Obične diferencijalne jednadžbe

Book · October 2014

2 authors:

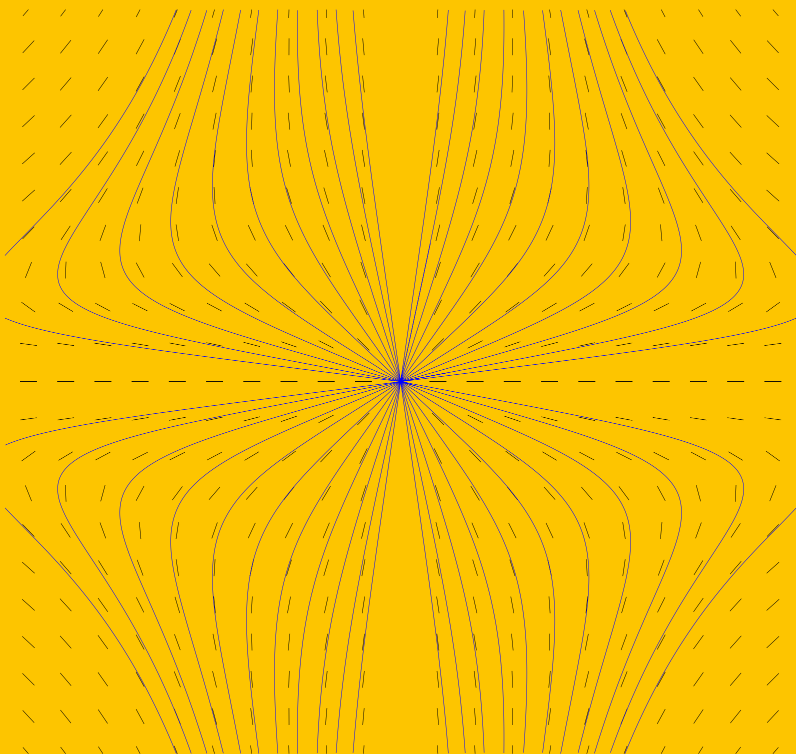
Kalabušić Senada
University of Sarajevo

Esmir Pilav
University of Sarajevo

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Prvo izdanje

SENADA KALABUŠIĆ - ESMIR PILAV



PMF

UNIVERZITETSKI UDŽBENIK

SARAJEVO, 2014.

Senada Kalabušić - Esmir Pilav

Obične diferencijalne jednadžbe

Univerzitetski udžbenik

Sarajevo, 2014.

Autori:

dr. Senada KALABUŠIĆ
dr. Esmir PILAV

Naziv djela:

Obične diferencijalne jednadžbe

Broj izdanja:

I

Izdavač:

Univerzitet u Sarajevu-Prirodno-matematički fakultet

Recenzenti:

prof. dr. Mustafa KULENOVIĆ,
Department of Mathematics,
University of Rhode Island, USA

prof. dr. Mehmed NURKANOVIĆ,
Odsjek za matematiku,
Prirodno-matematički fakultet u Tuzli

Korekturu izvršili autori

Kompjuterska obrada teksta i naslovna strana:

dr. Senada KALABUŠIĆ
dr. Esmir PILAV

Tiraž:
50 primjeraka

Štampa:
Štamparija "Elif Print", Sarajevo

Za štampariju:
Ibrahim Poturović

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo
517.9(075.8)
KALABUŠIĆ, Senada,
Obične diferencijalne jednadžbe / Senada Kalabušić, Esmir Pilav.- Sarajevo: Prirodno-matematički fakultet, 2014.– IV, 290 str.: graf. prikazi; 24 cm.-(Univerzitetski udžbenik)
Bibliografija : str. 285 – 286
ISBN 978 – 9958 – 592 – 55 – 3
1. Pilav, Esmir
COBISS. BH - ID 21624838

Sadržaj

Predgovor

Obične diferencijalne jednadžbe se koriste za opisivanje matematičkih modela u veoma velikom broju problema, ne samo u prirodnim i tehničkim naukama, nego i u oblastima kao što su ekonomija, psihologija, teorija odbrane, demografija itd. Naime, značajni prirodni zakoni i hipoteze mogu se transformirati, koristeći matematički jezik, u jednadžbe koje u sebi sadrže izvode. Na primjer, u fizici se izvod koristi za opisivanje brzine i ubrzanja, u geometriji izvod se koristi kao koeficijent pravca tangente, u biologiji kao brzina rasta populacije, u psihologiji kao brzina učenja, u hemiji kao brzina hemijske reakcije, u ekonomiji za opisivanje brzine promjene troškova života, u finansijama za opisivanje brzine rasta investicija itd. Kada se formira matematički model pomoću diferencijalnih jednadžbi, obično su pretpostavke pod kojima se formira model idealizirane. Sljedeći korak nakon formiranja modela je pronaći rješenje diferencijalne jednadžbe koje će opisivati stvarno ponašanje posmatranog procesa. U slučaju da rješenje ne opisuje dovoljno dobro očekivanu stvarnu situaciju, moraju se ponovo razmotriti pretpostavke koje su korištene za formiranje modela i pokušati formirati model koji će biti bliži stvarnosti. Zahvaljujući ovim primjenama, diferencijalne jednadžbe su postale sastavni dio matematičkih predmeta na fakultetima na kojima se izučavaju druge nauke, a na fakultetima na kojima se izučavaju matematičke nauke njima su posvećeni obavezni semestralni predmeti.

Danas u svijetu postoji veliki broj knjiga koje se bave osnovnom teorijom diferencijalnih jednadžbi i mnoge od njih su dostupne i u elektronskom obliku. Značajan broj ovih knjiga imaju različite pristupe u izučavanju osnovne teorije diferencijalnih jednadžbi. Jedan od motiva za pisanje ovog udžbenika je da pokušamo na jednom mjestu obuvatiti sadržaj koji se uči u okviru predmeta *Diferencijalne jednadžbe* na Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu. Iako je prvenstveno namijenjen studentima matematike, ovaj udžbenik mogu koristiti i studenti tehničkih fakulteta i svi oni studenti koji u okviru predmeta iz matematike imaju sadržaje koji su vezani za teoriju i primjene običnih diferencijalnih jednadžbi.

Udžbenik se sastoji od četiri poglavlja: Diferencijalne jednadžbe prvog reda, Diferencijalne jednadžbe višeg reda, Sistemi diferencijalnih jednadžbi i Laplaceova transformacija.

U prvom poglavlju bavimo se Cauchyevim problemom početnih vrijednosti za diferencijalne jednadžbe prvog reda, tj. kada ovaj problem ima rješenje i kada je to rješenje jedinstveno. Također, u prvom poglavlju navodimo osnovne tipove diferencijalnih jednadžbi prvog reda koji se mogu integrirati. Ovdje smo posvetili pažnju i nekim jednostavnim procesima iz različitih naučnih disciplina, a koji se mogu opisati pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, pri čemu smo odabrali neke od primjera koji su na veoma lijep način prezentirani u knjizi *Ordinary Differential Equations* autora N.J Finizio & G.Ladas, vidjeti [9]. U drugom poglavlju posmatraju se diferencijalne jednadžbe višeg reda, pri čemu se naglasak daje na teoriju linearnih diferencijalnih jednadžbi višeg reda. Treće poglavlje bavi se teorijom sistema diferencijalnih jednadžbi, sa posebnom pažnjom na sisteme u simetričnom obliku, kao i sisteme linearnih diferencijalnih jednadžbi. Na kraju, u zadnjem poglavlju pokazana je primjena Laplaceove transformacije na rješavanje početnog problema za linearne diferencijalne jednadžbe $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima.

U svakom poglavlju riješen je značajan broj primjera koji pomažu studentima da što brže shvate nove pojmove, načine rješavanja diferencijalnih jednadžbi, tvrdnje i teoreme. Na kraju svakog poglavlja, ili neke cjeline u poglavlju, dati su zadaci za samostalno rješavanje kako bi studenti mogli da testiraju svoje dostignuto razumijevanje prethodno prezentiranih sadržaja. Primjeri zadataka uzeti su iz različitih izvora navedenih u popisu literature. Gdje god smo smatrali potrebnim, nacrtana su polja pravaca, pri čemu koristimo program *Winplot*, koji se može preuzeti sa stranice *http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.*

Svjesni smo da udžbenik ovog tipa ne može sadržavati ništa što nije sadržano u dosadašnjim knjigama koje se bave osnovnom teorijom običnih diferencijalnih jednadžbi. Zato je naš cilj prevashodno bio da što direktnije i jednostavnije prezentiramo sadržaj, a da pri tome zadržimo preciznost i strogost. Vjerujemo da će ovakav način prezentiranja gradiva biti prihvatljiv i lako shvatljiv studentima, što i jeste jedan od ciljeva ovog udžbenika.

Zahvaljujemo se recenzentima profesoru Mustafi Kulenoviću i profesoru Mehmedu Nurkanoviću koji su sa velikom pažnjom pročitali radnu verziju teksta i dali korisne sugestije za njegovo poboljšanje.

Sarajevo, 2014. *Autori*

Poglavlje 1

Diferencijalne jednadžbe prvog reda

1.1 Diferencijalne jednadžbe i rješenja

U ovom poglavlju posmatramo diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Opći oblik obične diferencijalne jednadžbe[1] prvog reda glasi

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

gdje je F funkcija definirana na nekom podskupu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$.

Pretpostavimo da se jednadžba (1.1) može jednoznačno riješiti po y'. Tada dobivamo *normalni oblik*

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

gdje je f data funkcija definirana na nekom podskupu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ravni xy.

Napomenimo da ćemo ovdje uglavnom posmatrati diferencijalne jednadžbe u normalnom obliku.

Uporedo sa diferencijalnom jednadžbom (1.2) posmatrat ćemo i tzv.*recipročnu diferencijalnu jednadžbu* oblika

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.3}$$

Jednadžbu (1.3) posmatramo u okolini onih tačaka u kojima funkcija $f(x, y)$ postaje beskonačna.

Definirajmo sada pojam *oblasti definiranosti* diferencijalne jednadžbe (1.2).

[1] Termin "obična"koristimo jer se radi o izvodu nepoznate realne funkcije jedne realne promjenljive koja se pojavljuje u jednadžbi. U daljem izlaganju nećemo ovo posebno naglašaviti.

Definicija 1.1.1. ***Oblast definiranosti*** *diferencijalne jednadžbe (1.2), odnosno recipročne diferencijalne jednadžbe (1.3), je unija oblasti definiranosti funkcija* $f(x,y)$ *i* $\dfrac{1}{f(x,y)}$.

Treba napomenuti da oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe (1.2) ne sadrži tačke u kojima su funkcije $f(x,y)$ i $\dfrac{1}{f(x,y)}$ neodređene.

