Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Primjena linearnih diferentnih jednadžbi višeg reda

A) Primjena u matematici

- **Fibonacciev niz**

Primjer 1 ***Fibonacciev niz (problem sa zečevima)***. *Ovaj problem se prvi put pojavio 1202. godine u "Liber abaci" (knjiga o računaljkama) koju je napisao poznati italijanski matematičar Leonardo di Pisa, poznat kao Fibonacci. Problem se može postaviti ovako: Koliko parova zečeva će biti poslije godinu dana, ako krenemo sa jednim zrelim parom i ako svaki par dobije novi par mladih svakog mjeseca čim dostignu starost od 2 mjeseca.*

Tabela 3.2 Broj parova zečeva po mjesecima

mjesec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
parovi	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Rješenje. Tabela 3.2 pokazuje broj parova na kraju svakog mjeseca. Naime, prvi par ima potomke na kraju prvog mjeseca i tu imamo dva para. Na kraju drugog mjeseca samo prvi par ima potomke i zato imamo 3 para. Na kraju trećeg mjeseca i prvi i drugi par će imati potomke, pa imamo 5 parova. Nastavivši postupak dolazimo do Tabele 3.2. Ako je F_n broj parova zečeva na kraju n mjeseci, tada je rekurentna relacija koja predstavlja ovaj model data linearnom diferentnom jednadžbom drugog reda

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 1, F_1 = 2, \ 0 \leqslant n \leqslant 10.$$

Ovaj primjer je specijalan slučaj Fibonaccievog niza datog sa

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, F_1 = 1, \ n \geqslant 0. \tag{1}$$

Prvih 14 članova je dato sa: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, kao što je rečeno u problemu sa zečevima. Karakteristična jednadžba jednadžbe (1) je:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Karakteristični korijeni su $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pa je opće rješenje jednadžbe (1)

$$F_n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geqslant 1.$$

Koristeći početne vrijednosti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, dobijamo

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

zbog čega je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

Interesantno je uočiti da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \alpha \approx 1,618.$$

Primijetimo da je ovaj broj poznat pod nazivom zlatni presjek. ♣

Primjer 2 *Ako je F_n n-ti Fibonacciev broj, izračunati sumu*

$$\sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n}{k} F_k.$$

Rješenje. Neka je

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad i \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Primijetimo da je

$$\sqrt{5} = 2\alpha - 1 = 1 - 2\beta.$$

Odavde slijedi

$$5^n = (2\alpha-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (2\alpha)^k (-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n}{k} \alpha^k,$$

$$5^n = (2\beta-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (2\beta)^k (-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n}{k} \beta^k.$$

Oduzimanjem prethodne dvije relacije dobijamo

$$0 = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n}{k} (\alpha^k - \beta^k).$$

Kako je $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k - \beta^k)$, to je

$$0 = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n}{k} \sqrt{5} F_k,$$

tj. vrijedi

$$\sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \binom{2n}{k} F_k = 0. \ \clubsuit$$

- **Chebyshevljevi polinomi**

Primjer 3 ***Chebyshevljevi polinomi prve i druge vrste*** *definirani su, respektivno, sa*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin[(n+1)\arccos x],$$

za $|x| < 1$.
a) Pokazati da $T_n(x)$ *zadovoljava jednadžbu*

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0, \quad T_0(x) = 1, \ T_1(x) = x. \tag{2}$$

b) Riješiti jednadžbu (2) i pronaći $T_n(x)$.
c) Pokazati da $U_n(x)$ *zadovoljava jednadžbu*

$$U_{n+2}(x) - 2xU_{n+1}(x) + U_n(x) = 0, \quad U_0(x) = 1, \ U_1(x) = 2x. \tag{3}$$

d) Izračunati prvih nekoliko članova nizova $T_n(x)$ *i* $U_n(x)$.
e) Pokazati da vrijedi

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Rješenje. *a)* Kako je

$$T_2(x) = \cos(2\arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = 2x^2 - 1,$$

to je

$$T_{n+1}(x) = x\cos(n\arccos x) - \sqrt{1-x^2}\sin(n\arccos x)$$

i

$$T_{n+2}(x) = \left(2x^2-1\right)\cos(n\arccos x) - 2x\sqrt{1-x^2}\sin(n\arccos x).$$

Direktnim uvrštavanjem vidimo da vrijedi

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0.$$

b) Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0,$$

a karakteristični korijeni su $\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$. Zbog toga je

$$T_n(x) = C_1\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + C_2\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

Koristeći početne uvjete, mogu se izračunati konstante C_1 i C_2:

$$T_0(x) = C_1 + C_2 = 1, \quad T_1(x) = C_1\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + C_2\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = x$$
$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

Prema tome,

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

No, po pretpostavci je $|x| < 1$, što znači da je

$$x \pm \sqrt{x^2-1} = x \pm i\sqrt{1-x^2} = e^{\pm i\varphi},$$

gdje je

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Kako je $\left|x \pm i\sqrt{1-x^2}\right| = 1$, to je onda

$$\cos\varphi = \frac{x}{1} = x \quad \text{ili} \quad \varphi = \arccos x.$$

S druge strane je

$$\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n = e^{-in\varphi} + e^{in\varphi} = 2\cos(n\varphi) = 2\cos(n\arccos x),$$

pa je

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots \quad .$$

c) Analogno kao pod a).

