UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA
Predmetni nastavnik: Prof. dr. Mehmed Nurkanović

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pitanja za završni ispit

1. Neprekidnost

1. a) Navesti definicije: beskonačno male veličine, beskonačno velike veličine, beskonačno male veličine u odnosu na neku drugu funkciju.

   b) Navesti i dokazati teorem o vezi između granične vrijednosti funkcije i odgovarajuće infinitezimale.

2. a) Objasniti značenja Landauovih simbola o i O. Kad za dvije funkcije kažemo da su istog reda?

   b) Da li su istog reda funkcije $1-\cos x$ i x^2 kad $x \to 0$?

3. a) Navesti definiciju i osobine ekvivalentnih funkcija.

   b) Pokazati da je:

   1) $\sin x = x + o(x) \quad (x \to 0)$, 2) $e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0)$, 3) $a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad (x \to 0)$,
   4) $\ln(1+x) = x + o(x) \quad (x \to 0)$, 5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (x \to 0)$,

   c) Koristeći b), izračunati: 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x+x^2}\right)$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. Navesti sve definicije neprekidnosti funkcije u tački. Koje su razlike između definicije neprekidnosti funkcije u tački i Chauchyeve definicije granične vrijednosti funkcije u tački?

5. Neprekidnost funkcije u tački s lijeve i s desne strane. Neprekidnost funkcije na skupu. Objasniti značenje simboličkog zapisa: $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

6. Navesti i dokazati teorem neprekidnosti složene funkcije.

7. Veza između neprekidnosti funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ u tački $a \in D_f$ i neprekidnosti funkcije $|f|$, s o dgovarajućim dokazima, odnosno kontraprimjerima.

8. Vrste prekida funkcije (s grafičkom ilustracijom).

9. a) Definicija uniformne neprekidnosti funkcije.

   b) Ispitati uniformnu neprekidnost zadanih funkcija (i slično) na svom domenu:

   1) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
   3) $f : \mathbb{R} \to [-1.1],\ f(x) = \cos x$ 4) $f : \mathbb{R} \to [-1.1],\ f(x) = \sin x$.

10. Navesti sve osobine funkcija definiranih i neprekidnih na zatvorenom intervalu i dokazati jednu od njih (bit će konkretno navedeno koju).

11. Veza između monotonosti i neprekidnosti funkcije. Navesti sve tvrdnje i dokazati jednu od njih (bit će konkretno navedeno koju).

2. Diferencijabilnost

1. a) Definicija izvoda funkcije i definicija diferencijabilnosti funkcije

   b) Odrediti po definiciji izvode (i slično tome):

   1) $y'(1),\ y(x) = \sqrt{2x}$, 2) $f'(0),\ f(x) = \ln(2x+1)$, 3) $f'(0),\ f(x) = \sin 2x$.

2. Naći po definiciji izvode funkcija: c (c - konstanta), x^n $(n \in \mathbb{R})$, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\log_a x$,

3. Navesti vezu između diferencijabilnosti funkcije i formule o razlaganju (s dokazom).

4. Navesti vezu između diferencijabilnosti i neprekidnosti funkcije, s odgovarajućim dokazima, odnosno kontraprimjerima (barem tri kontraprimjera).

5. Navesti i dokazati pravila za izvode funkcije.

6. a) Navesti i dokazati teorem za izvod složene funkcije.

   b) Izvesti formule za $arshx$, $archx$ i $arthx$, pa onda odrediti njihove izvode.

7. Navesti i dokazati teorem o izvodu inverzne funkcije. Koristeći taj teorem, naći izvode sljedećih funkcija: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $arshx$, $archx$.

8. Objasniti motivaciju za nastanak izvoda (fizički i geometrijski smisao).

9. Lijevi i desni izvod (definicije). Beskonačni izvodi (uz geometrijsko značenje).

10. Logaritamski izvod. Odrediti izvod funkcije $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$.

11. Diferencijal funkcije

    a) Objasniti pojam diferencijala funkcije i način primjene (približno izračunati, npr. $\sqrt{26}, \log 11, \cos 62°$)

    b) Geometrijsko značenje diferencijala funkcije

    c) Izvesti pravila za diferencijal.