Primjer 1.1.1. *Posmatrajmo jednadžbu prvog reda oblika*

$$y' = \frac{y\ln y}{\sin x}. \tag{1.4}$$

Recipročna jednadžba jednadžbe (1.4) je

$$x' = \frac{\sin x}{y\ln y}. \tag{1.5}$$

Domen $\mathcal{D}_1$ *funkcije* $f(x,y) = \dfrac{y\ln y}{\sin x}$ *je*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sin x \neq 0,\ y\in(0,+\infty)\} = \\ &= (\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, k\pi+\pi))\times(0,+\infty),\end{aligned}$$

dok je domen $\mathcal{D}_2$ *funkcije* $\dfrac{1}{f(x,y)}$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R},\ y\in(0,1)\cup(1,+\infty)\} = (-\infty,+\infty)\times((0,1)\cup(1,+\infty)).$$

Funkcije $\dfrac{\sin x}{y\ln y}$ *i* $\dfrac{y\ln y}{\sin x}$ *su neodređene u tačkama* $(k\pi,1), k=0,\pm1,\ldots,$ *jer u ovim tačkama dobivamo* $\dfrac{0}{0}$, *zato ove tačke treba isključiti iz domena. Dakle, oblast definiranosti* $\mathcal{D}$ *obične diferencijalne jednadžbe (1.4) je*

$$\mathcal{D} = ((-\infty,+\infty)\times(0,+\infty))\setminus\{(k\pi,1) : k=0,\pm1\ldots\}.$$

Oblici diferencijalnih jednadžbi (1.2) i (1.3) mogu se objediniti u sljedeći oblik

$$dy - f(x,y)dx = 0. \tag{1.6}$$

Kod oblika (1.6) promjenljive x i y su ravnopravne i svaka od njih može se uzeti za nezavisno promjenljivu. Ako obje strane jednadžbe (1.6) pomnožimo nekom funkcijom $N(x,y)$, dobivamo *diferencijalni oblik*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.7}$$

gdje je $M(x,y) = -f(x,y)N(x,y)$. Obratno, svaka jednadžba oblika (1.7) može se napisati u obliku (1.2) ili (1.3) rješavanjem jednadžbe (1.7) po y' ili x'. Oblast definiranosti jednadžbe u diferencijalnom obliku čine sve tačke zajedničke oblasti definiranosti funkcija $M(x,y)$ i $N(x,y)$ u kojima je $M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0$.

Diferencijalna jednadžba se može napisati i u tzv.*simetričnom obliku*

$$\frac{dx}{X(x,y)}=\frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{1.8}$$

Oblast definiranosti jednadžbe (1.8) čine sve tačke zajedničke oblasti definiranosti funkcija $X(x,y)$ i $Y(x,y)$ u kojima je $X^2(x,y)+Y^2(x,y)\neq 0$.

Definirajmo sada rješenje diferencijalne jednadžbe (1.2).

Definicija 1.1.2. *Pretpostavimo da je desna strana jednadžbe (1.2) definirana na nekom skupu $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ ravni xy. Za funkciju $y=\varphi(x)$, definirana na intervalu*[2] *(a,b), kažemo da je* ***rješenje jednadžbe*** *(1.2) ako za svako $x\in(a,b)$ vrijedi :*

(i) *Postoji izvod funkcije $\varphi(x)$ za svako $x\in(a,b)$*

(ii) *Nakon uvrštavanja funkcije $y=\varphi(x)$ u (1.2), jednadžba (1.2) postaje identitet, tj.*

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)),$$

za svako $x\in(a,b)$, što znači da za svako $x\in(a,b)$ tačka $(x,\varphi(x))$ pripada skupu $\mathcal{D}$ i $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$.[3]

Primijetimo da iz osobine $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ u Definiciji 1.1.2 slijedi, ako je funkcija f neprekidna na $\mathcal{D}$, onda je funkcija $\varphi(x)$ neprekidno diferencijabilna na $\mathcal{D}$.

Uočimo također da smo rješenje posmatrali na intervalu (a,b) za koji znamo da je povezan skup. Pokažimo u sljedećem primjeru zašto je bitno da je skup na kojem je definirano rješenje povezan.

Primjer 1.1.2. *Posmatrajmo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'=y^2.$$

Nije teško vidjeti da funkcija $\varphi(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ identički zadovoljava datu jednadžbu. Međutim, ova funkcija $\varphi(x)$ nije i njeno rješenje. Naime, iz $\varphi'(x)=\varphi^2(x)$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, slijedi da je funkcija $\varphi(x)$ monotono neopadajuća (jer je njen prvi izvod nenegativan). Za proizvoljne $x_1\in(-\infty,1)$ i $x_2\in(1,+\infty)$ je $x_1<x_2$ i $\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$, pa bismo zaključili da je funckija $\varphi(x)$ monotono opadajuća, što je pogrešno. Zato je svaka od funkcija $\varphi(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$ i $\varphi(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(1,+\infty)$ rješenje, ali ne i funkcija $\varphi(x)$, definirana na uniji tih intervala.

[2]Napomenimo da rješenje $y=\varphi(x)$ može biti definirano i u intervalima oblika $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ i $(-\infty,+\infty)$.

[3]Ako je rješenje $y=\varphi(x)$ definirano na intervalu koji je zatvoren na jednom ili oba kraja, onda pod izvodom funkcije $\varphi(x)$ na uključenim krajevima intervala podrazumijevamo jednostrani izvod.

Riješiti jednadžbu znači naći sva njena rješenja. Budući da se uporedo sa jednadžbom (1.2) posmatra i njena recipročna jednadžba, onda je potpuno prirodno da se rješenjima jednadžbe (1.2) pridruže rješenja $x = \psi(y)$ njene odgovarajuće recipročne jednadžbe. U tom smislu zbog sažetosti izlaganja u daljem ćemo nazivati rješenje jednadžbe (1.3) rješenjem jednadžbe (1.2).

Ako funkcija $y = \varphi(x)$ identički zadovoljava jednadžbu (1.2), tj. ako je njeno rješenje, onda ćemo je zvati *integralom* posmatrane jednadžbe. Dakle, termin *integral* ovdje ćemo koristiti u tom smislu.

Prilikom rješavanja diferencijalnih jednadžbi veoma često dobivamo rješenje u implicitnom obliku. Stoga ćemo definirati implicitno rješenje diferencijalne jednadžbe (1.2).

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je relacijom $\Phi(x, y) = 0$ definirano rješenje jednadžbe (1.2) u **implicitnom obliku** ako je tom relacijom određeno y kao eksplicitna funkcija od x, tj. $y = \varphi(x)$ i ako je funkcija $\varphi(x)$ rješenje jednadžbe (1.2).*

Dakle, ako je sa $\Phi(x, y) = 0$ dato rješenje u implicitnom obliku, onda diferenciranjem po x i zamjenom izvoda y' sa $f(x, y)$, dobivamo da identički vrijedi

$$\Phi'_x + \Phi'_y f(x, y) \equiv 0.$$

Rješenje jednadžbe (1.2) može biti dato i u parametarskom obliku.

Definicija 1.1.4. *Kažemo da je sa*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

*definirano rješenje jednadžbe (1.2) u **parametarskom obliku** na intervalu (t_0, t_1), ako u tom intervalu identički vrijedi*

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Definirali smo razne oblike zadavanja rješenja jednadžbe (1.2). Svakim od tih oblika definirana je neka kriva koju nazivamo *integralnom krivom jednadžbe (1.2)*. Dakle, samu integralnu krivu nazivamo rješenjem jednadžbe (1.2). Šta je geometrijski smisao integralnih krivih? Po čemu se integralne krive ističu u odnosu na sve druge krive u ravni?

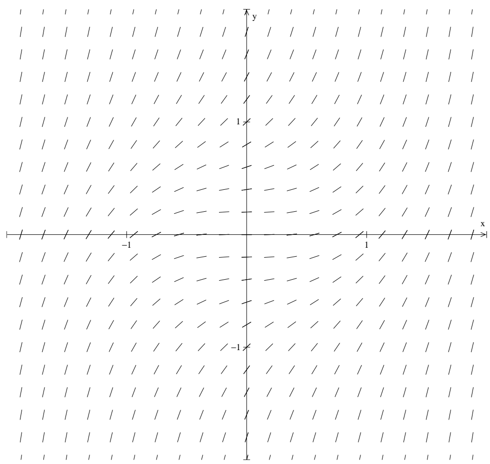
Pretpostavit ćemo da integralne krive o kojima govorimo postoje. O uvjetima pod kojima postoje integralne krive, bavićemo se kasnije.

Pretpostavimo da je desna strana jednadžbe (1.2) definirana i konačna u svakoj tački oblasti[4] $\mathcal{D}$ promjenljivih x i y. Svakom tačkom (x, y) te oblasti povucimo jedinični odsječak, tj. dužina mu je jedan i sredina mu je u tački

[4]Pod oblasti ćemo podrazumijevati neki neprazan skup $\mathcal{D}$ tačaka, sa sljedećim osobinama: a) Svaka tačka oblasti $\mathcal{D}$ je *unutrašnja*, tj. zajedno sa svojom okolinom pripada $\mathcal{D}$; b) Skup $\mathcal{D}$ je *povezan*, tj. svake dvije tačke tog skupa možemo spojiti poligonalnom linijom koja u cijelosti leži u $\mathcal{D}$.

(x, y). Neka taj odsječak gradi ugao α sa pozitivnim dijelom $x-$ose, čiji je tangens jednak desnoj strani jednadžbe (1.2), tj. $\tan\alpha = f(x, y)$. Ako u svakoj tački oblasti $\mathcal{D}$ postupimo na isti način, tj. postavimo jedinični odsječak koji zatvara sa $x-$osom neki ugao čiji je tangens jednak vrijednosti desne strane funkcije $f(x, y)$ u toj tački jednadžbe (1.2), onda možemo kazati da jednadžba (1.2) definira neko *polje pravaca*. Integralna kriva jednadžbe (1.2) koja prolazi tačkom (x, y) ima osobinu da se koeficijent pravca tangente integralne krive u tački (x, y) poklapa sa pravcem polja u toj tački. Ova osobina i razlikuje integralne krive od svih drugih krivih.

Primjer 1.1.3. *Polje pravaca za diferencijalnu jednadžbu $y' = x^2 + y^2$ je dato na Slici 1.1.*



Slika 1.1: Polje pravaca za diferencijalnu jednadžbu $y' = x^2 + y^2$.

Svaka diferencijalna jednadžba prvog reda zapravao opisuje zajedničko svojstvo tangenti njenih integralnih krivih. Ilustrirajmo ovo sljedećim jednostavnim primjerom.

Primjer 1.1.4. *Posmatrajmo diferencijalnu jednadžbu*

$$y' = x.$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu zadovoljava funkcija $y = \dfrac{x^2}{2}$. Ovo je parabola koja prolazi koordinatnim početkom. Međutim, primijetimo da posmatranu jednadžbu zadovoljava i svaka funkcija oblika $y = \dfrac{x^2}{2} + C$, gdje je C proizvoljna realna konstanta. Dakle, integralne krive su familija parabola. Sve ove integralne krive imaju zajedničku osobinu: U svakoj tački (x, y) svake integralne krive koeficijent pravca tangente u toj tački je $\tan\alpha = f(x, y) = x$.

Kriva u čijoj svakoj tački pravac polja, koji je definiran diferencijalnom jednadžbom (1.2), ima istu vrijednost naziva se *izoklina.* Jednadžba izokline glasi

$$f(x, y) = k,$$

gdje je k proizvoljan realan broj.

