međutim, promatrajući samo položaj tačke M ti su intervali dužine 0. Ideja je da se promatra ponašanje prosječne brzine na intervalima oko tačke M (i vremenu t) čija se duljina po volji smanjuje, to jest pustimo da $\Delta t \to 0$. Zbog toga ćemo brzinu materijalne tačke u položaju M, odnosno u vremenu t, definirati kao graničnu vrijednost prosječne brzine na tim malim intervalima pri procesu $\Delta t \to 0$, ako ta granična vrijednost postoji. Dakle,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

ako taj limes postoji, odnosno $v(t) = s'(t)$.

SLIKA

3.8 Jednostrani izvodi. Beskonačni izvodi

Može se dogoditi da u definiciji diferencijabilnosti funkcije, Definiciji 3.1.1, ne postoji konačna granična vrijdnost (3.1), ali da možda postoji jednostrana, lijeva ili desna, granična vrijednost. To nam, u ovisnosti o tome, omogućava da definiramo lijevi i desni izvod funkcije u promatranoj tački.

Definicija 3.8.1 *Neka je funkcija f definirana u lijevoj δ-okolini tačke x_0, $O_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$ (odnosno desnoj δ-okolini tačke x_0, $O_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$) za neko $\delta > 0$. Ako postoji konačna granična vrijednost*

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\text{odnosno } \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right), \tag{3.12}$$

ona se zove ***lijevi*** *(odnosno* ***desni****)* ***izvod*** *funkcije f u tački x_0 i označava se s $f'_-(x_0)$ (odnosno $f'_+(x_0)$).*

[2]Isaac Newton (1463-1728), engleski fizičar, matematičar i astronom

Prema osobinama granične vrijednosti funkcije zaključujemo da izvod funkcije f u tački x_0 ima izvod (diferencijabilna je u x_0) ako i samo ako postoje lijevi i desni izvod funkcije u tački x_0 i međusobno su jednaki, to jest $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. U dokazu Teorema 3.3.2 ustanovljeno je da funkcija $f(x) = |x|$ nije diferencijabilna u tački $x_0 = 0$ (iako je neprekidna u toj tački), ali da sada možemo zaključiti da ona u tački 0 ima lijevi izvod $f'_-(0) = -1$ i ima desni izvod $f'_+(0) = 1$.

Sada na određeni način za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ možemo reći da je diferencijabilna na segmentu $[a, b]$ ako je ona diferencijabilna na intervalu (a, b) i ako ima lijevi izvod u tački b i desni izvod u tački a.

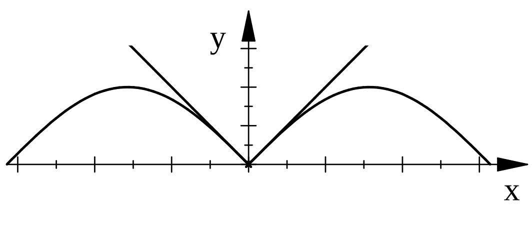
Zanimljiva su i geometrijska značenja jednostranih izvoda funkcije. Naime, $\tan \alpha_- = f'_-(x_0)$ predstavlja nagib poluprave PT_- koja tangira graf funkcije f u tački $P(x_0, f(x_0))$ dok $\tan \alpha_+ = f'_+(x_0)$ predstavlja nagib poluprave PT_+ koja tangira graf funkcije f u tački $P(x_0, f(x_0))$ (Slika ??). Polupravu PT_- zvat ćemo *lijevom*, a polupravu PT_+ *desnom polutangentom* krive $y = f(x)$ u tački P. Drugim riječima, umjesto jedne tangente imamo dvije polutangente funkcije f u tački P.

SLIKA polutangenti općenito

Primjer 3.8.1 *Promatrajmo funkciju* $f : [-\pi, \pi] \to [0, 1]$, $x \mapsto |\sin x|$ *(Slika ??). Za nju, u tački* $x_0 = 0$, *vrijedi:*

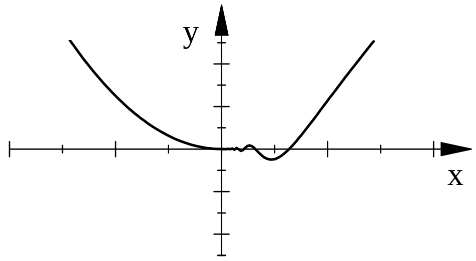
$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\uparrow 0}\frac{-\sin h - 0}{h} = -\lim_{h\uparrow 0}\frac{\sin h}{h} = -1 = f'_-(0) = \tan\alpha_-,$$
$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\sin h - 0}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\sin h}{h} = 1 = f'_+(0) = \tan\alpha_+.$$

