Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Primjena linearnih diferentnih jednadžbi višeg reda - II

B) Primjena u drugim naukama

B1) Primjena u biologiji

- **Razmnožavanje jednogodišnjih biljaka**

Ovdje nam je cilj da pokažemo kako se jedan veoma zanimljiv biološki proces može modelirati u diskretnom vremenu. Riječ je o razmnožavanju jednogodišnjih biljaka. Ovim modelom, ustvari, bit će opisan broj biljaka u bilo kojoj željenoj generaciji. Poznato je da biljke proizvode sjeme na kraju sezone njihova rasta (recimo u augustu), nakon čega one umiru. Osim toga, samo dio ovog sjemena uspije preživjeti zimu, a ono sjeme koje preživi proklija na početku sezone (recimo u maju) dajući izvor za novu generaciju biljke.
Uvedimo sljedeće oznake:

$m =$ broj sjemenki proizvedenih po biljci u augustu,
$k =$ postotak sjemena star jednu godinu koji klija u maju,
$l =$ postotak sjemena star dvije godine koji klija u maju,
$w =$ postotak sjemena koji preživljava datu zimu.

Neka nam b_n označava broj biljaka u n-toj generaciji. Taj broj je jednak zbiru broja biljaka koje se razvijaju iz sjemena starog jednu godinu i broja biljaka koje se razvijaju iz sjemena starog dvije godine. Matematski zapisano to izgleda ovako

$$b_n = ks_n^{(1)} + ls_n^{(2)}, \tag{1}$$

gdje $s_n^{(1)}$ (odnosno, $s_n^{(2)}$) označava broj sjemenki starih jednu godinu (odnosno, dvije godine). Primijetimo da je broj sjemenki preostalih nakon klijanja jednak proizvodu postotka onih koje nisu proklijale i originalnog broja sjemena u aprilu, to jest

$$\widetilde{s}_n^{(1)} = (1-k)\, s_n^{(1)}, \tag{2}$$

$$\widetilde{s}_n^{(2)} = (1-l)\, s_n^{(2)}, \tag{3}$$

gdje je $\widetilde{s}_n^{(1)}$ (odnosno, $\widetilde{s}_n^{(2)}$) broj sjemenki starih jednu godinu (odnosno, dvije godine) preostalih u maju nakon što su neke proklijale. Novo sjeme $s_n^{(0)}$ (0 godina staro) je proizvodeno u augustu sa stopom m po biljci, pa se može izraziti formulom

$$s_n^{(0)} = mb_n. \tag{4}$$

Nakon zime, sjeme $s_n^{(0)}$, koje je bilo novo u n-toj generaciji, bit će jednu godinu staro u sljedećoj $(n+1)$-oj generaciji, a dio njega, $ws_n^{(0)}$, će preživjeti. Dakle,

$$s_{n+1}^{(1)} = ws_n^{(0)},$$

ili, prema formuli (4),

$$s_{n+1}^{(1)} = mwb_n. \tag{5}$$

Slično je

$$s_{n+1}^{(2)} = w\widetilde{s}_n^{(1)},$$

odnosno, koristeći (2),

$$s_{n+1}^{(2)} = w\,(1-k)\, s_n^{(1)},$$

ili

$$s_{n+1}^{(2)} = w^2 m\,(1-k)\, b_{n-1}. \tag{6}$$

Zamjenom (5) i (6) u (1), dobije se

$$b_{n+1} = kmwb_n + lw^2 m\,(1-k)\, b_{n-1},$$

ili

$$b_{n+2} = kmwb_{n+1} + lw^2m\,(1-k)\,b_n. \tag{7}$$

Karakteristična jednadžba diferentne jednadžbe (7) je

$$\lambda^2 - kmw\lambda - lw^2m\,(1-k) = 0,$$

sa karakterističnim korijenima

$$\lambda_\pm = \frac{kmw}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4l}{mk^2}\,(1-k)}\right].$$

Kako je $1-k>0$, to su oba karakteristična korijena realni brojevi, pri čemu je $\lambda_+>0$ i $\lambda_-<0$. Da bismo obezbijedili razmnožavanje (to jest da b_n raste neograničeno kad $n\to\infty$) potrebno je da bude $\lambda_+>1$. Isti zahtjev ne postavljamo na λ_-, jer je on negativan i dovodi do neželjenih oscilacija u veličini biljne populacije. Dakle,

$$\frac{kmw}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4l}{mk^2}\,(1-k)}\right] > 1,$$

odakle slijedi

$$m > \frac{1}{kw + lw^2\,(1-k)}. \tag{8}$$

Ako je $l=0$, to jest ako nema sjemena starog dvije godine koje klija u maju, onda uvjet (8) postaje

$$m > \frac{1}{kw}. \tag{9}$$

Uvjet (9) pokazuje da se razmnožavanje biljke javlja ako produkt postotka sjemena proizvedenog po biljci u augustu, zatim postotka sjemena starog godinu dana koji klija u maju i postotka sjemena koji preživi datu zimu, prevazilazi 1.

