UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA
Predmetni nastavnik: Prof. dr. Mehmed Nurkanović

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pitanja za završni ispit

1. Granična vrijednost funkcije

1. a) Navesti Cauchyevu definiciju granične vrijednosti funkcije u općenitoj formi.

   b) Koje su dvije bitne karakteristike ove definicije?

   c) Napisati definiciju za bilo koji od specijalnih slučajeva za $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty. + \infty\}$ uz odgovarajuću geometrijsku interpretaciju.

   d) Po definiciji dokazati da vrijedi: $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^3 + 2\right) = 3$ i $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

   e) Pokazati da funkcija $\sigma(x) = sgn(x)$ nema granične vrijednosti u tački $x = 0$.

2. Jedinstvenost granične vrijednosti funkcije. Navesti i dokazati odgovarajuću tvrdnju.

3. Navesti kako se primjenjuje granična vrijednost u slučaju operacija s funkcijama. Izvesti dokaz u slučaju granične vrijednosti zbira funkcija.

4. Navesti i dokazati Heineov teorem o graničnoj vrijednosti funkcije.

5. Dokazatti sljedeću tvrdnju: Neka je a tačka gomilanja skupova D_f i D_g, $f(x) \leq g(x)$ za sve $x \in D_f \cap D_g$, tada je $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

6. Dokazati da je $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

7. Izračunati:

   a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, n \in \mathbb{N}$,

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}, n \in \mathbb{N}$,

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{x}, n \in \mathbb{N}$,

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n, odnosno m.

8. Dokazati: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

9. Ne koristeći L'Hospitalovo pravilo, izračunati: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{\sin x}$, $0 < a \neq 1$.

10. Navesti i dokazati Cauchy-Bolzanov kriterij konvergencije funkcija

11. a) Definicija oscilacije funkcije na skupu

    b) Izračunati: 1) $\omega\left(\sin x; \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, 2) $\omega\left(x^2; [-2, 1]\right)$, 3) $\omega\left(sgnx; [-2, 3]\right)$.

    c) Navesti Cauchyev princip. Pokazati da funkcija $\sin \frac{1}{x}$ nema graničnu vrijednost u tački $a = 0$.

12. a) Navesti definicije: beskonačno male veličine, beskonačno velike veličine, beskonačno male veličine u odnosu na neku drugu funkciju.

    b) Navesti i dokazati teorem o vezi između granične vrijednosti funkcije i odgovarajuće infinitezimale.

13. a) Objasniti značenja Landauovih simbola o i O. Kad za dvije funkcije kažemo da su istog reda?

    b) Da li su istog reda funkcije $1 - \cos x$ i x^2 kad $x \to 0$?

14. a) Navesti definiciju i osobine ekvivalentnih funkcija.

    b) Pokazati da je:

    1) $\sin x = x + o(x) \quad (x \to 0)$, 2) $e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0)$, 3) $a^x = 1 + x \ln a + o(x) \quad (x \to 0)$,

    4) $\ln(1+x)\, 0x + o(x) \quad (x \to 0)$, 5) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \quad (x \to 0)$,

    c) Koristeći b), izračunati: 1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x + x^2}\right)$. 2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Neprekidnost

1. Navesti sve definicije neprekidnosti funkcije u tački. Koje su razlike između definicije neprekidnosti funkcije u tački i Chauchyeve definicije granične vrijednosti funkcije u tački?

2. Neprekidnost funkcije u tački s lijeve i s desne strane. Neprekidnost funkcije na skupu. Objasniti značenje simboličkog zapisa: $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

3. Navesti i dokazati teorem neprekidnosti složene funkcije.

4. Veza između neprekidnosti funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ u tački $a \in D_f$ i neprekidnosti funkcije $|f|$, s o dgovarajućim dokazima, odnosno kontraprimjerima.

5. Vrste prekida funkcije (s grafičkom ilustracijom).

6. a) Definicija uniformne neprekidnosti funkcije.

   b) Ispitati uniformnu neprekidnost zadanih funkcija (i slično) na svom domenu:

   1) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

   3) $f : \mathbb{R} \to [-1.1],\ f(x) = \cos x$ 4) $f : \mathbb{R} \to [-1.1],\ f(x) = \sin x$.

7. Navesti sve osobine funkcija definiranih i neprekidnih na zatvorenom intervalu i dokazati jednu od njih (bit će konkretno navedeno koju).

8. Veza između monotonosti i neprekidnosti funkcije. Navesti sve tvrdnje i dokazati jednu od njih (bit će konkretno navedeno koju).

3. Diferencijalni račun funkcija jedne varijable

1. a) Definicija izvoda funkcije i definicija diferencijabilnosti funkcije

   b) Odrediti po definiciji izvode (i slično tome):

   1) $y'(1),\ y(x) = \sqrt{2x}$, 2) $f'(0),\ f(x) = \ln(2x+1)$, 3) $f'(0),\ f(x) = \sin 2x$.

2. Naći po definiciji izvode funkcija: c (c - konstanta), x^n ($n \in \mathbb{R}$), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\log_a x$,

3. Navesti vezu između diferencijabilnosti funkcije i formule o razlaganju (s dokazom).

4. Navesti vezu između diferencijabilnosti i neprekidnosti funkcije, s odgovarajućim dokazima, odnosno kontraprimjerima (barem tri kontraprimjera).

5. Navesti i dokazati pravilaz za izvode funkcije.

6. a) Navesti i dokazati teorem za izvod složene funkcije.

   b) Izvesti formule za $arshx$, $archx$ i $arthx$, pa onda odrediti njihove izvode.