U tački $P(0, 0)$ *krive* $y = f(x)$ *postoji lijeva polutangenta* $y = -x$ *i postoji desna polutangenta* $y = x$. ♣



Primjer 3.8.2 *Ispitajmo diferencijabilnost funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(Slika??) date s*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$



Očito je da vrijedi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

to jest, funkcija f je sigurno diferencijabilna u svim tačkama različitim od 0.

Kako je u pitanju višegrana funkcija koja za sve x u okolini tačke 0 nema isti oblik, ne možemo direktno izračunati $f'(0)$. Zbog toga ćemo odrediti jednostrane izvode u tački 0:

$$f'_{+}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \downarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$
$$f'_{-}(0) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \uparrow 0} h = 0.$$

Dakle, $f'_{+}(0) = f'_{-}(0) = 0$, pa postoji $f'(0) = 0$, što znači da je funkcija f diferencijabilna i u 0.

Uočimo ovdje jednu jako bitnu činjenicu: postoji razlika između jednostranog izvoda i jednostrane granične vrijednosti izvoda, budući da je $f'_{+}(0) = 0$, ali da $f'(0+) = \lim_{x \uparrow 0} f'(x)$ ne postoji (kasnije ćemo vidjeti da među njima neće biti razlike ako postoji jednostrana granična vrijednost izvoda, Teorem 3.12.1). To nam pokazuje da izvod može da postoji u okolini neke tačke x_0 (u našem slučaju je $f'(0) = 0$), ali da ima prekid u x_0. ♣

Sljedeća definicija je motivirana Primjerom 3.8.2.

Definicija 3.8.2 *Za funkciju f reći ćemo da je* ***neprekidno diferencijabilna na*** $[a, b]$ *ako je f diferencijabilna na $[a, b]$, f' je neprekidna na (a, b), $f'_{+}(a) = f'(a+)$ i $f'_{-}(b) = f'(b-)$ (i pri tome ćemo koristit oznaku $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$).*

Međutim, ostaje pitanje šta se dešava kada granične vrijednosti (3.12) postoje, ali su beskonačne? U tom slučaju govorit ćemo o beskonačnom lijevom i beskonačnom desnom izvodu (odnosno eventualno o beskonačnom izvodu) funkcije f u tački x_0. Vrlo je važna geometrijska interpretacija ovih slučajeva (zbog egzistencije funkcija s tom osobinom) i njoj ćemo posvetiti posebnu pažnju. Pretpostavit ćemo, dakle, da u sva četiri sljedeća slučaja imamo beskonačne jednostrane izvode. Ostaje pitanje kada će to biti $+\infty$, a kada $-\infty$ i koji položaj će zauzeti odgovarajuće polutangente. Polutangente će, zbog osobina funkcije tan, biti okomite na Ox osu, bit će usmjerene prema gore u slučaju kad je jednostrani izvod $+\infty$, a usmjerene prema dole kad je jednostrani izvod $-\infty$. U svim situacijama ćemo (analogno slučaju geometrijske interpretacije izvoda) promatrati sjekantu PN, koja će biti usmjerena desno od tačke P. pustimo li da tačka N klizi ka tački P, sjekanta PN će težiti da zauzme polođaj polutangente u tački P.

U prvom slučaju (SLIKA1 ??) vidimo da je $h < 0$ i $f(x_0 + h) < f(x_0)$, pa je $\frac{\Delta f}{h} > 0$. Sada je $f'_{-}(x_0) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{\Delta f}{h} = +\infty$ i lijeva polutangenta krive $y = f(x)$ u tački P je usmjerena prema gore.

SLIKA 1 beskonačni izvod

U drugom slučaju (SLIKA2 ??) vidimo da je $h < 0$ i $f(x_0 + h) > f(x_0)$, pa je $\frac{\Delta f}{h} < 0$. Sada je $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \uparrow 0} \frac{\Delta f}{h} = -\infty$ i lijeva polutangenta krive $y = f(x)$ u tački P je usmjerena prema dole.

