

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Pitanja za završni ispit

1. Različiti diferencijalnih jednadžbi prvog reda

1. Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda. Različiti metodi rješavanja
2. Bernoullijeva DJ
3. Homogena DJ. Jednadžbe koje se svode na homogene
4. Lagrangeova DJ
5. Clairautova DJ
6. Linearne DJ višeg reda s konstantnim koeficijentima. Homogena i nehomogena

2. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

1. a) Pojam definicionog područja DJ
b) Odrediti definiciono područje jednadžbi:
i) $y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$, ii) $y' = \frac{2}{x}(y-1)$, iii) $y' = \frac{y^2 - 4}{x(y-1)}$.
c) Objasniti da li je funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ rješenje DJ $y' = y^2$.
2. Objasniti pojam polja pravaca i izokline za DJ $y' = f(x, y)$. Konkretno za: $y' = x$ i $y' = \frac{y}{x}$.
3. Navesti i dokazati Arzela-Ascolijev teorem (uz navođenje potrebnih definicija)
4. Pokazati da je Cauchyev problem: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ekvivalentan odgovarajućoj integralnoj jednadžbi
5. Peanov teorem egzistencije rješenja CP (navesti th. i znati pojedine korake dokaza)
6. a) Picardov teorem jedinstvenosti rješenja CP (navesti th. i znati pojedine korake dokaza)
b) Navesti primjer DJ koja se ne može eksplicitno riješiti, ali se može utvrditi jedinstvenost rješenja odgovarajućeg CP
7. Izvesti uvjet za jedinstvenost CP za: a) linearnu DJ prvog reda. b) Bernoullijevu DJ
8. Produžavanje rješenja CP. Objasniti na primjerima:
a) $y' = y^2$, $y(x_0) = y_0$, b) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.
9. Darbouxova DJ
10. Jednadžba totalnog diferencijala. Pojam i način rješavanja. Određivanje integracionog faktora
11. Pokazati kako se linearna DJ prvog reda može svesti na jednadžbu totalnog diferencijala
12. DJ prvog reda u implicitnom obliku: Teorem jedinstvenosti rješenja CP i načini rješavanja

3. Diferencijalne jednačbe višeg reda

1. Izvesti formulu Liouville-Ostrogradskog
2. Eulerova DJ
3. Navesti i dokazati tvrdnju koja govori o izračunavanju drugog rješenja ako je poznato jedno za homogenu LDJ drugog reda
4. Objasniti kako se homogena LDJ drugog reda može svesti na jednačbu bez prvog izvoda
5. Metod varijacije konstanti pri rješavanju LDJ višeg reda
6. Primjena metoda stepenih redova na rješavanje homogene LDJ drugog reda. Objasniti pojmove regularne i singularne tačke. Posebno objasniti slučaj regularne singularne tačke te izvesti karakterističnu (definičnu) jednačbu.

4. Sistemi diferencijalnih jednačbi

1. a) Objasniti pojam integrala i prvog integrala sistema DJ u normalnom obliku
b) Pomoću prvih integrala riješiti sistem DJ: $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x$.
2. Dokazati tvrdnju da sistem DJ u normalnom obliku ne može imati više od n nezavisnih integrala.
3. Ekvivalentnost DJ n -tog reda i sistema DJ u normalnom obliku
4. a) Sistemi DJ u simetričnom obliku
b) Naći prve integrale sistema DJ:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

5. Načini rješavanja homogenih linearnih sistema DJ s konstantnim koeficijentima
6. Načini rješavanja nehomogenih linearnih sistema DJ s konstantnim koeficijentima (posebno matrični metod ili metod varijacije konstanti)