d) Iz jednadžbi (2) i (3) se jednostavnim iteriranjem dobija:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
&\vdots\\
U_2(x) &= 2xU_1(x) - U_0(x) = 4x^2 - 1,\\
U_3(x) &= 2xU_2(x) - U_1(x) = 8x^3 - 4x,\\
U_4(x) &= 2xU_3(x) - U_2(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jednostavnim induktivnim zaključivanjem vidimo da su $T_n(x)$ i $U_n(x)$ polinomi n-tog stepena.
e) Slijedi neposredno iz definicije Chebyshevljevih polinoma prve i druge vrste.

Uočimo još jednu vrlo važnu osobinu Chebyshevljevih polinoma prve vrste. U tu svrhu uzmimo

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Smjenom varijable $\varphi = \arccos x$, imamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)w(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} \cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \; d\varphi \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(n+m)\varphi + \cos(n-m)\varphi}{2} d\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

ako je $m \neq n$. Kažemo da su Chebyshevljevi polinomi prve vrste ortogonalni na $[-1,1]$ s "težinskom funkcijom" $w(x)$. Zbog ovih, ali i još nekih drugih, osobina oni igraju vrlo važnu ulogu u teoriji aproksimacija, posebno kad je u pitanju aproksimacija neprekidnih funkcija polinomima. ♣

- **Determinante**

Primjer 4 *(Tridijagonalna determinanta) Izračunati sljedeću determinantu reda n:*

$$\begin{vmatrix}
a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a
\end{vmatrix},$$

gdje su $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Rješenje. Označimo sa D_n datu determinantu. Razvijanjem odgovarajuće determinante reda $n+2$ po prvoj vrsti, dobija se

$$D_{n+2} = aD_{n+1} - bcD_n. \tag{4}$$

Razlikujemo tri kvalitativno različita slučaja.

1. $a^2 - 4bc > 0$, kada su korijeni odgovarajuće karakteristične jednadžbe

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4bc}\right)$$

(realni i različiti) i tada je

$$D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

pri čemu se konstante C_1 i C_2 određuju iz uvjeta

$$D_1 = a, \quad D_2 = a^2 - bc. \tag{5}$$

Na taj način dobijamo

$$C_1 = \frac{a\sqrt{a^2-4bc}+2bc-a^2}{2\sqrt{a^2-4bc}}, \quad C_2 = \frac{a\sqrt{a^2-4bc}-2bc+a^2}{2\sqrt{a^2-4bc}}.$$

2. $a^2 - 4bc = 0$, kada karaktersitična jednadžba ima dvostruko rješenje $\lambda = \frac{a}{2}$ i tada je

$$D_n = (C_1 + C_2 n)\,\lambda^n,$$

pri čemu se dobija, koristeći početne uvjete (5),

$$D_n = \left[2a^2 + 4\,(1-n)\,bc\right] 2^{-n} a^{n-2}.$$

3. $a^2 - 4bc < 0$, kada su korijeni karakteristične jednadžbe

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm i\sqrt{4bc-a^2}\right).$$

Napišimo ih u trigonometrijskom obliku. Tako imamo $r = \sqrt{bc}$, a argument φ izaberimo tako da vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{a}{2\sqrt{bc}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{4bc-a^2}}{2\sqrt{bc}},$$

tako da imamo

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{bc}\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi).$$

Opće rješenje diferentne jednadžbe (4) je

$$D_n = (bc)^{\frac{n}{2}}\,(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi).$$

Koristeći početne uvjete (5), određuju se konstante C_1 i C_2, te dobijamo

$$D_n = (bc)^{\frac{n}{2}}\,(\cos n\varphi + \cot\varphi\sin n\varphi) = (bc)^{\frac{n}{2}}\,\frac{\sin(n+1)\,\varphi}{\sin\varphi}, \quad n = 1, 2, ...$$

Može se pokazati da su u određenim slučajevima vrijednosti determinante periodične. Na primjer, za $a = b = c = 1$ imamo

$$D_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n+1)\,\frac{\pi}{3}, \quad n = 1, 2, ...,$$

što je ustvari niz $1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, ...$. ♣

Pokazati da je n-ti član Fibonaccievog niza jednak sljedećoj determinanti n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Rješenje. Označimo datu determinantu sa D_n. Razvijanjem D_n po 1. vrsti, imamo:

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = D_{n-1} - (-D_{n-2}) \\ &= D_{n-1} + D_{n-2}, \ \ n > 2, \end{aligned}$$

tako da D_n ima istu osobinu kao i n-ti Fibonaccijev broj (znajući da je $D_0 = 0$ i $D_1 = 1$), tj. vrijedi $D_n = F_n$ za sve $n \geq 0$. ♣

Zadaci za vježbu:
3.2.41, 3.2.42, 3.2.44, 3.2.46, 3.2.47
i
3.3.48-3.3.53