SLIKA 2 beskonačni izvod

U trećem slučaju (SLIKA3 ??) vidimo da je $h > 0$ i $f(x_0 + h) < f(x_0)$, pa je $\frac{\Delta f}{h} < 0$. Sada je $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = -\infty$ i desna polutangenta krive $y = f(x)$ u tački P je usmjerena prema dole.

SLIKA 3 beskonačni izvod

U četvrtom slučaju (SLIKA4 ??) vidimo da je $h > 0$ i $f(x_0 + h) > f(x_0)$, pa je $\frac{\Delta f}{h} > 0$. Sada je $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = +\infty$ i desna polutangenta krive $y = f(x)$ u tački P je usmjerena prema gore.

SLIKA 4 beskonačni izvod

Kombinacijom prvog i trećeg slučaja ($f'_-(x_0) = +\infty$ i $f'_+(x_0) = -\infty$), SLIKA 5 ??, vidimo da grafik funkcije $y = f(x)$ u tački P ima tzv. špic usmjeren prema gore.

SLIKA 5 beskonačni izvod

Kombinacijom drugog i četvrtog slučaja ($f'_-(x_0) = -\infty$ i $f'_+(x_0) = +\infty$), SLIKA 6 ??, vidimo da grafik funkcije $y = f(x)$ u tački P ima tzv. špic usmjeren prema dole.

SLIKA 6 beskonačni izvod

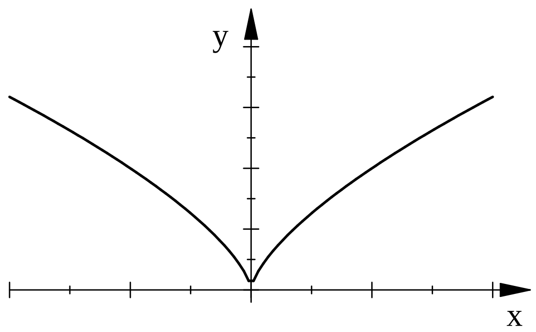
Kombinacijom prvog i četvrtog slučaja ($f'_-(x_0) = +\infty$ i $f'_+(x_0) = +\infty$), SLIKA 7 ??, vidimo da je tačka P grafika funkcije $y = f(x)$ prevojna tačka (grafik lokalno oko tačke P ima oblik slova "S").

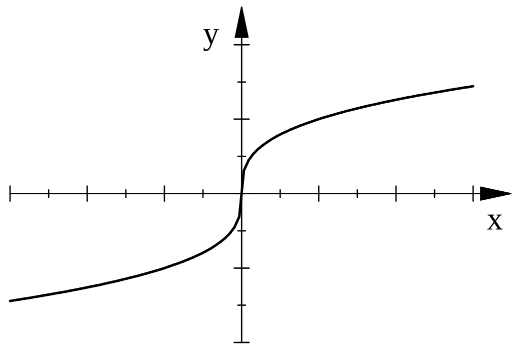
SLIKA 7 beskonačni izvod

Kombinacijom drugog i trećeg slučaja ($f'_-(x_0) = -\infty$ i $f'_+(x_0) = -\infty$), SLIKA 8 ??, vidimo da je tačka P grafika funkcije $y = f(x)$ prevojna tačka (grafik lokalno oko tačke P ima oblik obrnutog slova "S").

SLIKA 8 beskonačni izvod

Primjer 3.8.3 *a) U Primjeru 3.1.2 vidjeli smo da funkcija* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ *u tački* $x_0 = 0$ *nije diferencijabilna, ali vidimo da postoje jednostrani izvodi funkcije u toj tački:* $f'_-(x_0) = -\infty$ *i* $f'_+(x_0) = +\infty$*, pa graf funkcije u okolini tačke* $(0,0)$ *ima oblik špica okrenutog dole (Slika ??).*





b) U Primjeru 3.3.1 smo vidjeli da funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ *u tački* $x_0 = 0$ *nije diferencijabilna, ali vidimo da postoje jednostrani izvodi funkcije u toj tački i da vrijedi* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$*, pa graf funkcije u okolini tačke* $(0,0)$ *ima oblik slova "S" i tačka* $(0,0)$*je prevojna tačka grafa funkcije.* ♣

3.9 Logaritamski izvod i izvod funkcije zadane parametarski

3.10 Diferencijal funkcije

3.11 Izvodi i diferencijali višeg reda

3.12 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

3.12.1 Lagrangeov teorem

3.12.2 Posljedice Lagrangeovog teorema

Teorem 3.12.1

3.13 L'Hospitalova pravila

3.14 Taylorova formula

3.15 Lokalni ekstremi

3.16 Konveksnost (konkavnost)

3.17 Asimptote funkcije

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x + \pi)$ u tački $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ i eventualno izračunati $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ koristeći samo Definiciju 3.1.1.

