Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Primjena diferentnih jednadžbi prvog reda

Diferentne jednadžbe imaju višestruke primjene u različitim naučnim disciplinama: matematici, fizici, hemiji, matematičkoj biologiji, medicini, ekonomiji, društvenim naukama itd. Ovdje ćemo ukratko ilustrirati neke od tih primjena.

Primjena u matematici

- **Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi**

Poznato je da se diferencijalne jednadžbe veoma mnogo koriste kao mate-matički modeli u ispitivanju različitih bioloških, fizičkih, hemijskih i drugih procesa. Takvi modeli opisuju populacije ili objekte koji se razvijaju neprekidno i u kojima je vrijeme (ili neovisna varijabla) podskup skupa realnih brojeva. Nasuprot njima, dife-rentne jednadžbe opisuju populacije ili objekte koji se razvijaju diskretno i u kojima je vrijeme (ili neovisna varijabla) podskup skupa cijelih brojeva. U mnogim slučajevima nije moguće riješiti datu diferencijalnu jednadžbu. Zbog toga se u takvim situacijama pristupa korištenju numeričkih metoda za približno rješavanje diferencijalne jednadžbe. Korištenje numeričkih shema pri aproksimaciji rješenja diferencijalne jednadžbe dovode do konstrukcija odgovarajućih diferentnih jednadžbi koje su pristupačnije za računanja bilo upotrebom grafičkih kalkulatora, bilo upotrebom kompjutera. Ovdje ćemo predstaviti jednu od jednostavnijih numeričkih shema. Riječ je o jednom od najstarijih numeričkih metoda, dobro poznatom *Eulerovom metodu*.

Promatrajmo sljedeći Cauchyjev problem (sa diferencijalom jednadžbom prvog reda)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \le t \le T. \tag{1}$$

Podijelimo interval $[t_0, T]$ na N jednakih dijelova tačkama podjele (čvorovima) $t_0, t_1, ..., t_N = T$. Dužinu svakog od dobijenih podintervala možemo označiti sa $h = \frac{T-t_0}{N}$. Jasno je sada da vrijedi

$$t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Ideja u Eulerovom metodu je da se $x'(t)$ aproksimira sa

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Izvršimo li ovu zamjenu u jednadžbi (1), dobije se

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)).$$

Za $t = t_0 + nh$, imamo

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hf(t_0 + nh, x(t_0 + nh))$$

za $n = 0, 1, ..., N-1$. Zamjenom $x(t_0 + nh) = x_n$, konačno dobijamo odgovarajuću diferentnu jednadžbu

$$x_{n+1} = x_n + hf(n, x_n), \tag{2}$$

koja predstavlja *Eulerov algoritam* za aproksimciju rješenja diferencijalne jednadžbe (1) u tačkama podjele (čvorovima). Uočimo da je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2) ako i samo ako je $f(\overline{x}) = 0$. Dakle, diferencijalna jednadžba (1) i diferentna jednadžba (2) imaju iste tačke ekvilibrijuma.

Primjedba 1 *Slično prethodnoj diferentnoj shemi, može se doći i do nekih drugih. To se, recimo, može postići tako što bi se $x'(t)$ moglo aproksimirati nekim od sljedećih izraza*

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h}, \qquad \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h},$$

odnosno, ako se u jednadžbi (1) pojavljuje $x^2(t)$, da se on aproksimira nekim od izraza

$$x_n^2, \quad x_{n+1}x_n, \quad x_{n+1}^2 \quad \frac{x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2}{3},$$

i tome slično.