B2) Primjena u ekonomiji

- **Pregovori između radnika i menadžmenta**

Sada ćemo konstruirati jedan relativno jednostavan model pregovora o visini plaća između radnika i menadžmenta. U tim pregovorima radnici zahtijevaju (redovnu) plaću od, recimo, R_0 dolara godišnje, dok je početna ponuda menadžmenta, recimo, M_0 dolara godišnje. Rješenje ovog problema treba da se nađe posredstvom pregovora između ova dva tabora. U svakom koraku pregovora radnički predstavnici podnose zahtjev o visini plaće menadžmentu. Općenito, očekuje se da menadžment ponudi iznos plaće koji je manji od radničkog zahtjeva, a to onda ima za posljedicu potrebu za nastavkom pregovora. Matematički model ove situacije može biti konstruiran pomoću pretpostavke da u svakom koraku pregovora menadžment korigira svoju prethodnu ponudu dodavanjem nekog dijela a razlike između potražnje i ponude u zadnjem koraku. S druge strane, za očekivati je da će i radnici svoju prethodnu ponudu korigirati oduzimanjem nekog dijela b razlike između potražnje i ponude u zadnjem koraku.
Označimo, respektivno, sa M_n i R_n ponudu menadžmenta i potražnju radnika u n-tom koraku. Dinamičke jednadžbe kojima se opisuje ovaj pregovarački proces izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n + a\,(R_n - M_n) \\ R_{n+1} &= R_n - b\,(R_n - M_n)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

gdje su a i b pozitivne konstante koje zadovoljavaju sljedeće uvjete

$$0<a<1, \quad 0<b<1. \tag{11}$$

Jednadžbe (10) se mogu napisati i u obliku

$$M_{n+1} = (1-a)\,M_n + aR_n \tag{12}$$

$$R_{n+1} = bM_n + (1-b)\,R_n. \tag{13}$$

Eliminacijom R_n, dobija se diferentna jednadžba

$$M_{n+2} - (2-a-b)\, M_{n+1} + (1-a-b)\, M_n = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - (2-a-b)\, \lambda + (1-a-b) = 0,$$

čija su rješenja

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1-a-b.$$

Prema tome, M_n ima sljedeći prikaz

$$M_n = c_1 + c_2\, (1-a-b)^n\,,$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.
S druge strane, iz (12) za R_n imamo

$$R_n = \frac{1}{a} M_{n+1} - \frac{1-a}{a} M_n,$$

odnosno,

$$R_n = c_1 - \frac{b}{a} c_2 (1-a-b)^n.$$

Konstante c_1 i c_2 možemo odrediti uvođenjem početnih uvjeta:

$$c_1 + c_2 = M_0,$$

$$c_1 - \frac{b}{a} c_2 = R_0.$$

Dakle,

$$c_1 = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b}, \qquad c_2 = -\frac{a(R_0 - M_0)}{a+b}.$$

Zbog $R_0 > M_0$, imamo da je $c_1 > 0$, a $c_2 < 0$, pa je konačno

$$M_n = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b} - \frac{a(R_0 - M_0)}{a+b} (1-a-b)^n,$$

$$R_n = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b} + \frac{b(R_0 - M_0)}{a+b} (1-a-b)^n.$$

Analizom ovih jednakosti dolazimo do sljedećih zaključaka:

i) Ako želimo imati monotonu konvergenciju, to jest da se M_n stalno povećava, a R_n stalno smanjuje, onda je

$$0 < a+b < 1.$$

ii) Konačan iznos plaće, w, dogovoren između radnika i rukovodstva je

$$w = M_\infty = R_\infty = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b}.$$

Napomenimo da w leži između R_0 i M_0, što smo i mogli pretpostaviti, to jest

$$M_0 < w < R_0.$$

B3) Primjene u medicini

- **Proizvodnja crvenih krvnih zrnaca**

Glavna funkcija crvenih krvnih zrnaca (RBC) je transport oksigena kroz cijelo tijelo. Na početku uzmimo da je ukupan broj RBC konstantan. Međutim, data RBC imaju konačan vijek; tako RBC redovno bivaju uništavana i stvarana. Da bismo modelirali ovaj proces trebaju nam sljedeće pretpostavke:

i) Slezana uništava određeni dio RBC svaki dan;

ii) Koštana srž stvara broj novih RBC svakodnevno i to je proporcionalno broju RBC izgubljenih tokom prošlog dana.