2. Ispitati diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{3x}$ u tački $x_0 = -2$ i eventualno izračunati $f'(-2)$ koristeći samo Definiciju 3.1.1.

3. Funkcija f je diferencijabilna u tački a. Odrediti sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(a) - f\left(a - \frac{1}{2n}\right)\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f\left(a - \frac{1}{n}\right)\right)$.

4. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački a, odrediti sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$ za svaki niz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takav da je $x_n \neq a$, $n \in \{1, 2, ...\}$ i $x_n \to a$ $(n \to \infty)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$, ako je $a = 0$ i $f'(0) \neq 0$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Neka je $\alpha > 0$ za familiju funkcija

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokazati da je za $\alpha > 1$ funkcija f_α diferencijabilna u tački 0 i da je $f'_\alpha(0) = 0$, a da za $\alpha \leq 1$ funkcija f_α nije diferencijabilna u tački 0. Dati geometrijsku interpretaciju.

6. Pretpostavimo da je funkcija f diferencijabilna u tački a i da je broj k fiksan. Odrediti

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a + \frac{2}{n}\right) + ... + f\left(a + \frac{k}{n}\right) - kf(a)\right).$$

7. Neka je funkcija f diferenciojabilna u tački a. Odrediti

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n^2}\right)+f\left(a+\frac{2}{n^2}\right)+...+f\left(a+\frac{n}{n^2}\right)-nf\left(a\right)\right).$$

8. Neka su brojevi $a>0$, $m,k\in\mathbb{N}$ fiksirani. Izračunati sljedeće granične vrijednosti:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+...+(n+k)^m}{n^{m-1}}-kn\right)$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)$.

9. Ako su funkcije f i g diferencijabilne u tački a, izračunati graničnu vrijednost

$$\lim_{x\to a}\frac{f\left(x\right)g\left(a\right)-f\left(a\right)g\left(x\right)}{x-a}.$$

10. Pretpostavimo da je funkcija f diferencijabilna u tački a, pri čemu je $f\left(a\right)>0$. Odrediti sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a\right)}\right)^{\frac{1}{n}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f\left(x\right)}{f\left(a\right)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$, $a>0$.

11. Izračunati sljedeće limese:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$; b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac{\pi(n+1)}{4n}\right)^n$; c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi(n+1)}{2n}\right)^n$.

12. Ispitati diferencijabilnost sljedećih funkcija na $\mathbb{R}$:

a) $x\mapsto|\sin x|\sin x$; b) $x\mapsto(x-\lfloor x\rfloor)\sin^2(\pi x)$; c) $x\mapsto|\sin|^{\frac{3}{2}}$.

13. Odrediti brojeve a, b i c tako da funkcija

$$f\left(x\right)=\begin{cases}4x, & x\leq 0,\\ ax^2+bx+c, & 0<x<1,\\ 3-2x, & x\geq 1.\end{cases}$$

bude diferencijabilna na $(-\infty,+\infty)$.

14. Neka je

$$a_1\left(x\right)=\sqrt{x},\ a_x\left(x\right)=\sqrt{x+a_1\left(x\right)},...,a_{n+1}\left(x\right)=\sqrt{x+a_n\left(x\right)},...$$

za $x>0$. Dokazati da za svako $x>0$ postoji granična vrijednost

$$\lim_{n\to\infty}a_n\left(x\right):=\varphi\left(x\right).$$

Odrediti $\varphi'\left(x\right)$ za sve $x>0$.

15. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadovoljava funkcionalnu jednadžbu

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+x^2y+xy^2,\ \text{za sve } x,y\in\mathbb{R}$$

i uvjet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=1$.

Odrediti: a) $f\left(0\right)$, b) $f'\left(0\right)$, c) $f'\left(x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

16.

Poglavlje 4

Integrabilnost

4.1 Kriteriji konvergencije nesvojstvenog integrala

Za ispitivanje konvergencije (divergencije) nesvojstvenog integrala koriste se razni kriteriji, koji su u principu analogni odgovarajućim kriterijuma za konvergenciju numeričkih redova. Ovdje ćemo navesti neke od tih (najvažnijih) kriterija. Pri tome ćemo smatrati, ukoliko drugačije ne kažemo, da je singularitet integrala u gornjoj granici b.