7. Navesti i dokazati teorem o izvodu inverzne funkcije. Koristeći taj teorem, naći izvode sljedećih funkcija: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $arshx$, $archx$.

8. Objasniti motivaciju za nastanak izvoda (fizički i geometrijski smisao).

9. Lijevi i desni izvod (definicije). Beskonačni izvodi (uz geometrijsko značenje).
10. Logaritamski izvod. Odrediti izvod funkcije $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$.
11. Diferencijal funkcije

    a) Objasniti pojam diferencijala funkcije i način primjene (približno izračunati, npr. $\sqrt{26}, \log 11, \cos 62^\circ$)

    b) Geometrijsko značenje diferencijala funkcije

    c) Izvesti pravila za diferencijal.
12. a) Napisati i dokazati Leibnizovu formulu

    b) Odrediti $y^{(20)}$ za funkciju $y = x^2 e^x$
13. Fermatov teorem dif. računa s dokazom. Objasniti specifičnosti ovog teorema
14. Rolleov teorem dif. računa s dokazom i njegovo geometrijsko značenje
15. a) Lagrangeov teorem dif. računa s dokazom

    b) Geometrijsko i fizikalno značenje Lagrangeovog teorema

    c) Posljedice Lagrangeovog teorema s dokazima
16. Cauchyev teorem dif. računa s dokazom
17. Darbouxov teorem dif. računa s dokazom*
18. a) Veza između desnog izvoda i lijeve granične vrijednosti izvoda u jednoj tački (s dokazom).

    b) Neprekidnost izvoda (teorem s dokazom)
19. a) Objasniti kada i kako se koriste L'Hospitalova pravila

    b) Navesti teoreme L'Hospitalovih pravila i dokazati jedan od njih
20. a) Objasniti značaj upotrebe Taylorove formule

    b) Vrste ostataka u Taylorovoj formuli (samo navesti). Izvesti dokaz u slučaju Schlőmlich-Roucheovog ostatka*

    c) MacLaurinova formula i različiti tipovi ostataka

    d) Razviti po MacLaurinovoj formuli funkcije: $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
21. a) Teorem o vezi monotonosti funkcije s izvodom funkcije (s dokazom)
22. a) Definicija lokalnih ekstrema funkcije

    b) Test prvog izvoda s dokazom

    c) Test pomoću izvoda višeg reda s dokazom

    d) Dokazati da je $e^x > x + 1$ za $x \neq 0$.
23. a) Definicija konveksnosti/konkavnosti funkcije. Ispitati konveksnost funkcija: $f(x) = x$ i $f(x) = x^2$.

    b) Geometrijski smisao konveksnosti (izvesti)

    c) Potrebni i dovoljni uvjeti konveksnosti/konkavnosti funkcije (s dokazima)
24. a) Definicija prevojne tačke. Potreban uvjet egzistencije prevojne tačke s dokazom

    b) Dovoljni uvjeti egzistencije prevojne tačke s dokazima
25. Definicija kose asimptote i izvođenje formule

4. Integrali

1. Definicija određenog (Riemannovog) integrala. Navesti primjer integrabilne funkcije (izračunavanjem odgovarajućeg integrala) i primjer neintegrabilne funkcije.

2. Potreban uvjet integrabilnosti funkcije (s dokazom)
3. Darbouxove sume: definicije i osnovne tvrdnje s dokazima
4. Darbouxovi integrali: definicije i osnovne tvrdnje s dokazima
5. Navesti sve osobine R-integrala i dokazati jednu od njih (bit će navedeno koju).
6. Navesti sve tvrdnje vezane za klase integrabilnih funkcija i dokazati jednu od njih.
7. Teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa s dokazom i geometrijskim značenjem
8. Objasniti vezu između određenog i neodređenog integrala navođenjem svih tvrdnji s dokazima
9. Izračiunati: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)$ koristeći određeni integral.
10. Objasniti detaljno pojam izmjerivosti (u smislu površine) figure u ravni. Navesti potreban i dovoljan uvjet izmjerivosti figure u ravni, s dokazom.
11. a) Izvesti formulu za izračunavanje površine krivolinijskog trougla u polarnim koordinatama.

    b) Izračunati površinu ograničenu kardioidom $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right),\ \varphi \in [0, 2\pi]$.
12. Izračunavanje dužine luka krive (definicija, teorem i dokaz). Napisati odgovarajuće frmule kada je funkcija zadana parametarski i u polarnim koordinatama.
13. Izvesti formulu za izračunavanje zapremine rotacionog tijela oko Ox-ose. Napisati odgovarajuću formulu ako se rotacija izvodi oko Oy-ose.
14. Izvesti formulu za površinu omotača rotacionog tijela.
15. a) Navesti i dokazati Cauchyev integralni kriterij konveregencije numeričkog reda.

    b) Ispitati konvergenciju reda: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^{1+\alpha}},\alpha>0$.

Općenito: Odrediti vezu između sljedećih klasa funkcija (uz navođenje odgovarajućih tvrdnji): $\mathcal{B}\left([a,b]\right)$, $\mathcal{C}\left([a,b]\right)$, $\mathcal{D}\left([a,b]\right)$, $\mathcal{I}\left([a,b]\right)$. U kojem slučaju se može napraviti lanac u odnosu na $\subseteq$?

5. Dodatni zadaci (Ljaško i dr.: Zbirka zadataka iz Matematičke analize I)

str. 292	z. 187
str. 360	z. 331-344
str. 498	z. 1-12
str. 524	z. 43-50
str. 528	z. 55-61
str. 559	z. 125-131
str. 606	z.232, 233