- **Diracov problem o tri ribara**

Vidjeti tekst s istim naslovom u časopisu *Evolventa, Vol. 1, No. 1, Tuzla 2018. (www.umtk.info)*

Primjena u medicini

Primjer 2 *Poznato je da se neki lijek daje pacijentu na svakih šest sati. Neka S_n označava količinu tog lijeka u krvnom sistemu pacijenta na kraju n-tog vremenskog intervala. Poznato je, također, da tijelo pacijenta eliminira određeni dio p lijeka u toku svakog vremenskog intervala. Ako je početna doza S_0, odrediti S_n i $\lim_{n\to\infty} S_n$.*

Rješenje. Za ovaj proces može se formirati odgovarajući matematički model u obliku diferentne jednadžbe. Naime, kako je količina lijeka u krvnom sistemu pacijenta u $(n+1)$-vom vremenskom intervalu jednaka količini lijeka u n-tom intervalu, umanjenoj za dio p te količine koju tijelo eliminira i uvećanoj za novu dozu S_0, dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$S_{n+1} = (1-p)\,S_n + S_0 \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Prema formuli za opće rješenje neautonomne diferentne jednadžbe prvog reda imamo

$$S_n = \left[S_0 - \frac{S_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{S_0}{p} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_0}{p}.$$

Tako u konkretnom slučaju, za $S_0 = 2$ kubna centimetra (ccm) i $p = 0.4$, dobijamo jednadžbu

$$S_{n+1} = 0.6S_n + S_0, \quad S_0 = 2.$$

Tabela 2.3 sadrži podatke o količini S_n, za $0 \leq n \leq 7$.
Također, važno je uočiti da je u ovom slučaju $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_0}{p} = 5$, ali i da je, prema primjedbi o konstantnom rješenju neautonomne linearne diferentne jednadžbe prvog reda, $S^* = \dfrac{S_0}{1-0.6} = 5$ *ccm*, gdje S^* označava ekvilibrijum sadržaja lijeka u krvi (a koji se približno dostiže nakon nekoliko vremenskih intervala, što podrazumijeva da treba pratiti tabelu).

Tabela 2.1 Vrijednosti za S_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7
S_n	2	3.2	3.92	4.352	4.6112	4.7667	4.86	4.916

♣

Primjene u ekonomiji

Razmatrat ćemo sad neke slučajeve iz prakse u ekonomiji koji se mogu matematički modelirati, pri čemu su ti modeli linearne diferentne jednadžbe prvog reda. Naime, primjena diferentnih jednadžbi u ekonomiji je vrlo rasprostranjena jer se mnogi ekonomski procesi mogu modelirati u obliku diferentnih jednadžbi. Svakako je najčešći slučaj obračuna kamate i amortizacije, ali i neki drugi vrlo važni, kao što su: rast nacionalnog dohotka, model paukove mreže (cobweb model) i tome slično.

- **Obračun kamate**

Ovdje ćemo razmotriti nekoliko slučajeva obračuna kamate na uložena sredstva, pri čemu se podrazumijeva da se kamata obračunava na zatečeni iznos na kraju obračunskog perioda, a da se eventualna ulaganja izvode isključivo ili na početku ili na kraju obračunskog perioda.

Slučaj 3 *Pretpostavimo da se na početku jednog obračunskog perioda u banku uložio iznos novca I. Postavlja se pitanje: koje će stanje novca biti na kraju n-tog obračunskog perioda ako se na kraju svakog obračunskog perioda zaračunava kamata po stopi r (u decimalnom obliku kao $r = \frac{p}{100}$, gdje je $p\%$ kamatna stopa u procentima)?*

Označimo sa I_n stanje računa na kraju n-tog perioda (tako da je $I_0 = I$). Na kraju $(n+1)$-vog perioda ovo stanje će biti uvećano za obračunatu kamatu na taj iznos, tj. za iznos rI_n. Dakle, vrijedi

$$I_{n+1} = I_n + rI_n,$$

odnosno,

$$I_{n+1} = (1+r)\,I_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \,. \tag{3}$$

Očito je (3) homogena diferentna jednadžba prvog reda oblika $x_{n+1} = ax_n$, čije je rješenje dato sa $x_n = a^n x_0$, pri čemu je $a = 1 + r$, odnosno,

$$I_n = (1+r)^n\, I_0 = (1+r)^n\, I, \tag{4}$$

a to i predstavlja traženo stanje računa na kraju n-tog obračunskog perioda.