Teorem 4.1.1 *Da bi nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergirao, potrebno je i dovoljno da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji broj* $\beta_0 \in (a,b)$, *tako da za svaki par brojeva* $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ *vrijedi*

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Da bi integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergirao potrebno je i dovoljno da postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{x\uparrow b} \phi(x)$, gdje je $\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(a \leq x < b)$. Prema Cauchyevom uvjetu, to vrijedi ako i samo ako

$$(\forall\varepsilon < 0)\,(\exists\beta_0 : a < \beta_0 < b)\,\left(\forall\beta', \beta''\right)\,\left(\beta_0 < \beta' < \beta'' < b \Rightarrow \left|\phi\left(\beta''\right) - \phi\left(\beta'\right)\right| < \varepsilon\right).$$

Zaključak slijedi iz činjenice

$$\phi\left(\beta''\right) - \phi\left(\beta'\right) = \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx.$$

■

Sljedeća tvrdnja nam daje dovoljan uvjet za konvergenciju nesvojstvenog integrala.

Teorem 4.1.2 *Pretpostavimo da je* $|f(x)| \leq g(x)$, $x \in [a,b)$ *i da integral* $\int_a^b g(x)\,dx$ *konvergira. Tada konvergira i integral* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Dokaz. Pošto integral $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ konvergira, tada prema Teoremu 4.1.1, za za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\beta_0 \in (a, b)$, tako da za svaki par brojeva $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ vrijedi $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} g(x)\,dx\right| = \int\limits_{\beta'}^{\beta''} g(x)\,dx < \varepsilon$. Iz pretpostavke teorema slijedi

$$\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\,dx \le \int\limits_{\beta'}^{\beta''} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

■

Primjer 4.1.1 *Neka je $|f(x)| \le \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$, za $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$. Budući da integral $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergira (pokazati!), tada, prema Teoremu 4.1.2, konvergira i integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.* ♣

Kao i u slučaju numeričkih redova, i ovdje je važan pojam apsolutne konvergencije nesvojstvenog integrala.

Definicija 4.1.1 *Za nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ kažemo da apsolutno konvergira ako konvergira integral $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.*

Iz Teorema 4.1.2 neposredno slijedi sljedeća tvrdnja.

Posljedica 4.1.1 *Ako nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ apsolutno konvergira, tada on konvergira i u običnom smilu.*

Obrnuta tvrdnja, međutim, općenito ne vrijedi, to jest iz konvergencije nesvojstvenog integrala ne slijedi obavezno i apsolutna konvergencija tog integrala, što se može vidjeti iz sljedećeg primjera.

Primjer 4.1.2 *Pokazati da integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergira, ali ne i apsolutno.*

Rješenje. Primjenom parcijalne integracije na dati nesvojstveni integral, dobijamo

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

No, integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergira, što slijedi iz nejednakosti $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ i činjenice da integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergira (pokazati!), primjenom Teorema 4.1.2.

S druge strane, za $\beta > \frac{\pi}{2}$, vrijedi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{1}{x} dx$ je neograničen, pa iako je integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \frac{\cos 2x}{x} dx$ ograničen (konvergencija integrala $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ dokazuje se slično konvergenciji integrala $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$), slijedi da integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergira. ♣

Uočimo da se pitanje apsolutne konvergencije svodi na pitanje konvergencije nesvojstvenih integrala nenegativnih funkcija. U tom smislu su i sljedećih nekoliko kriterija konvergencije nesvojstvenog integrala takvih funkcija.

Teorem 4.1.3 *Da bi nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) \geq 0$ *za* $x \in [a, b)$ *konvergirao, potrebno je i dovoljno da postoji broj* K*, takav da vrijedi*

$$\int_a^{\beta} f(x)\,dx \leq K, \quad a \leq \beta < b.$$

Dokaz. Očito je, zbog $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b)$, funkcija $\phi(\beta) = \int_a^{\beta} f(x)\,dx$ je rastuća. Zbog toga postoji konačna granična vrijednost $\lim_{\beta\uparrow b} \phi(\beta)$, odnosno nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira, ako i samo ako je funkcija ϕ ograničena. ■