Primjer 1.1.5. *Vratimo se na Primjer 1.1.4. Jednadžba izokline glasi* $x = k$*. Dakle, izokline su prave paralelne sa* $y-$*osom. Specijalno u svim tačkama prave* $x = 1$*, pravac polja je jednak 1, tako da tangente svih integralnih krivih, koje presijecaju ovu pravu, obrazuju ugao* $\frac{\pi}{4}$ *s pozitivnim dijelom* $x-$*ose. Ispitujući familiju izoklina, možemo dobiti bitne informacije o integralnim krivim, što je naročito važno u slučajevim kada ne možemo riješiti diferencijalnu jednadžbu.*

U dosadašnjim razmatranjima pretpostavili smo da je funkcija $f(x, y)$ u jednadžbi (1.2) konačna u svakoj tački posmatrane oblasti $\mathcal{D}$. Na taj način smo isključili slučaj kada je tangenta paralelna sa $y-$osom. Ovo isključenje se ne može geometrijski opravdati. Stoga, da bismo uključili i taj slučaj, uporedo sa jednadžbom (1.2) posmatrat ćemo i njoj recipročnu jednadžbu (1.3)

$$x' = \frac{1}{f(x, y)},$$

koju ćemo ispitivati u okolini onih tačaka u kojima funkcija $f(x, y)$ postaje beskonačna.

Ako je desna strana jednadžbe (1.2) u okolini neke tačke (x_0, y_0) neodređenog oblika $\frac{0}{0}$, onda je desna strana i njoj recipročne jednadžbe (1.3) neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. U tom slučaju kazat ćemo da je u toj tački *polje pravaca neodređeno i da tom tačkom ne prolazi niti jedna integralna kriva.* Međutim, ovo ne isključuje mogućnost postojanja integralne krive $y = \varphi(x)$ ili $x = \psi(y)$ sa osobinom

$$y \to y_0 \quad \text{kad} \quad x \to x_0$$

ili

$$x \to x_0 \quad \text{kad} \quad y \to y_0.$$

U ovom slučaju govorit ćemo da se integralna kriva *približava* tački (x_0, y_0).

Primjer 1.1.6. *Naći integralne krive i nacrtati polje pravaca diferencijalne jednadžbe*

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Desna strana posmatrane jednadžbe je funkcija $f(x, y) = \frac{y}{x}$ *čiji je domen*

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \land y \in \mathbb{R}\}.$$

Funkcija $f(x, y)$ *u tački* $(0, 0)$ *je oblika* $\frac{0}{0}$, *zato je polje pravaca u toj tački neodređeno. Posmatrajmo recipročnu jednadžbu*

$$x' = \frac{x}{y}$$

čiji je domen

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}.$$

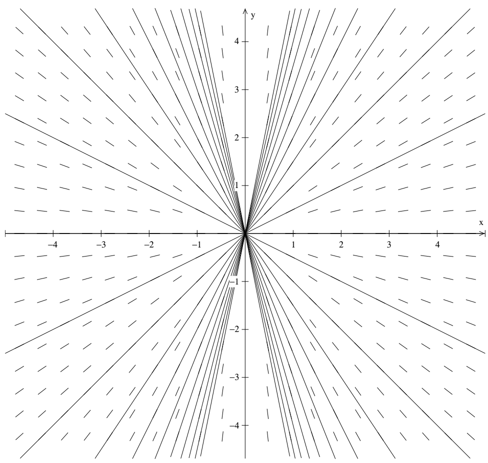
Također, kod recipročne jednadžbe polje pravaca je neodređeno u tački $(0, 0)$. *Ako isključimo tačku* $(0, 0)$ *iz razmatranja, onda vidimo da u svakoj drugoj tački pravac polja se poklapa sa pravcem prave koja prolazi tom tačkom i koordinatnim početkom. Zato su integralne krive poluprave*

$$y = kx, \quad x \neq 0.$$

Lako se vidi da je prava

$$x = 0, \quad y \neq 0,$$

integralna kriva recipročne jednadžbe. Dakle, integralne krive posmatrane jednadžbe su sve poluprave koje polaze iz koordinatnog početka. Ove poluprave su očito izokline.



Slika 1.2: Polje pravaca za diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{y}{x}$.

1.1.1 Cauchyev problem

Jedan od najvažnijih problema u teoriji diferencijalnih jednadžbi je *Cauchyev problem* ili *problem početnih vrijednosti.*

Za diferencijalnu jednadžbu (1.2) Cauchyev problem se sastoji u sljedećem: Između svih rješenja jednadžbe (1.2) naći ono rješenje

$$y = y(x) \tag{1.9}$$

koje prima vrijednost y_0 za zadanu vrijednost x_0, tj.

$$y(x_0) = y_0,$$

gdje su x_0 i y_0 unaprijed zadani brojevi, takvi da rješenje (1.9) zadovoljava uvjet

$$y = y_0 \quad za \quad x = x_0. \tag{1.10}$$

Broj y_0 nazivamo *početnom vrijednosti tražene funkcije* $y(x)$, a broj x_0 nazivamo *početnom vrijednosti nezavisno promjenljive.* Uvjet (1.10) se naziva *početnim uvjetom* za rješenje (1.9).

Dakle, pod Cauchyevim problemom smatrat ćemo problem koji se sastoji od diferencijalne jednadžbe (1.2) i početnih uvjeta (1.10).

Cauchyev problem možemo geometrijski formulirati na sljedeći način: Između svih integralnih krivih jednadžbe (1.9), naći onu koja prolazi unaprijed zadanom tačkom (x_0, y_0).

Za Cauchyev problem razmatrat ćemo pitanje postojanja (egzistencije) i jedinstvenosti rješenja. Kažemo da Cauchyev problem (1.2)-(1.10) ima jedinstveno rješenje ako postoji pozitivan broj $h > 0$ takav da je u intervalu $|x - x_0| \leq h$ definirano rješenje $y = y(x)$ za koje vrijedi $y(x_0) = y_0$ i ne postoji drugo rješenje definirano u ovom intervalu koje se ne poklapa s rješenjem $y = y(x)$ na cijelom intervalu $|x - x_0| \leq h$. U slučaju kada Cauchyev problem (1.2)-(1.10) ima više od jednog rješenja, kažemo da je u tački (x_0, y_0) *narušena jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema.*

Pitanje jedinstvenosti rješenja Cauchyevog problema je veoma važno, ne samo za teoriju diferencijalnih jednadžbi, nego i u primjenama diferencijalnih jednadžbi u različitim naučnim disciplinama u kojima se diferencijalne jednadžbe koriste za modeliranje različitih pojava pod unaprijed datim uvjetima. U tom smislu navedimo sljedeći primjer.

Primjer 1.1.7. *Materijalna tačka se kreće po pravoj pri čemu brzina kretanja predstavlja neku datu funkciju vremena $f(t)$. Naći zakon kretanja te materijalne tačke, tj. formulu kojom je definiran položaj tačke u svakom trenutku.*

Pretpostavimo da se materijalna tačka kreće po $x-$osi. Tada je položaj tačke određen jednom koordinatom x i zadatak je da se x izrazi kao funkcija vremena t. S obzirom na mehaničko tumačenje prvog izvoda, problem se svodi na rješavanje sljedeće diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \tag{1.11}$$

Pretpostavimo da je funkcija $f(t)$ neprekidna na intervalu (a, b). Tada, iz integralnog računa slijedi da su sva rješenja jednadžbe (1.11) opisana formulom

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + C, \quad a < t < b, \tag{1.12}$$

gdje je gornja granica promjenljiva, a donja granica je neki fiksiran broj t_0 iz intervala (a, b), a C je proizvoljna konstanta. Formula (1.12) sadrži cijelu familiju rješenja (kretanja materijalne tačke) koja se odlikuje zajedničkim svojstvom da sva kretanja imaju jednu brzinu u svakom trenutku vremena t.

Iz te familije izdvajamo ono kretanje materijalne tačke koje u zadanom trenutku t_0 ima položaj x_0. Dakle, tražimo rješenje $x = x(t)$ koje zadovoljava sljedeće uvjete

$$x = x_0 \quad \text{za} \quad t = t_0.$$

Uvrštavanjem $t = t_0$ u formulu (1.12) dobivamo da je $C = x_0$. Dakle, kretanje materijane tačke po $x-$osi pod datim uvjetima u potpunosti je opisano formulom

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + x_0.$$

Primijetimo da smo do sada u Cauchyevom problemu (1.2)-(1.10) pretpostavljali da su početni uvjeti x_0, y_0 konačni i da je desna strana jednadžbe (1.2) definirana i konačna u tački (x_0, y_0), tj. jednadžba (1.2) u tački (x_0, y_0) definira pravac polja koji nije paralelan $y-$osi. Ako desna strana jednadžbe (1.2) u tački (x_0, y_0) postaje beskonačna, onda posmatramo recipročnu jednadžbu (1.3)

$$x' = \frac{1}{f(x, y)},$$

i tražimo ono rješenje $x = \psi(y)$ koje zadovoljava početni uvjet $x = x_0$ za $y = y_0$. Za opisani slučaj kažemo da je *singularni slučaj Cauchyevog problema*. Jedinstvenost Cauchyevog problema u singularnom slučaju sastoji se u tome da je u tački (x_0, y_0) tangenta na integralnu krivu paralelna $y-$osi. Potpuno drugu situaciju imamo kada je desna strana jednadžbe (1.2) neodređena u tački (x_0, y_0). Pretpostavimo da je desna strana oblika $\frac{0}{0}$ u tački (x_0, y_0). Tada uobičajeni Cauchyev problem gubi smisao, jer tačkom (x_0, y_0) ne prolazi niti jedna integralna kriva. U ovom slučaju traži se ono rješenje koje se *približava tački* (x_0, y_0).

U nekim slučajevima je potrebno naći ono rješenje $y = y(x)$, koje zadovoljava uvjete da $y \to y_0\,(y_0 \neq \infty)$ za $x \to \infty$, $y \to \infty$ za $x \to x_0\,(x_0 \neq \infty)$ ili $y \to \infty$ za $x \to \infty$.
Gore navedeni singularni slučajevi Cauchyevog problema su predmet ispitivanja analitičke teorije diferencijalnih jednadžbi, kao i kvalitativne teorije diferencijalnih jednadžbi.

U onome što slijedi govorit ćemo o dovoljnim uvjetima egzistencije i jedinstvenosti Cauchuevog problema.

1.1.2 Dovoljni uvjeti egzistencije i jedinstvenosti rješenja Cauchyevog problema

Najprije ćemo na nekoliko jednostavnih primjera ilustrirati probleme koji se mogu javiti prilikom rješavanja Cauchyevog problema.

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Primjer 1.1.8. *Posmatrajmo početni problem*

$$y' = y\sqrt{x-3}, \quad y(1) = 2.$$

Ovaj problem nema rješenja jer izvod funkcije y nije definiran u intervalu koji sadrži početnu vrijednost $x = 1$. Dakle, ne može postojati integralna kriva koja prolazi tačkom $(1, 2)$.