12. a) Napisati i dokazati Leibnizovu formulu

    b) Odrediti $y^{(20)}$ za funkciju $y = x^2 e^x$

13. Fermatov teorem dif. računa s dokazom. Objasniti specifičnosti ovog teorema

14. Rolleov teorem dif. računa s dokazom i njegovo geometrijsko značenje

15. a) Lagrangeov teorem dif. računa s dokazom

    b) Geometrijsko i fizikalno značenje Lagrangeovog teorema

    c) Posljedice Lagrangeovog teorema s dokazima

16. Cauchyev teorem dif. računa s dokazom

17. Darbouxov teorem dif. računa s dokazom*

18. a) Veza između desnog izvoda i lijeve granične vrijednosti izvoda u jednoj tački (s dokazom).

    b) Neprekidnost izvoda (teorem s dokazom)

19. a) Objasniti kada i kako se koriste L'Hospitalova pravila

    b) Navesti teoreme L'Hospitalovih pravila i dokazati jedan od njih

20. a) Objasniti značaj upotrebe Taylorove formule

    b) Vrste ostataka u Taylorovoj formuli (samo navesti). Izvesti dokaz u slučaju Schlőmlich-Roucheovog ostatka*

    c) MacLaurinova formula i različiti tipovi ostataka

    d) Razviti po MacLaurinovoj formuli funkcije: $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

21. Teorem o vezi monotonosti funkcije s izvodom funkcije (s dokazom)

22. a) Definicija lokalnih ekstrema funkcije

    b) Test prvog izvoda s dokazom

    c) Test pomoću izvoda višeg reda s dokazom

    d) Dokazati da je $e^x > x + 1$ za $x \neq 0$.

23. a) Definicija konveksnosti/konkavnosti funkcije. Ispitati konveksnost funkcija: $f(x) = x$ i $f(x) = x^2$.
    b) Geometrijski smisao konveksnosti (izvesti)
    c) Potrebni i dovoljni uvjeti konveksnosti/konkavnosti funkcije (s dokazima)
24. a) Definicija prevojne tačke. Potreban uvjet egzistencije prevojne tačke s dokazom
    b) Dovoljni uvjeti egzistencije prevojne tačke s dokazima
25. Definicija kose asimptote i izvođenje formule

3. Riemannov integral

1. Definicija određenog (Riemannovog) integrala. Navesti primjer integrabilne funkcije (izračunavanjem odgovarajućeg integrala) i primjer neintegrabilne funkcije.
2. Potreban uvjet integrabilnosti funkcije (s dokazom)
3. Darbouxove sume: definicije i osnovne tvrdnje s dokazima
4. Darbouxovi integrali: definicije i osnovne tvrdnje s dokazima
5. Navesti sve osobine R-integrala i dokazati jednu od njih (bit će navedeno koju).
6. Navesti sve tvrdnje vezane za klase integrabilnih funkcija i dokazati jednu od njih.
7. Teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa s dokazom i geometrijskim značenjem
8. Objasniti vezu između određenog i neodređenog integrala navođenjem svih tvrdnji s dokazima
9. Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$ koristeći određeni integral.
10. Objasniti detaljno pojam izmjerivosti (u smislu površine) figure u ravni. Navesti potreban i dovoljan uvjet izmjerivosti figure u ravni, s dokazom.
11. a) Izvesti formulu za izračunavanje površine krivolinijskog trougla u polarnim koordinatama.
    b) Izračunati površinu ograničenu kardioidom $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.
12. Izračunavanje dužine luka krive (definicija, teorem i dokaz). Napisati odgovarajuće formule kada je funkcija zadana parametarski i u polarnim koordinatama.
13. Izvesti formulu za izračunavanje zapremine rotacionog tijela oko Ox-ose. Napisati odgovarajuću formulu ako se rotacija izvodi oko Oy-ose.
14. Izvesti formulu za površinu omotača rotacionog tijela.
15. Nesvojstveni integral. Kriteriji konvergencije.
16. a) Navesti i dokazati Cauchyev integralni kriterij konveregencije numeričkog reda.
    b) Ispitati konvergenciju reda: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{1+\alpha}}, \alpha > 0$.

Općenito: Odrediti vezu između sljedećih klasa funkcija (uz navođenje odgovarajućih tvrdnji): $\mathcal{B}([a,b])$, $\mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{D}([a,b])$, $\mathcal{I}([a,b])$. U kojem slučaju se može napraviti lanac u odnosu na $\subseteq$?

5. Dodatni zadaci (Ljaško i dr.: Zbirka zadataka iz Matematičke analize I)

str. 292	z. 187
str. 360	z. 331-344
str. 498	z. 1-12
str. 524	z. 43-50
str. 528	z. 55-61
str. 559	z. 125-131
str. 606	z.232, 233