Primjer 4 *Odrediti broj godina potrebnih da se određena suma novca uložena u banku udvostruči, ako se na nju primjenjuje ukamaćivanje na kraju svake godine na zatečeni iznos novca s kamatnom stopom od 2% godišnje.*

Rješenje. Označimo li sa I_n iznos novca na kraju n-te godine, vidimo da je on rješenje diferentne jednadžbe

$$I_{n+1} = (1+r)\,I_n,$$

gdje je $r = 0,02$ kamatna stopa. Prema (4) imamo

$$I_n = (1+r)^n\, I_0,$$

gdje je I_0 iznos uložene sume novca. Prema uvjetima zadatka imamo $I_n = 2I_0$, pa vrijedi

$$2I_0 = (1+r)^n\, I_0 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log(1+r)} = \frac{\log 2}{\log\left(1+\frac{2}{100}\right)} = 35.0027.$$

Dakle, za 35 godina će se suma novca, uz navedene uvjete, udvostručiti. ♣

Slučaj 5 *Pretpostavimo da se konstantna suma novca R deponuje na kraju svakog obračunskog perioda u nekoj banci, pri čemu se na zatečeni iznos primje-njuje obračun kamate na kraju svakog obračunskog perioda sa stopom r. Ponovo nas zanima isto pitanje: koje je stanje računa na kraju n-tog obračunskog perioda?*

Očito je da je stanje računa na kraju $(n+1)$-og obračunskog perioda jednak zbiru iznosa novca stanja računa na kraju n-tog perioda, kamate obračunate na taj iznos po stopi r i novca u iznosu R koji se uplaćuje za svaki obračunski period, tj.

$$I_{n+1} = (1+r)\,I_n + R, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{5}$$

gdje je $I_0 = 0$. Rješenje ove diferentne jednadžbe je

$$I_n = R\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \tag{6}$$

Slučaj 6 *Razmotrimo sada situaciju sličnu prethodnom slučaju, samo pretpostavimo da se konstantna suma novca R deponuje na početku svakog obračunskog perioda.*

Naime, i ovdje se dobije ista diferentna jednadžba, tj. (5), s tim da ovdje početni ulog I_0 nije 0, nego je $I_0 = R$. Prema formuli za opće rješenje neautonomne linearne diferentne jednadžbe prvog reda, za $I_0 = R, a = 1 + r, b = R$, imamo

$$\begin{aligned} I_n &= \left(I_0 - \frac{R}{1-(1+r)}\right)(1+r)^n + \frac{R}{1-(1+r)} \\ &= \left(R + \frac{R}{r}\right)(1+r)^n - \frac{R}{r}, \end{aligned}$$

odnosno,

$$I_n = R\frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r}. \tag{7}$$

Slučaj 7 *Pretpostavimo da je na početku prvog obračunskog perioda deponovano novca u iznosu I u nekoj banci i pretpostavimo da se konstantna suma novca R deponuje na kraju svakog obračunskog perioda. Ako se na zatečeni iznos primjenjuje obračun kamate na kraju svakog obračunskog perioda sa stopom r, koje će stanje računa biti na kraju n-tog obračunskog perioda?.*