Primjer 1.1.9. *Posmatrajmo početni problem*

$$y' = 2y^{1/2}, \quad y(0) = 0.$$

Lako se može provjeriti da su $y(x) = 0$ i $y(x) = x^2$ rješenja ovog početnog problema za $x \geq 0$. Dakle, nemamo jedinstveno rješenje ovog početnog problema, tj. ovom početnom tačkom prolaze bar dva rješenja.

Postavlja se sljedeće pitanje: Koje dovoljne uvjete treba da zadovolji desna strana jednadžbe (1.13) u okolini početnih uvjeta (x_0, y_0) da bi tačkom (x_0, y_0) prolazila bar jedna integralna kriva odnosno da bi prolazila jedna i samo jedna integralna kriva? U cilju formulacije i dokaza teorema u kojima se obezbjeđuju dovoljni uvjeti trebaće nam sljedeće definicije i teoremi.

Definicija 1.1.5. *Neka je $\mathcal{S}$ neki skup funkcija definiranih na segmentu $[a, b]$. Za $\mathcal{S}$ kažemo da je skup podjednako ograničenih funkcija na segmentu $[a, b]$ ako postoji konstanta M takva da za sve $f \in \mathcal{S}$ i za sve $x \in [a, b]$ vrijedi*

$$|f(x)| \leq M.$$

Definicija 1.1.6. *Neka je $\mathcal{S}$ neki skup funkcija definiranih na segmentu $[a, b]$. Za $\mathcal{S}$ kažemo da je skup podjednako neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, koji zavisi isključivo od ϵ i takav je da za sve $f \in \mathcal{S}$ vrijedi*

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \quad \text{čim je} \quad |x' - x''| < \delta, \quad x',\, x'' \in [a, b].$$

Iz Definicije 1.1.6 slijedi, ako je $\mathcal{S}$ skup podjednako neprekidnih funkcija na $[a, b]$, onda je svaka funkcija iz tog skupa neprekidna na $[a, b]$. Ako se skup $\mathcal{S}$ sastoji od konačno mnogo funkcija neprekidnih na $[a, b]$, onda se lako pokaže da je to skup i podjednako neprekidnih funkcija. Međutim, ako u skupu $\mathcal{S}$ ima beskonačno mnogo neprekidnih funkcija[5], onda taj skup može, a i ne mora biti skup podjednako neprekidnih funkcija na $[a, b]$.

Teorem 1.1.1 (Arzela-Ascoli). *Neka je na segmentu $[a, b]$ dat niz funkcija*

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots \tag{1.14}$$

koje su podjednako ograničene i podjednako neprekidne na $[a, b]$. Onda se iz niza (1.14) može izdvojiti podniz koji ravnomjerno na segmentu $[a, b]$ konvergira ka nekoj funkciji koja je neprekidna na $[a, b]$.

Dokaz. Svi racionalni brojevi koji leže u segmentu $[a, b]$ čine prebrojiv skup. Prema tome, ovi brojevi se mogu poredati u niz. Neka je to niz $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$. Pošto je (1.14) niz podjednako ograničenih funkcija, to postoji konstanta M takva da je $|f_k(x)| \leq M$ za svako $x \in [a, b]$ i za svako $k = 1, 2, \dots$. Odavde specijalno za $x = r_1$ imamo da je niz $\{f_k(r_1)\}_{k=1}^{\infty}$ ograničen. Iz svakog ograničenog niza možemo izdvojiti konvergentan podniz. Neka je $f_{k_1}(r_1), f_{k_2}(r_1), \dots, f_{k_i}(r_1), \dots$ konvergentan podniz niza $\{f_k(r_1)\}_{k=1}^{\infty}$. Ovo znači da niz $f_{k_1}(x), f_{k_2}(x), \dots, f_{k_i}(x), \dots$, koji je podniz niza (1.14), konvergira u $x = r_1$. Članove niza $f_{k_1}(x), f_{k_2}(x), \dots, f_{k_i}(x), \dots$ ćemo označavati sa

$$f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x), \dots, f_i^{(1)}(x), \dots. \tag{1.15}$$

Za niz (1.15) vrijedi sljedeće:

1) on je podniz niza $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$,

2) on konvergira za $x = r_1$.

Pošto je $|f_k(x)| \leq M$ za svako $x \in [a, b]$ i $k = 1, 2, \dots$, to i za članove niza (1.15) vrijedi $|f_k^{(1)}(x)| \leq M$. Ako stavimo da je $x = r_2$ dobivamo

$$|f_k^{(1)}(r_2)| \leq M.$$

Ovo znači da je niz $\{f_k^{(1)}(r_2)\}_{k=1}^{\infty}$ ograničen, pa iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz. Neka je

$$f_{k_1}^{(1)}(r_2), f_{k_2}^{(1)}(r_2), \dots, f_{k_j}^{(1)}(r_2), \dots$$

konvergentan podniz tog niza. Tada možemo reći da niz funkcija

$$f_{k_1}^{(1)}(x), f_{k_2}^{(1)}(x), \dots, f_{k_j}^{(1)}(x), \dots$$

konvergira u tački $x = r_2$. Članove ovog niza označićemo sa

$$f_1^{(2)}(x), f_2^{(2)}(x), \dots, f_i^{(2)}(x), \dots. \tag{1.16}$$

[5]Posmatrati na primjer niz funkcija $\{x^n\}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Ispitati da li je ovo niz podjednako neprekidnih funkcija?

Niz (1.16) je podniz niza (1.15) i konvergira u tački $x = r_2$. I za članove niza (1.16) vrijedi $|f_k^{(2)}(x)| \leq M$. Ako stavimo da je $x = r_3$ dobivamo

$$|f_k^{(2)}(r_3)| \leq M.$$

Ovo znači da je niz $\{f_k^{(2)}(r_3)\}_{k=1}^{\infty}$ ograničen, pa iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz. Neka je

$$f_{k_1}^{(2)}(r_3), f_{k_2}^{(2)}(r_3), \ldots, f_{k_j}^{(2)}(r_3), \ldots$$

konvergentan podniz tog niza. Tada možemo reći da niz funkcija

$$f_{k_1}^{(2)}(x), f_{k_2}^{(2)}(x), \ldots, f_{k_j}^{(2)}(x), \ldots$$

konvergira u tački $x = r_3$. Članove ovog niza označit ćemo sa

$$f_1^{(3)}(x), f_2^{(3)}(x), \ldots, f_i^{(3)}(x), \ldots . \tag{1.17}$$

Niz (1.17) je podniz nizova (1.16), (1.15), (1.14) i konvergira u tački $x = r_3$. Ako ovaj postupak nastavimo dalje dobivamo beskonačno mnogo nizova koje ćemo svrstati u sljedeću tabelu:

$$\begin{array}{l} f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x), \ldots, f_i^{(1)}(x), \ldots \\ f_1^{(2)}(x), f_2^{(2)}(x), \ldots, f_i^{(2)}(x), \ldots \\ f_1^{(3)}(x), f_2^{(3)}(x), \ldots, f_i^{(3)}(x), \ldots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f_1^{(m)}(x), f_2^{(m)}(x), \ldots, f_i^{(m)}(x), \ldots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array} \tag{1.18}$$

Za nizove iz tabele(1.18) vrijedi sljedeće:

1) prvi niz je podniz niza (1.14), a svaki ostali niz iz tabele (1.18) je podniz niza iznad sebe. Dakle u krajnjem slučaju svi oni su podnizovi niza (1.14)

2) za svako $m = 1, 2, \ldots,$ $m-$ti niz iz (1.18) konvergira za $x = r_m$.

Formirajmo sad dijagonalni niz iz tablice (1.18). To je niz

$$f_1^{(1)}(x), f_2^{(2)}(x), \ldots, f_k^{(k)}(x), \ldots . \tag{1.19}$$

Dokažimo da niz (1.19) konvergira za $x = r_1, r_2, \ldots,$ tj. da niz konvergira u svim racionalnim tačkama segmenta $[a, b]$. Prvo primijetimo da iz osobine 1) slijedi da je niz (1.19) podniz prvog niza iz tabele (1.18). Pošto prvi niz iz tabele (1.18) prema osobini 2) konvergira za $x = r_1$ to i niz (1.19) konvergira za $x = r_1$. Dalje, iz osobine 1) također slijedi da je niz (1.19) počevši od svog drugog člana podniz drugog niza iz tabele (1.18). Pošto drugi niz konvergira za $x = r_2$ to i niz (1.19) konvergira za $x = r_2$. Niz (1.19) počevši od svog trećeg člana je podniz trećeg niza iz tablice (1.18). Pošto treći niz konvergira za $x = r_3$ to i niz (1.19) konvergira za $x = r_3$. Nastavljajući ovako dalje, zaključujemo da niz (1.19) konvergira za sve $x = r_1, r_2, r_3, \ldots$. Do sada smo koristili samo osobinu podjednake ograničenosti niza (1.14). Iskoristimo sada osobinu podjednake neprekidnosti funkcija na $[a, b]$. To znači da za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ takav da za svako $k = 1, 2, \ldots$ vrijedi

$$|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\epsilon}{3} \text{ za } |x' - x''| < \delta, \quad x', x'' \in [a, b]. \tag{1.20}$$

Pošto je niz (1.19) podniz niza (1.14), onda dobivamo da za sve k vrijedi

$$|f_k^{(k)}(x') - f_k^{(k)}(x'')| < \frac{\epsilon}{3} \text{ za } |x' - x''| < \delta, \quad x', x'' \in [a, b].$$

Podijelimo segment $[a, b]$ tačkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_p = b$, ali tako da vrijedi $x_{i+1} - x_i < \delta \quad (i = 0, 1, ..., p-1)$. U svakom od segmenata $[x_i, x_{i+1}]$ izaberimo po jednu racionalnu tačku $\bar{r}_i$. Pošto, kao što smo vidjeli, niz (1.19) konvergira u svim racionalnim tačkama iz $[a, b]$, onda on konvergira i u tačkama $\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_{p-1}$. To znači da za svako $i = 0, 1, 2, ..., p-1$ postoji prirodan broj N_i takav da je

$$|f_k^{(k)}(\bar{r}_i) - f_l^{(l)}(\bar{r}_i)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ čim je } k, l \geq N_i. \tag{1.21}$$

Stavimo da je $N = \max\{N_i : i = 0, 1, ..., p-1\}$. Tada za svako $k, l \geq N$ vrijedi nejednakost (1.21). Dakle, za svako $i = 0, 1, ..., p-1$ vrijedi sljedeće

$$|f_k^{(k)}(\bar{r}_i) - f_l^{(l)}(\bar{r}_i)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ čim je } k, l \geq N. \tag{1.22}$$

Uzmimo sad po volji fiksno $x \in [a, b]$. Tada x pripada nekom od intervala $[x_i, x_{i+1}]$. Neka naprimjer $x \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}], \quad (i_0 \in \{0, 1, 2, ..., p-1\})$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} |f_k^{(k)}(x) - f_l^{(l)}(x)| \leq |f_k^{(k)}(x) - f_k^{(k)}(\bar{r}_{i_0})| + |f_k^{(k)}(\bar{r}_{i_0}) - f_l^{(l)}(\bar{r}_{i_0})| + \\ + |f_l^{(l)}(\bar{r}_{i_0}) - f_l^{(l)}(x)|. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Pretpostavimo da je $k, l \geq N$. Tada iz (1.22) za $i = i_0$ dobivamo da je

$$|f_k^{(k)}(\bar{r}_{i_0}) - f_l^{(l)}(\bar{r}_{i_0})| < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.24}$$