Da bismo mogli brojati promjene crvenih krvnih zrnaca, uvedimo sljedeće oznake:

- R_n = broj RBC u toku n-tog dana;
- S_n = broj RBC koje slezana uništi u toku n-tog dana;
- M_n = broj RBC koje koštana srž stvori u toku n-tog dana.

Model za RBC je dat sljedećim izrazom

$$\Delta R_n = -S_n + M_n. \tag{14}$$

Na osnovu pretpostavki i) i ii) imamo

$$S_n = lR_n, \qquad 0 < l < 1, \tag{15}$$

gdje je l dio od ukupnog broja RBC u toku n-tog dana koje slezana uništi, i

$$M_n = \alpha l R_{n-1}, \qquad \alpha > 0, \tag{16}$$

gdje je α konstanta proizvodnje, jednaka omjeru broja stvorenih RBC i onih koji su izgubljeni. Zamjenom jednakosti (15) i (16) u jednadžbu (14), dobijamo

$$R_{n+2} = (1-l)R_{n+1} + \alpha l R_n. \tag{17}$$

Ova jednadžba opisuje kako se mijenja količina RBC svakodnevno. Karakteristična jednadžba jednadžbe (17) je

$$\lambda^2 - (1-l)\lambda - \alpha l = 0.$$

Njeni korijeni su

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[(1-l) \pm \sqrt{(1-l)^2 + 4\alpha l}]. \tag{18}$$

Kako su α i l pozitivni brojevi, to imamo da je

$$\lambda_+ > 0, \qquad \lambda_- < 0.$$

Opće rješenje jednadžbe (17) je

$$R_n = c_1(\lambda_+)^n + c_2\left(\lambda_-\right)^n,$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.
Ispitajmo sada uvjete pod kojim se pojavljuju homeostaze u broju RBC. Ovo, zapravo, znači da je R_n konstantan (bar asimptotski u n-tom periodu). Neophodan uvjet za to je da jedan od korijena karakteristične jednadžbe bude jednak 1, dok drugi korijen treba da je po apsolutnoj vrijednosti manji od 1.
Neka je $\lambda_+ = 1$. Tada iz jednadžbe (18) imamo

$$1 = \frac{1}{2}[(1-l) + \sqrt{(1-l)^2 + 4\alpha l},$$

što je moguće samo ako je

$$\alpha = 1.$$

Znači, postizanje homeostaze kod RBC je moguće samo ako je brzina proizvodnje jednaka 1. To znači da koštana srž mora proizvoditi onoliko RBC koliko se izgubi svaki dan.
Sada se pitamo kolika je vrijednost λ_-? Stavljanjem $\alpha = 1$ u λ_-, dobijamo da je

$$\lambda_- = -l.$$

Dakle, zbog $0 < l < 1$, λ_- je, ustvari, po apsolutnoj vrijednosti manji od 1.

Konačno, možemo napisati sljedeći izraz za dnevnu proizvodnju RBC

$$R_n = c_1 + c_2(-l)^n.$$

Primijetimo da ovaj izraz odgovara konstantnom dnevnom broju RBC sa prigušenim oscilacijama.

B4) Primjene u društvenim naukama

- **Model ruralno-urbane migracije**

Pretpostavimo da se u nekoj maloj zemlji cjelokupna populacija stanovništva sastoji od dva različita dijela: ruralnog i urbanog (tj. seoskog i gradskog). Ovdje ćemo konstruirati jedan jednostavan model o tome kako se mijenja distribucija stanovništva migracijom osoba između pripadnika ruralne i urbane populacije. U tu svrhu nametnućemo sljedeće tri pretpostavke:

i) Za godišnje faktore rasta obiju populacija pretpostavićemo da su isti i jednaki α. Dakle, populacija u $(n+1)$-oj godini je jednaka α puta populaciji u n-toj godini.

   Distribucija populacije u datom vremenskom intervalu je određena brojem osoba u ruralnom i urbanom segmentu, respektivno. Međutim, ova distribucija se mijenja migracijom između ruralne i urbane zajednice. Zbog toga što seosko stanovništvo snabdijeva hranom cjelokupno stanovništvo zemlje, stopa migracije će biti pod utjecajem potrebe za odgovarajućim osnovnim nivoom ruralne aktivnosti.

ii) Pretpostavit ćemo da je optimalna ruralna baza data dijelom γ cjelokupne populacije.

iii) Konačno ćemo pretpostaviti da je godišnji nivo migracije proporcionalan višku ruralne populacije koja je iznad optimalne ruralne baze.