Kao i u prethodna dva slučaja imamo istu diferentnu jednadžbu (5), pri čemu je $I_0 = I$. Prema formuli za opće rješenje neautonomne linearne diferentne jednadžbe prvog reda, za $I_0 = I, a = 1 + r, b = R$, imamo

$$I_n = \left(I_0 - \frac{R}{1-(1+r)}\right)(1+r)^n + \frac{R}{1-(1+r)},$$

odnosno,

$$I_n = \left(I + \frac{R}{r}\right)(1+r)^n - \frac{R}{r}. \tag{8}$$

- **Amortizacija otplate zajma**

Amortizacija je proces kojim se otplaćuje određeni zajam putem niza periodičnih rata, pri čemu svaka od njih sadrži i dio otplate osnovnog duga (glavnice) i dio kamate koja se zaračunava na neotplaćeni dio duga za svaki vremenski period posebno. Pretpostavljamo, dakle, da je u pitanju obračun kamate na zatečeni iznos, koji se primjenjuje po stopi r za svaki vremenski period otplate ukupnog duga. Sa p_n označimo neotplaćeni dio duga nakon n-te uplate g_n (dakle, uplate u općem slučaju ne moraju biti jednake).
Formulacija našeg modela ovdje je bazirana na činjenici da je neotplaćeni dio duga p_{n+1}, nakon $(n+1)$-ve rate otplate duga, jednak zbiru neotplaćenog dijela duga p_n nakon n-te rate otplate duga i kamate rp_n obračunate u toku $(n+1)$-og perioda, umanjenog za ratu g_n. Dakle,

$$p_{n+1} = p_n + rp_n - g_n = (1+r)\,p_n - g_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Prema ranije spomenutoj formuli za opće rješenje linearne diferentne jednadžbe gornjeg oblika, imamo

$$p_n = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g_k.$$

U praksi, rata otplaćivanja duga g_n je konstantna i, recimo, jednaka G. Zamjenom u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} p_n &= (1+r)^n p_0 - (1+r)^n G \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k-1} \\ &= (1+r)^n p_0 - [(1+r)^n - 1]\left(\frac{G}{r}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Ako želimo zajam otplatiti u tačno n rata, postavlja se pitanje kolika će biti rata otplate duga? Naravno, tada je $p_n = 0$, pa zamjenom u (9), imamo

$$G = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]. \tag{10}$$

Primjer 8 *Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od 100\$ uz kamatnu stopu od 5% mjesečno. Amortizacioni plan treba da sadrži: mjesec (odnosno, broj rate), neplaćeni dio glavnice početkom mjeseca, iznos rate otplate duga na kraju mjeseca (anuitet), strukturu anuiteta, koja podrazumijeva iznos kamate obračunate na neplaćeni dio duga na kraju obračunskog perioda (tj. mjeseca) i dio otplate glavnice. Plan praviti prema pretpostavci da će zajam biti otplaćen u pet rata.*

Rješenje. Izračunajmo prvo iznos mjesečne rate otplate duga (anuiteta). Uzimajući da je $p_0 = 100\$$ i $r = 5\% = \frac{5}{100}$, iz (10) dobijamo

$$G = 100 \frac{\frac{5}{100}}{1 - \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{-5}} = 23.09748(\$) \approx 23.10(\$).$$

Tabela 2.2 Amortizacioni plan

Mjesec	Neplaćeni dio glavnice poč. mj.	Anuitet	Kamata od 5% (dio anuiteta)	Otplata glavnice (dio an.)
1	100.00$	23.10$	5.00$	18.10$
2	81.90	23.10	4.10	19.00
3	62.90	23.10	3.14	19.96
4	42.94	23.10	2.15	20.95
5	21.99	23.10	1.10	22.00
6	-0.01			
Ukupno:		115.50$	15.49$	100.01$

Uočimo da je na kraju prvog mjeseca na dug od 100$ obračunato 5% kamate, što iznosi 5.00$. To znači da dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice iznosi $23.10 - 5.00 = 18.10$ ($). Zbog toga je početkom drugog mjeseca neotplaćeni dio glavnice $100.00 - 18.10 = 81.90$ ($). Na taj se iznos obračunava 5% kamate, što iznosi 4.10$, pa je dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice $23.10 - 4.10 = 19.00$ ($), i tako dalje. Iz ovoga se vidi da se vremenom učešće kamate u anuitetu smanjuje, a dio koji se odnosi na otplatu glavnice raste. ♣