Dalje, pošto je $x \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ i $\bar{r}_{i_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ to je

$$|x - \bar{r}_{i_0}| < x_{i_0+1} - x_{i_0} < \delta.$$

Međutim, odavde i iz (1.20), gdje je $x' = x$ i $x'' = \bar{r}_{i_0}$, dobivamo

$$\begin{aligned} |f_k^{(k)}(x) - f_k^{(k)}(\bar{r}_{i_0})| &< \frac{\epsilon}{3} \\ |f_l^{(l)}(x) - f_l^{(l)}(\bar{r}_{i_0})| &< \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Na osnovu (1.23), (1.24) i (1.25) dobivamo da za svako $k, l \geq N$ vrijedi

$$|f_k^{(k)}(x) - f_l^{(l)}(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Dakle, dokazali smo da za svako $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj N koji zavisi samo od ϵ (a ne zavisi od x) i takav da za svako $x \in [a, b]$ vrijedi $|f_k^{(k)}(x) - f_l^{(l)}(x)| < \epsilon$ čim je $k, l \geq N$. Odavde na osnovu općeg Cauchyevog kriterija za ravnomjernu konvergenciju niza funkcija dobivamo da niz (1.19) ravnomjerno konvergira na $[a, b]$ ka nekoj funkciji $f(x)$. Funkcija $f(x)$ je neprekidna na $[a, b]$ jer je ona limes ravnomjerno konvergentnog niza funkcija $\{f_k^{(k)}(x)\}$ na $[a, b]$. □

Za Cauchyev problem (1.13) prvo ćemo dokazati da je neprekidnost funkcije $f(x, y)$ dovoljna za egzistenciju bar jednog rješenja u dovoljno maloj okolini tačke (x_0, y_0). Međutim, ako $f(x, y)$ nije neprekidna funkcija, onda posmatrani Cauchyev problem može da nema niti jedno rješenje, kao što to pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.1.10. *Početni problem*

$$y' = \frac{2}{x}(y - 1), \quad y(0) = 0$$

nema rješenje. Naime, opće rješenje date diferencijalne jednadžbe je $y = 1 + Cx^2$. *Nakon uvrštavanja početnih vrijednosti, dobivamo* $0 = 1$, *što nije tačno.*

S druge strane, početni problem

$$y' = \frac{2}{x}(y - 1), \quad y(0) = 1$$

ima beskonačno mnogo rješenja i sva su data sa $y = 1 + Cx^2$. *Naime, nakon uvrštavanja početnih vrijednosti dobivamo* $1 = 1$.

Primijetimo da funkcija $f(x, y) = \dfrac{2}{x}(y - 1)$ *ima prekid u tačkama u kojima je* $x = 0$.

U cilju dokazivanja egzistencije rješenja Cauchyevog problema koriste se integralne jednadžbe. Razlog tome su neke osobine integrala koje ne posjeduju izvodi. Naime, ako su dvije funkcije *dovoljno blizu* onda i njihovi integrali moraju biti *dovoljno blizu*, dok njihovi izvodi mogu biti *udaljeni* ili čak da ne postoje. Trebaće nam sljedeći teorem kako bismo dokazali egzistenciju, jedinstvenost i nekoliko drugih osobina rješenja početnog problema (1.13).

Teorem 1.1.2. *Neka je funkcija* $f(x, y)$ *neprekidna na nekoj oblasti* $\mathcal{D}$ *ravni. Onda je svako rješenje problema (1.13) i rješenje integralne jednadžbe*

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.26}$$

Dokaz. Neka je funkcija $y(x)$, definirana na intervalu $\mathcal{J}$, $x_0 \in \mathcal{J}$, rješenje problema (1.13). Onda za svako $x \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0. \tag{1.27}$$

Ako (1.27) integriramo u granicama od x_0 do x, imamo

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.28}$$

Kako je $y(x_0) = y_0$, onda iz prethodnog dobivamo

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.29}$$

Napomenimo da je $y(x)$ neprekidna funkcija, jer ima izvod kao rješenje od $y' = f(x, y)$. Dakle, ako je $y(x)$ rješenje problema (1.13), onda je $y(x)$ neprekidno rješenje integralne jednadžbe (1.26). Obratno, pretpostavimo da je $y(x)$, $x \in \mathcal{J}$, neprekidno rješenje integralne jednadžbe (1.26). Kako je $f(x, y)$ po pretpostavci neprekidna funkcija, onda je i $f(x, y(x))$ neprekidna funkcija. Stoga funkcija $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ kao integral neprekidne funkcije ima izvod za svako $x \in \mathcal{J}$. Tada funkcija (1.29) ima izvod za svako $x \in \mathcal{J}$. Diferenciranjem u (1.29), dobivamo $y'(x) = f(x, y(x))$ i $y(x_0) = y_0$. □

Sada ćemo dokazati Peanov teorem koji pokazuje da je neprekidnost funkcije $f(x, y)$ dovoljna da obezbijedi egzistenciju rješenja Cauchyevog problema (1.13).

Teorem 1.1.3 (Peanov teorem). *Neka je u oblasti $\mathcal{D}$ ravni xy definirana realna funkcija $f(x, y)$ i neka je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na $\mathcal{D}$. Onda za svako $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ Cauchyev problem (1.13) ima bar jedno rješenje koje je definirano na $|x - x_0| \leq h$, pri čemu broj h ne zavisi od tačke (x_0, y_0).*

Dokaz. Uzmimo proizvoljno tačku $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ i fiksirajmo je. Kako je $\mathcal{D}$ otvoren skup, onda oko tačke (x_0, y_0) možemo opisati zatvoreni pravougaonik $\mathcal{R}$ koji leži u oblasti $\mathcal{D}$. Neka je $\mathcal{R} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$, gdje su a i b neke pozitivne konstante. Po pretpostavci funkcija $f(x, y)$ je neprekidna na oblasti $\mathcal{D}$, pa je neprekidna i na pravougaoniku $\mathcal{R}$. Kako je zatvoren pravougaonik zatvoren skup, onda je funkcija $f(x, y)$ ograničena na $\mathcal{R}$, tj. postoji pozitivni broj M takav da je

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{za sve} \quad (x, y) \in \mathcal{R}. \tag{1.30}$$

Uzmimo da je $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Jasno je da je $h > 0$. Dokazaćemo da Cauchyev problem (1.13) ima bar jedno rješenje koje je definirano na segmentu $[x_0 - h, x_0 + h]$. Zapravo dokazaćemo da takvo rješenje postoji na $[x_0, x_0 + h]$. Egzistencija rješenja na $[x_0 - h, x_0]$ dokazuje se na sličan način. U nastavku smatramo da $x \in [x_0, x_0 + h]$. Uzmimo bilo kakav prirodan broj k i podijelimo segment $[x_0, x_0 + h]$, tačkama x_0, $x_0 + \frac{h}{k}$, $x_0 + \frac{2h}{k}, \ldots, x_0 + \frac{(k-1)h}{k}$, $x_0 + h$. Definirajmo niz funkcija

$\{y_k(x)\}$ na sljedeći način: stavimo prvo da je $y_k(x) = y_0$ za $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$. Ako je sada $x \in [x_0 + \frac{h}{k},\, x_0 + \frac{2h}{k}]$, onda je $x - \frac{h}{k} \in [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$. Na segmentu $[x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$ i tim prije na segmentu $[x_0, x - \frac{h}{k}]$ funkcija $y_k(x)$ je već definirana i očito neprekidna (jednaka konstanti). Prema tome, možemo formirati funkciju $f(t, y_k(t))$ za $t \in [x_0, x - \frac{h}{k}]$. Ova funkcija je kao složena funkcija neprekidnih funkcija također neprekidna. Možemo dakle integrirati funkciju $f(t, y_k(t))$ u granicama od x_0 do $x - \frac{h}{k}$. Stavimo da je

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt.$$

Ovim smo funkciju $y_k(x)$ definirali i na $[x_0 + \frac{h}{k},\, x_0 + \frac{2h}{k}]$. Prilikom formiranja funkcije $f(x, y_k(x))$ trebalo bi provjeriti da tačka $(x, y_k(x))$ leži u oblasti $\mathcal{D}$. Zaista za $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$ imamo da je $|x - x_0| < \frac{h}{k} \leq h$. Ali, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ pa je $h \leq a$. Dalje imamo $|y_k(x) - y_0| = 0 \leq b$. Dakle, za $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$ i za tačku $(x, y_k(x))$ imamo da je $|x - x_0| < a$ i $|y_k(x) - y_0| < b$. Ovo znači da tačka $(x, y_k(x))$ leži u $\mathcal{D}$. Prema tome, funkcije $f(t, y_k(t))$ možemo zaista formirati za svako k. Dokažimo da je funkcija $y_k(x)$ koja je do sada definirana na $[x_0, x_0 + \frac{2k}{h}]$, neprekidna. Očito da je funkcija $y_k(x)$ neprekidna na $[x_0, x_0 + \frac{h}{k})$, jer je konstantna na tom intervalu. Na intervalu $(x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + \frac{2h}{k}]$ funkcija $y_k(x)$ definirana je kao integral neprekidne funkcije, pa je i $y_k(x)$ očito neprekidna funkcija na $(x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + \frac{2h}{k}]$. Ostaje da se vidi da je $y_k(x)$ neprekidna u $x = x_0 + \frac{h}{k}$. Kada $x \nearrow x_0 + \frac{h}{k}$, tada imamo da $y_k(x) = y_0 \nearrow y_0$. Ako pak $x \searrow x_0 + \frac{h}{k}$, tada imamo da

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \to y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y_k(t))dt = y_0.$$

Ovo znači da $y_k(x) \to y_0 = y_k(x_0 + \frac{h}{k})$ kad $x \to x_0 + \frac{h}{k}$, pa je funkcija $y_k(x)$ neprekidna u tački $x_0 + \frac{h}{k}$. Na osnovu ovoga imamo da je funkcija $y_k(x)$ definirana i neprekidna na $[x_0, x_0 + \frac{2h}{k}]$. Dokažimo sada da tačka $(x, y_k(x))$ pripada $\mathcal{R}$ ako $x \in [x_0, x_0 + \frac{2h}{k}]$. Za $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$, smo ovo već provjerili. Neka zato $x \in [x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + \frac{2h}{k}]$. Tada imamo da je $|x - x_0| \leq \frac{h}{k} \leq h \leq a$. Dalje, imamo da je

$$|y_k(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} |f(t, y_k(t))|dt \right|. \tag{1.31}$$

Pošto tačka $(t, y_k(t)) \in \mathcal{R}$ kada je $t \in [x_0, x - \frac{h}{k}] \subseteq [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$, to imamo da je

$$\left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} |f(t, y_k(t))|dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} M dt \right| \leq M \left| x - x_0 - \frac{h}{k} \right| \leq M\frac{h}{k} \leq Mh.$$