Teorem 4.1.4 *Pretpostavimo da je* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *za* $x \in [a, b)$ *i neka su*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4.1}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx \tag{4.2}$$

nesvojstveni integrali sa singularitetom b*. Tada iz konvergencije integrala (4.2) slijedi konvergencija integrala (4.1), a iz divergencije integrala (4.1) slijedi divergencija integrala (4.2).*

Dokaz. Uvedimo oznake: $\phi(\beta) = \int_a^{\beta} f(x)\,dx$, $\psi(\beta) = \int_a^{\beta} g(x)\,dx$, $a \leq \beta < b$. Ako integral (4.2) konvergira, tada prema Teoremu 4.1.3 postoji broj K takav da je $\phi(\beta) \leq \psi(\beta) \leq K$, pa prema istom teoremu i integral (4.1) konvergira.

Druga tvrdnja teorema je kontrapozicija prve. ■

Primjer 4.1.3 *Prethodni teorem se može primijeniti da se dokaže da nesvojstveni integral* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *konvergira. Naime, uočimo da je* $e^{-x^2} \le e^{-x}$ *za* $1 \le x < +\infty$*, a integral* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ *konvergira (pokazati!).*

Teorem 4.1.5 *Pretpostavimo da su (4.1) i (4.2) nesvojstveni integrali, pri čemu je* $g(x) > 0$ *za* $x \in [a,b)$*. Ako postoji* $\lim\limits_{x\uparrow b}\frac{f(x)}{g(x)} = C$*,* $0 \le C \le +\infty$*, onda iz konvergencije integrala (4.2), za* $C < +\infty$*, slijedi konvergencija integrala (4.1), a iz divergencije integrala (4.2), za* $C > 0$*, slijedi divergencija integrala (4.1). Specijalno, ako je* $0 < C < +\infty$*, onda integrali (4.1) i (4.2) konvergiraju, odnosno divergiraju, istovremeno.*

Dokaz. i) Pretpostavimo da integral (4.2) konvergira i da je $0 \le C < +\infty$. Prema definiciji granične vrijednosti, iz $\lim\limits_{x\uparrow b}\frac{f(x)}{g(x)} = C$, slijedi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 < b$, tako da vrijedi

$$C - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < C + \varepsilon, \text{ za } \beta_0 < x < b.$$

Odavde je

$$f(x) < (C+\varepsilon)\,g(x), \quad \text{za } \beta_0 < x < b,$$

pa iz konvergencije integrala (4.2), a samim tim i integrala $\int\limits_a^{\beta}(C+\varepsilon)\,g(x)\,dx$, slijedi i integracija integrala (4.1).

ii) Pretpostavimo da integral (4.2) divergira i da je $0 < C \le +\infty$. Treba dokazati da divergira i integral (4.1). U tu svrhu pretpostavimo suprotno, to jest da integral (4.1) konvergira. Iz pretpostavke teorema slijedi

$$\lim_{x\uparrow b}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{C}, \quad 0 \le \frac{1}{C} < +\infty.$$

Prema dokazanom u i), iz konvergencije integrala (4.1), slijedila bi i konvergencija integrala (4.2), što je kontradikcija! ■

Primjer 4.1.4 *Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Rješenje. Primijetimo da je integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ konvergentan. Kako je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

primjenom Teorema 4.1.5, slijedi da je i dati integral konvergentan. ♣

Navedimo još jedan važan kriterij konvergencije nesvojstvenog integrala (bez dokaza), analogan odgovarajućem kriteriju za redove.

Teorem 4.1.6 *(Abel-Dirichlet)*

Pretpostavimo da su funkcije f i g definirane na $[a,b)$ i integrabilne na svakom segmentu $[a,\beta] \subset [a,b)$. Da bi nesvojstveni integral

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

bio konvergentan dovoljno je da su ispunjeni uvjeti:

(D1) f ima ograničenu primitivnu funkciju;

(D2) g monotono teži ka nuli kad $x \uparrow b$;

ili

(A1) nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ konvergira;

(A2) g je monotona i ograničena na $[a,b)$.

Primjer 4.1.5 *Nesvojstveni integral* $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{1+x^n} dx$ *($a \in \mathbb{R}$, $n > 0$) konvergira jer funkcija* $\sin ax$ *(za $a \neq 0$) ima ograničenu primitivnu funkciju, a funkcija* $\dfrac{\sin ax}{1+x^n}$ *monotono teži ka nuli kad $x \to +\infty$.* ♣