Da bismo konstruirali model, potrebno je gornje tri pretpostavke prevesti u jednadžbe koje pokazuju kako se ruralna i urbana populacija mijenjaju kao funkcija diskretnog vremena n. Neka nam R_n i U_n označavaju, respektivno, ruralnu i urbanu populaciju u n-toj godini. Ukupna populacija je $R_n + U_n$, a prema pretpostavci *ii)* optimalna ruralna baza je $\gamma(R_n + U_n)$. Višak ruralne populacije je razlika između ruralne populacije i optimalne ruralne baze, to jest $R_n - \gamma(R_n + U_n)$. Ako sve ove rezultate postavimo zajedno, dobit ćemo sljedeće jednadžbe kojima se opisuje migracioni proces:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \alpha R_n - \beta\left[R_n - \gamma(R_n + U_n)\right], \\ U_{n+1} &= \alpha U_n + \beta\left[R_n - \gamma(R_n + U_n)\right], \end{aligned} \tag{19}$$

gdje je β konstantni migracioni faktor. Ovaj se model može jednostvnije pisati kao

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \left[\alpha - \beta(1-\gamma)\right] R_n + \beta\gamma U_n, \\ U_{n+1} &= \beta(1-\gamma) R_n + (\alpha - \beta\gamma) U_n. \end{aligned} \tag{20}$$

Općenito, mi očekujemo da tri parametra u dobijenom modelu zadovoljavaju uvjete

$$\alpha > 1, \qquad \beta > 0, \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{21}$$

Za realističniji model trebalo bi i ove parametre smatrati funkcijama diskretnog vremena n. Međutim, za ovu našu svrhu dovoljno je da ti parametri budu konstante.
Gornji model (20) je sistem od dvije linearne diferentne jednnadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentima, koji se može svesti na diferentnu jednadžbu drugog reda. Naime, iz prve jednadžbe u (20) može se izraziti U_n:

$$U_n = \frac{R_{n+1} - \left[\alpha - \beta(1-\gamma)\right] R_n}{\beta\gamma}.$$

Koristeći ovu relaciju u drugoj jednadžbi (20), imamo

$$\frac{R_{n+2} - [\alpha - \beta (1-\gamma)] R_{n+1}}{\beta\gamma} = \beta (1-\gamma) R_n + (\alpha - \beta\gamma) \frac{R_{n+1} - [\alpha - \beta (1-\gamma)] R_n}{\beta\gamma},$$

odnosno,

$$R_{n+2} - (2\alpha - \beta) R_{n+1} + \alpha (\alpha - \beta) R_n = 0, \tag{22}$$

što je linearna diferentna jednadžba drugog reda s konstanim koeficijentima. Nakon rješavanja te jednadžbe i uvrštavanjem njenog rješenja u prvu jednadžbu modela (20), konačno ćemo dobiti rješenje tog diskretnog modela migracije. Karakteristična jednadžba jednadžbe (22) je

$$\lambda^2 - (2\alpha - \beta) \lambda + \alpha (\alpha - \beta) = 0,$$

čija su rješenja

$$\lambda_1 = \alpha, \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta.$$

Sada je opće rješenje jednadžbe (22)

$$R_n = c_1 \alpha^n + c_2 (\alpha - \beta)^n ,$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Kako smo već objasnili, dobijamo i

$$U_n = c_1 \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \alpha^n - c_2 (\alpha - \beta)^n . \tag{23}$$

Analizirajmo sada dobijena rješenja.

1) Cjelokupna populacija raste sa faktorom α svake godine.

2) Neka ruralna populacija ima više ljudi nego što je potrebno za optimalnu ruralnu bazu. Migracija se tada kreće iz ruralnog u urbani sektor sa stopom rasta $\alpha - \beta$. (Pri tome pretpostavljamo da je $\alpha > \beta > 0$.) Ova migracija je monotona, to jest ima isti smjer svake godine, iz ruralne u urbanu populaciju. Zato što je faktor rasta ruralne neuravnoteženosti manji od faktora rasta cjelokupne populacije, relativna neuravnoteženost (količnik neuravnoteženosti i cjelokupne populacije) će eventualno postati nula.

3) Ako je $\beta > \alpha$, to jest $\alpha - \beta < 0$, tada migraciona populacija oscilira. Jedne godine je migracija iz sela u grad jača, a druge iz grada u selo.

Gornji zaključci slijede iz općeg oblika rješenja modela (20) datih jednakostima (22) i (23). Oni nisu ovisni, u detaljima, o posebnim vrijednostima parametara (α, β, γ). Mi samo zahtijevamo da su zadovoljeni uvjeti (21).

Zadaci za vježbu:
3.3.59, 3.3.60