Kako je $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, to je $h \leq \frac{b}{M}$ tj. $Mh \leq b$. Dakle, za $x \in [x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + \frac{2h}{k}]$ i za tačku $(x, y_k(x))$ imamo da je $|x - x_0| < a$ i $|y_k(x) - y_0| < b$. Ovo znači da tačka $(x, y_k(x))$ leži u $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$. Prema tome, možemo formirati funkciju $f(t, y_k(t))$ koja je neprekidna na ovom intervalu. Ako je $x \in [x_0 + \frac{2h}{k}, x_0 + \frac{3h}{k}]$, tada $x - \frac{h}{k} \in [x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + \frac{2h}{k}]$, pa na intervalu $[x_0, x - \frac{h}{k}]$ možemo formirati funkciju $f(t, y_k(t))$. Ovu funkciju možemo integrirati na ovom intervalu. Stavimo da je

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt, \quad x \in [x_0 + \frac{2h}{k}, x_0 + \frac{3h}{k}].$$

Kao i ranije zaključujemo da je funkcija $y_k(x)$, koja je definirana na $[x_0, x_0 + \frac{3h}{k}]$, neprekidna na tom segmentu i za svako $x \in [x_0, x_0 + \frac{3h}{k}]$ je $(x, y_k(x)) \in \mathcal{R}$. Nastavljajući postupak na ovaj način vidimo da funkciju $y_k(x)$ možemo definirati na $[x_0, x_0 + h]$. Dakle za svako $k = 1, 2, ...$ funkcija $y_k(x)$ je data sa

$$\begin{aligned} y_k(x) &= y_0, \quad x_0 \le x \le x_0 + \frac{h}{k} \\ y_k(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt, \quad x_0 + m\frac{h}{k} \le x \le x_0 + (m+1)\frac{h}{k} \\ & \text{za } m = 1, 2, \dots k - 1. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Pri tome je funkcija $y_k(x)$ neprekidna na $[x_0, x_0 + h]$. Pošto je u (1.32) k proizvoljan broj, to na segmentu $[x_0, x_0 + h]$ imamo definiran niz funkcija $\{y_k(x)\}$. Dokažimo da je ovo niz podjednako ograničenih i podjednako neprekidnih funkcija na $[x_0, x_0 + h]$. Za proizvoljno $k = 1, 2, ...$ imamo da je $|y_k(x)| = |y_0|$ ako je $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{k}]$. Ako je $x \in (x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + h]$ imamo da je

$$\begin{aligned} |y_k(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right| \le |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right| \\ &\le |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} |f(t, y_k(t))|dt \right| \le |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k}} Mdt \right| = \\ &= |y_0| + M|x - \frac{h}{k} - x_0| \le |y_0| + M|x - x_0| \le |y_0| + Mh \le |y_0| + b, \end{aligned}$$

tj. $|y_k(x)| \le |y_0| + b$. Ovo znači da je to niz podjednako ograničenih funkcija. Dokažimo sada podjednaku neprekidnost ovog niza funkcija. Dokažimo da za svako $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + h]$ vrijedi $|y_k(x_1) - y_k(x_2)| \le M|x_1 - x_2|$. Uzmimo sada bilo koje dvije tačke x_1, x_2 iz $[x_0, x_0 + h]$. Ako $x_1, x_2 \in \left[x_0, x_0 + \frac{h}{k}\right]$ tada je

$$|y_k(x_2) - y_k(x_1)| = |y_0 - y_0| = 0 \le M|x_1 - x_2|$$

Ako $x_1 \in \left[x_0, x_0 + \frac{h}{k}\right]$, $\quad x_2 \in \left(x_0 + \frac{h}{k}, x_0 + h\right]$ tada je

$$
\begin{aligned}
|y_k(x_1) - y_k(x_2)| &= \left| y_0 - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right) \right| = \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right| \le \left| \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{k}} |f(t, y_k(t))|dt \right| \\
&\le \left| \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{k}} M dt \right| = M \left| x_2 - \frac{h}{k} - x_0 \right| = M \left| x_2 - \left(\frac{h}{k} + x_0 \right) \right| \\
&\le M\, |x_2 - x_1| \; \left(\text{jer je } x_1 \le \frac{h}{k} + x_0 \right).
\end{aligned}
$$

Ako $x_1, x_2 \in \left(x_0 + \frac{h}{k},\, x_0 + h\right]$ tada je

$$
\begin{aligned}
|y_k(x_1) - y_k(x_2)| &= \left| \int_{x_0}^{x_1 - \frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt - \int_{x_0}^{x_2 - \frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right| = \\
&= \left| \int_{x_2 - \frac{h}{k}}^{x_1 - \frac{h}{k}} f(t, y_k(t))dt \right| \le \left| \int_{x_2 - \frac{h}{k}}^{x_1 - \frac{h}{k}} |f(t, y_k(t))|dt \right| \\
&\le \left| \int_{x_2 - \frac{h}{k}}^{x_1 - \frac{h}{k}} M dt \right| = M|x_2 - x_1|.
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo

$$
|y_k(x_2) - y_k(x_1)| \le M|x_2 - x_1|, \quad x_1,\, x_2 \in [x_0,\, x_0 + h].
$$

Odavde neposredno slijedi ravnomjerna neprekidnost niza $\{y_k(x)\}$. Za dato $\varepsilon > 0$ stavimo $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Očito da δ zavisi samo od ε. Sada imamo da za sve $k = 1, 2, \ldots$ i za sve $x_1,\, x_2 \in [x_0,\, x_0 + h]$ vrijedi

$$
|y_k(x_1) - y_k(x_2)| \le M|x_2 - x_1| \le M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad \text{čim je} \quad |x_2 - x_1| \le \delta.
$$

Ovo znači da je $\{y_k(x)\}$ niz podjedanko neprekidnih funkcija. Sada iz Arzela-Ascolievog teorema slijedi da niz $\{y_k(x)\}$ sadrži podniz $\{y_{k_i}(x)\}$ koji konvergira ravnomjerno na $[x_0,\, x_0 + h]$ prema neprekidnoj funkciji $y(x)$. Dokažimo da $y(x)$ zadovoljava integralnu jednadžbu

$$
y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.33}
$$

Pošto $y_{k_i}(x) \to y(x)$ kada $i \to \infty$ i pošto je $y_{k_i}(x_0) = y_0$ to je očito $y(x_0) = y_0$. Dakle, jednadžba (1.33) je zadovoljena za $x = x_0$. Neka sad $x \in (x_0, x_0 + h]$. Pošto $k_i \to \infty$ $(i \to \infty)$ to $x_0 + \frac{h}{k_i} \to x_0$ kada $i \to \infty$. Za $x > x_0$ postoji dovoljno veliko i tako da je $x > x_0 + \frac{h}{k_i}$.

Na osnovu (1.32) imamo da je

$$y_{k_i}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{h}{k_i}} f(t, y_{k_i}(t))dt.$$

Dalje imamo da je

$$y_{k_i}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k_i}(t))dt + \int_{x}^{x-\frac{h}{k_i}} f(t, y_{k_i}(t))dt. \tag{1.34}$$

Za zadnji član na desnoj strani imamo

$$\left|\int_{x}^{x-\frac{h}{k_i}} f(t, y_{k_i}(t))dt\right| \leq \left|\int_{x}^{x-\frac{h}{k_i}} |f(t, y_{k_i}(t))|dt\right| \leq \left|\int_{x}^{x-\frac{h}{k_i}} Mdt\right| = M\frac{h}{k_i}.$$

Dakle, $\int_{x}^{x-\frac{h}{k_i}} f(t, y_{k_i}(t))dt \to 0$ $(i \to 0)$. Pošto $y_{k_i}(x)$ teži ravnomjerno ka $y(x)$ na segmentu $[x_0, x_0 + h]$, zbog neprekidnosti funkcije f dobivamo da $f(t, y_{k_i}(t))$ ravnomjerno teži ka $f(t, y(t))$. Na osnovu ovoga i teorema o prelasku na limes pod znakom integrala dobivamo da je

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y_{k_i}(t))dt \to \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \ (i \to \infty).$$

Ako u relaciji (1.34) pustimo da $i \to \infty$ tada dobivamo da je $y(x)$ rješenje integralne jednadžbe (1.34). Pošto je $y(x)$ neprekidna funkcija, to slijedi da je $y(x)$ rješenje Cauchyevog problema. □

U primjeru koji slijedi pokazat ćemo da Peanov teorem obezbjeđuje postojanje rješenja Cauchyevog problema, ali ne i jedinstvenost.

Primjer 1.1.11. *Peanov teorem pod pretpostavkom neprekidnosti funkcije obezbjeđuje egzistenciju rješenja Cauchyevog problema, ali ne obezbjeđuje jedinstvenost rješenja.*

Naime, moguće je da Cauchyev problem pod pretpostavkama Peanovog teorema ima i više rješenja, kao što to pokazuje sljedeći primjer.

Posmatrajmo diferencijalnu jednadžbu $y' = y^{2/3}$. *Funkcija* $f(x, y) = y^{2/3}$ *je neprekidna za svako* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Opće rješenje ove jednadžbe je* $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$. *Geometrijski ova familija predstavlja familiju kubnih parabola. Međutim, iz jednadžbe je jasno da je* $x-$*osa, zadana jednadžbom* $y \equiv 0$, *također rješenje posmatrane diferencijalne jednadžbe. Dakle, svakom tačkom* $x-$*ose prolaze po dvije integralne krive, to su odgovarajuća parabola i* $x-$*osa. Znači da Cauchyev problem* $y' = y^{2/3}$, $\quad y(x_0) = 0$ *ima bar dva rješenja.*

U sljedećem primjeru vidjet ćemo da neprekidnost funkcije $f(x, y)$ u Peanovom teoremu jeste dovoljan, ali nije potreban uvjet za egzistenciju rješenja Cauchyevog problema. Drugim rječima Cauchyev problem može imati rješenje i u slučaju kada funkcija $f(x, y)$ nije neprekidna.

Primjer 1.1.12. *Posmatrajmo diferencijalnu jednadžbu*

$$y' = sgn\ y, \quad sgn\ y = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

Desna strana jednadžbe, kao funkcija od $y(x)$, ima prekid u svakoj tački $x-$ose. Međutim, očito je da svakom tačkom $x-$ose prolazi integralna kriva posmatrane jednadžbe, a to je $x-$osa zadana sa $y \equiv 0$.

Vidjeli smo dovoljan uvjet pod kojim Cauchyev problem (1.13) ima bar jedno rješenje. Mađutim, u primjenama je veoma važno ne samo da imamo rješenje, nego i da je to rješenje jedinstveno.

Sada ćemo navesti i dokazati teorem koji daje dovoljne uvjete jedinstvenosti rješenja posmatranog Cauchyevog problema.

Teorem 1.1.4 (Cauchy-Picardov teorem). *Posmatrajmo Cauchyev problem*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Pretpostavimo da su funkcije f i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne na nekom pravougaoniku

$$\mathcal{R} = \{(x,y): \ |x-x_0| \le a, \ |y-y_0| \le b, \ a > 0, \, b > 0\}$$

koji je opisan oko tačke (x_0, y_0). Tada postoji pozitivan broj $h \le a$ takav da Cauchyev problem (1.36) ima jedno i samo jedno rješenje u intervalu $|x - x_0| \le h$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka.

1. Kako je f neprekidna na $\mathcal{R}$, onda je tamo i ograničena. Dakle, postoji realan pozitivan broj M takav da je $|f(x,y)| \le M$ za svaku tačku $(x,y) \in \mathcal{R}$. Neka je h manji od brojeva a i $\dfrac{b}{M}$, tj.

$$h = \min\left\{a, \ \frac{b}{M}\right\}. \tag{1.36}$$

Dokazat ćemo da problem (1.36) ima jedno i samo jedno rješenje u intervalu $|x - x_0| \le h$, gdje je h dat sa (1.36). Iako nismo u mogućnosti da eksplicitno nađemo rješenje problema (1.36), pokazat ćemo da rješenje postoji, da je jedinstveno i kako ga aproksimirati. Grubo govoreći, dokaz se sastoji u tome da pokažemo da sljedeći niz funkcija

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & y_0 \\ y_1(x) & = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \\ y_2(x) & = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \\ \cdots & & \cdots\cdots \\ y_n(x) & = & y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \\ \cdots & & \cdots\cdots \end{array} \tag{1.37}$$

konvergira i da je njegov limes jedinstveno rješenje Cauchyevog problema (1.36).

2. Neka su (x, y_1) i (x, y_2) bilo koje dvije tačke iz $\mathcal{R}$. Primjenom teorema o srednjoj vrijednosti na funkciju f, posmatrajući f kao funkciju od y, imamo

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})(y_1 - y_2), \tag{1.38}$$

gdje je $\bar{y}$ između y_1 i y_2. Kako je $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidna na $\mathcal{R}$, onda je tamo i ograničena. Dakle, postoji realna pozitivna konstanta K takva da je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K \tag{1.39}$$

za svaku tačku $(x, y) \in \mathcal{R}$. Iz (1.38) i (1.39) slijedi da za svaki par tačaka (x, y_1) i (x, y_2) iz $\mathcal{R}$, funkcija f zadovoljava uvjet

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{1.40}$$

Funkcija f koja je definirana na $\mathcal{R}$ i zadovoljava uvjet (1.40) za neku pozitivnu konstantu K i svaki par tačaka (x, y_1) i (x, y_2) zove se *Lipschitz neprekidna po y na $\mathcal{R}$ sa Lipschitzovom konstantom K*. Dakle, pretpostavka da je $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidna na $\mathcal{R}$ implicira da je f Lipschitz neprekidna po y na $\mathcal{R}$. U ovom teoremu mi smo koristili upravo neprekidnost parcijalnog izvoda $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ umjesto same Lipschitz neprekidnosti.

3. Posmatrajmo niz funkcija $y_0(x), y_1(x), \ldots y_n(x), \ldots$ definiran sa (1.37). Pokazat ćemo da $y_n(x)$ za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$ postoji u $|x - x_0| \leq h$, da su sve funkcije neprekidne na tom intervalu i da zadovoljavaju nejednakost

$$|y_n(x) - y_0| \leq b \quad \text{za} \quad |x - x_0| \leq h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.41}$$

U dokazu ćemo koristiti matematičku indukciju. Dakle, prvo ćemo dokazati tvrdnju za $n = 0$. Zatim ćemo pretpostaviti da je tvrdnja tačna za $n = k$, a onda ćemo dokazati za $n = k + 1$. Za $n = 0$, $y_0(x) = y_0$ je neprekidna u $|x - x_0| \leq h$, jer je konstantna funkcija neprekidna svuda. Nejednakost (1.41) je zadovoljena, jer je $|y_0(x) - y_0| = 0$. Pretpostavimo sada da je $y_k(x)$ neprekidna u $|x - x_0| \leq h$ i da nejednakost (1.41) vrijedi za $n = k$. Tada je $f(x, y_k(x))$ neprekidna po x u intervalu $|x - x_0| \leq h$, jer su na tom intervalu neprekidne funkcije f i y_k. Dakle, y_{k+1} je dobro definiran sa (1.37) za $n = k+1$ i neprekidna je funkcija na intervalu $|x - x_0| \leq h$, jer je integral neprekidne funkcije neprekidna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned}
|y_{k+1}(x) - y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt\right| \\
&\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))|dt\right| \\
&\leq M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq M\frac{b}{M} = b.
\end{aligned}$$

Ovim je dokazano da tvrdnja vrijedi za svako $n = 0, 1, \ldots$ Zadnja nejednakost objašnjava izbor broja h.

4. Sada ćemo matematičkom indukcijom dokazati da za svako $n = 0, 1, \ldots$ i za $|x - x_0| \leq h$ vrijedi sljedeća nejednakost

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}|x - x_0|^n}{n!} \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}. \tag{1.42}$$

Za $n = 1$, imamo

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt\right| \leq M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| = M|x - x_0| \leq Mh.$$

Dakle, (1.42) je tačna za $n = 1$. Sada ćemo pretpostaviti da je (1.42) tačna za $n = m$, tj. da za $|x - x_0| \leq h$ vrijedi

$$|y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leq \frac{MK^{m-1}|x - x_0|^m}{m!} \leq \frac{MK^{m-1}h^m}{m!}. \tag{1.43}$$

i pokazat ćemo da (1.42) vrijedi za $n = m+1$. Koristeći (1.37) i (1.40), dobivamo

$$\begin{aligned}
|y_{m+1}(x) - y_m(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_m(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_{m-1}(t))dt\right| \\
&\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t))|\right| dt \\
&\leq K\left|\int_{x_0}^{x} |y_m(t) - y_{m-1}(t)|dt\right|.
\end{aligned}$$

Sada, koristeći (1.43), imamo

$$\begin{aligned}
|y_{m+1}(x) - y_m(x)| &\leq \frac{MK^m}{m!}\left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|^m dt\right| \\
&= \frac{MK^m|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{MK^m h^{m+1}}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

čime je (1.42) dokazano.

5. Sljedeći korak u dokazu ovog teorema je da pokažemo da niz funkcija $\{y_n(x)\}$ uniformno konvergira ka funkciji $y(x)$ na intervalu $|x-x_0| \leq h$. U tom cilju, primijetimo sljedeće: $n-$ta parcijalna suma reda

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(x) - y_{n-1}(x)) \tag{1.44}$$

upravo je jednaka $y_n(x)$. Dakle, red (1.44) i niz $\{y_n(x)\}$ imaju iste osobine po pitanju konvergencije. Osim toga, budući da vrijedi (1.42), red (1.44) je dominiran numeričkim redom

$$|y_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

Ovaj numerički red konvergira. Naime,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{MK^{n-1}h^n}{n!} = \frac{M}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Kh)^n}{n!} = \frac{M}{K}(e^{Kh} - 1).$$

Na osnovu Weierstrassovog kriterija red (1.44) konvergira apsolutno i uniformno na intervalu $|x-x_0| \leq h$. Označimo njegov limes sa $y(x)$. Dakle,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x). \tag{1.45}$$

6. Sada ćemo dokazati da je funkcija $y(x)$ rješenje Cauchyevog problema (1.36). Najprije, funkcija $y(x)$ zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Naime, iz (1.37), imamo

$$y_n(x_0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Prelazeći na limes kad $n \to \infty$ dobivamo $y(x_0) = y_0$. Pošto je $y(x)$ uniforman limes niza neprekidnih funkcija $y_n(x)$ na intervalu $|x-x_0| \leq h$, slijedi da je $y(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $|x-x_0| \leq h$. Također, iz (1.41), prelazeći na limes kada $n \to \infty$, imamo da za $|x-x_0| \leq h$,

$$|y(x) - y_0| \leq b.$$

Dakle, funkcija $f(x, y(x))$ je dobro definirana i neprekidna na intervalu $|x-x_0| \leq h$ i integral

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

postoji. Iz (1.40) imamo da za $|x-x_0| \leq h$, vrijedi

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \leq K|y_n(x) - y(x)|.$$

Pošto niz funkcija $\{y_n(x)\}$ uniformno konvergira ka funkciji $y(x)$ na intervalu $|x-x_0| \leq h$, slijedi da niz $\{f(x, y_n(x))\}$ uniformno konvergira ka funkciji $f(x, y(x))$, zato je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.46}$$

Prelazeći na limes u (1.37) kad $n \to \infty$ i koristeći (1.45) i (1.46), dobivamo

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.47}$$

Diferenciranjem lijeve i desne strane u (1.47) po x (primijetimo da je desna strana diferencijabilna funkcija gornje granice x) imamo

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Ovim je dokaz da je $y(x)$ rješenje Cauchyevog problema (1.36) završen.

7. Ostalo je još da dokažemo da je $y(x)$ jedinstveno rješenje problema (1.36). U tom cilju pretpostavimo da je $\tilde{y}(x)$ drugo rješenje problema (1.36). Onda

$$y'(x) - \tilde{y}'(x) = f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)).$$

Integriranjem u granicama od x_0 do x i korištenjem činjenice da je $y(x_0) = y_0 = \tilde{y}(x_0)$, imamo

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t)))dt. \tag{1.48}$$

Pretpostavimo sada da je $x \geq x_0$. Slučaj kada je $x < x_0$ slično se dokazuje. Iz (1.48), koristeći (1.40), dobivamo

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq K \int_{x_0}^{x} |y(t) - \tilde{y}(t)|dt. \tag{1.49}$$

Stavimo

$$w(x) = \int_{x_0}^{x} |y(t) - \tilde{y}(t)|dt. \tag{1.50}$$

Koristeći (1.49), imamo

$$w'(x) = |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq K \int_{x_0}^{x} |y(t) - \tilde{y}(t)|dt = Kw(x)$$

ili

$$w'(x) - Kw(x) \leq 0. \tag{1.51}$$

Množeći obje strane nejednakosti (1.51) sa integracionim faktorom e^{-Kx}, dobivamo

$$\left(w(x)e^{-Kx}\right)' \leq 0. \tag{1.52}$$

Integrirajući obje strane od (1.52) u granicama od x_0 do x, imamo

$$w(x)e^{-Kx} - w(x_0)e^{-Kx_0} \leq 0.$$

Međutim, iz (1.50), imamo $w(x_0) = 0$ i $w(x) \geq 0$. Dakle,

$$0 \leq w(x)e^{-Kx} \leq 0,$$

odakle dobivamo

$$w(x) \equiv 0.$$

Sada iz (1.49), zaključujemo da je $y(x) = \tilde{y}(x)$. □

Primjedba 1.1.1. *Napomenimo da su ovdje navedeni i dokazani Peanov teorem i Cauchy-Picardov teorem lokalnog karaktera, jer garantiraju egzistenciju i jedinstvenost rješenja lokalno, tj. samo u okolini početnih uvjeta. Ako rješenje početnog problema (1.36) postoji na cijelom intervalu $|x - x_0| \leq a$ onda kažemo da rješenje postoji globalno*

Primjer 1.1.13. *Neka su dati diferencijalna jednadžba*

$$y' = x^2 + y^2$$

i početni uvjeti

$$y = 0 \quad \text{za} \quad x = 0.$$

Pokazati da ovaj problem ima jedinstveno rješenje.

Rješenje. Stavimo da je

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Uzmimo pravougaonik oko početnog uvjeta $(0, 0)$:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : \ |x| \leq a, \ |y| \leq b, \ a > 0, b > 0\}.$$

Očito je da su funkcije $f(x, y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ neprekidne u cijeloj ravni, pa su specijalno neprekidne na $\mathcal{R}$. Kako je $\mathcal{R}$ zatvoren i ograničen, onda su ove funkcije ograničene na $\mathcal{R}$. Dakle, vrijedi

$$|f(x, y)| \leq a^2 + b^2 \quad \text{i} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 2b.$$

Sada je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right\}.$$

Po Cauchy-Picardovom teoremu, posmatrani početni problem ima jedinstveno rješenje na intervalu $|x| \leq h$. Jasno je da broj h zavisi od izbora brojeva a i b.

Ako specijalno uzmemo $a = 1$ i $b = 1$, onda će posmatrani početni problem imati rješenje u intervalu $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Napomenimo da se postavljeni problem ne može riješiti integriranjem. Zato je veoma značajno ustanoviti da li problem ima rješenje i kada je ono jedinstveno, kako bi se mogle primijeniti neke druge metode i pokušati dobiti približno rješenje. ♦

Primjer 1.1.14. *Riješiti početni problem*

$$\begin{aligned} y' &= \sin(xy) \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Stavimo

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

Sada je $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$. Očito je da su funkcije $f(x, y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne za svako x i y, pa su specijalno neprekidne na zatvorenom i ograničenom pravougaoniku

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : \ |x| \leq a, \ |y| \leq b, \ a > 0, \ b > 0\}.$$

Dakle, na $\mathcal{R}$ su i ograničene. Po Cauchy-Picardovom teoremu postavljeni problem ima jedinstveno rješenje. Primijetimo da je $y \equiv 0$ rješenje ovog problema (dakle, prolazi tačkom $(0, 0)$). Pošto postavljeni problem ima jedinstveno rješenje, onda zaključujemo da je $y \equiv 0$ i jedino rješenje ovog početnog problema. ♦

Primjedba 1.1.2. *Ako u početnom problemu (1.36) funkcija $f(x, y)$ zadovoljava uvjete Cauchy-Picardovog teorema u nekoj okolini početnih uvjeta (x_0, y_0) i takva je da vrijedi $f(x, y_0) \equiv 0$ u blizini tačke $x = x_0$, onda jedinstveno rješenje koje prolazi tačkom (x_0, y_0) je dato sa $y = y_0$ (zbog neprekidnosti funkcije po varijabli x).*

Primjedba 1.1.3. *Rješenje $y = y(x)$ jednadžbe $y' = f(x, y)$ na osnovu Cauchy-Picardovog teorema je definirano i neprekidno diferencijabilno na intervalu $|x - x_0| \leq h$, gdje je $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Ako je $h < a$, onda se, općenito govoreći, to rješenje može produžiti, tj. može se naći funkcija $y = \overline{y}(x)$ koja je definirana i neprekidno diferencijabilna u nekom intervalu koji sadrži interval $|x - x_0| \leq h$, koja zadovoljava jednadžbu $y' = f(x, y)$, i u svim tačkama intervala $|x - x_0| \leq h$ poklapa se sa rješenjem $y(x)$. Ovdje se nećemo baviti teoremima o produženju, ali ćemo na nekoliko jednostavnih primjera ilustrirati o čemu se zapravo radi.*

Primjer 1.1.15. *Pokazati da je rješenje jednadžbe*

$$y' = x\sin y$$

sa početnim uvjetima

$$y(0) = \frac{\pi}{2}$$

definirano za svako x.

Rješenje. Stavimo $f(x,y) = x\sin y$. Funkcija $f(x,y)$ je definirana i neprekidna u cijeloj ravni $\mathbb{R}^2$. Ispitajmo da li su zadovoljni uvjeti Cauchy-Picardovog teorema. Imamo, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos y$. Vidimo da je $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$ ako je $|x| \leq L$. Dakle, Lipschitzov uvjet je ispunjen u svim tačakama ravni $\mathbb{R}^2$, ali ne postoji konstanta L podesna za cijelu ravan. Lako se dobije da rješenje posmatrane jednadžbe koje zadovolja dati početni uvjet glasi

$$y = 2\arctan e^{\dfrac{x^2}{2}}.$$

Jasno je da je ovo rješenje definirano svuda u $\mathbb{R}^2$. Dakle, rješenje posmatrane jednadžbe sa datim početnim uvjetom je produženo tako da je definirano za sve realne vrijednosti x. ♦

Primjer 1.1.16. *Data je diferencijalna jednadžba*

$$y' = y^2$$

sa početnim uvjetom

$$y(x_0) = y_0,\ y_0 > 0.$$

Pokazati da se rješenje ovog početnog problema ne može produžiti desno od tačke $x_0 + \frac{1}{y_0}$, *ali može lijevo od te tačke.*

Rješenje. Stavimo $f(x,y) = y^2$. Jasno je da je funkcija $f(x,y)$ definirana i neprekidna u cijeloj ravni. Provjerimo da li zadovoljava Lipshitzov uvjet. Imamo

$$|y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|,$$

ako je $|y_1 + y_2| \leq L$. Dakle, ne postoji podesna konstanta za cijelu ravan. Naime, parcijalni izvod $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ je ograničen ako je y konačno, ali nije ograničen na cijeloj ravni. Međutim, ako funkcija $f(x,y)$ zadovoljava Lipshitzov uvjet i ako $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ postoji, onda je $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$. Dakle, postoji rješenje koje zadovoljava zadane početne uvjete koje se može naći Picardovim metodom, ali nema garancije da je to rješenje definirano za sve vrijednosti x. Integriranjem polazne jednadžbe, dobivamo

$$y = -\frac{1}{x+C}.$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta, dobivamo

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}.$$

Ovo rješenje je definirano i neprekidno u intervalu $\left(-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0}\right)$. Vidimo da kad $x \to x_0 + \frac{1}{y_0}$ onda $y \to +\infty$. (Strogo govoreći, kad x teži slijeva ovoj tački.)

Rješenje

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}$$

ima vertikalnu asimptotu $x = x_0 + \frac{1}{y_0}$. Slijedi, da se rješenje posmatranog početnog problema, dobiveno Picardovim metodom, ne može produžiti desno od tačke $x_0 + \frac{1}{y_0}$, ali se lijevo može produžiti neograničeno. ♦

Primjer 1.1.17. *Pokazati da se rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' = 1 + y^2$$

koje zadovoljava početni uvjet

$$y(0) = 0$$

ne može produžiti izvan intervala $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rješenje. Integriranjem jednadžbe, imamo

$$\arctan y = x + C, \quad -\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}.$$

Odavde slijedi da je rješenje dato sa

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ovo rješenje ima dvije vertikalne asimptote $x = -\dfrac{\pi}{2}$ i $x = \dfrac{\pi}{2}$. Dakle, rješenje posmatranog početnog problema ne može se produžiti lijevo od tačke $-\dfrac{\pi}{2}$ niti desno od tačke $\dfrac{\pi}{2}$, tj. ne može se produžiti izvan intervala $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. ♦

1.1.3 Neprekidna zavisnost rješenja od početnih uvjeta

Cauchyev problem (1.36) može da predstavlja model nekog fizikalnog problema u kojem su često uključeni parametri poput dužine, mase, temperature itd. Vrijednosti ovih parametara mogu se mjeriti samo do nekog stepena tačnosti. Dakle, u posmatranom Cauchyevom problemu (1.36), početni uvjet (x_0, y_0) kao i funkcija $f(x, y)$ mogu se javiti sa nekom "greškom" ili zbog potrebe, ili zbog pogodnijeg posmatranja problema. Zato je veoma važno znati šta se dešava sa rješenjem problema (1.36) ako se početni uvjet (x_0, y_0) i funkcija $f(x, y)$ "mijenjaju". Odgovor na ovo pitanje dat ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 1.1.5. *Naka su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(i) Funkcija $f(x, y)$ je neprekidna na oblasti $\mathcal{D}$ koja sadrži tačke (x_0, y_0) i (x_1, y_1) ravni i ograničena je konstantom M na toj oblasti.

(ii) $f(x, y)$ *zadovoljava Lipschitzov uvjet na* $\mathcal{D}$ *(sa Lipschitzovom konstantom* L*).*

(iii) *Funkcija* $g(x, y)$ *je nepekidna na* $\mathcal{D}$ *i ograničena na toj oblasti konstantom* M_1*.*

(iv) $y(x)$ *i* $z(x)$ *su rješenja početnog problema (1.36) i*

$$z' = f(x, z) + g(x, z), \quad z(x_1) = y_1,$$

na intervalu J *koji sadrži* x_0 *i* x_1*.*

Onda za svako $x \in J$ *vrijedi sljedeća nejednakost*

$$|y(x) - z(x)| \leq \left(|y_0 - y_1| + (M + M_1)|x - x_1| + \frac{1}{L} M_1 \right) e^{(L|x - x_0|) - \frac{1}{L} M_1} \quad (1.53)$$

Dokaz. Ranije smo pokazali da je riješiti Cauchyev problem isto što i riješiti odgovarajuću integralnu jednadžbu. Stoga za svako $x \in J$, imamo

$$\begin{aligned} z(t) &= y_1 + \int_{x_1}^{x} [f(t, z(t)) + g(t, z(t))] dt \\ &= y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t)) dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t, z(t)) dt + \int_{x_1}^{x} g(t, z(t)) dt. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= y_0 - y_1 + \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt \\ &- \int_{x_0}^{x_1} f(t, z(t)) dt - \int_{x_1}^{x} g(t, z(t)) dt. \end{aligned}$$

Iz prethodnog, imamo

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq |y_0 - y_1| + M|x_1 - x_0| + M_1|x - x_0| \quad (1.54) \\ &+ L \left| \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| dt \right|. \quad (1.55) \end{aligned}$$

Stavljajući $u(x) = \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| dt$ i rješavanjem dobivene diferencijalne nejednakosti, dolazimo do tražene nejednakosti. □

Iz nejednakosti (1.53) je jasno da ako se početni uvjeti malo mijenjaju i ako je funkcija $f(x, y)$ ograničena, onda razlika između dobivenih rješenja također mala. Dakle, izjava, "ako se funkcija $f(x, y)$ i početni uvjet (x_0, y_0) neprekidno mijenjaju, onda rješenje početnog problema (1.36) se neprekidno mijenja " je tačna. Također, jasno je da rješenje $z(x)$ početnog problema $z' = f(x, z) + g(x, z), \quad z(x_1) = y_1$ ne mora biti jedinstveno.

Primjer 1.1.18. *Posmatrajmo diferencijalnu jednadžbu iz Primjera 1.1.14, ali sa početnim uvjetom* $y(0) = 1$, *tj.*

$$y' = \sin(xy), \quad y(0) = 1$$

na pravougaoniku $\mathcal{R} = \{(x, y) : |x| \leq 1/2,\ |y - 1| \leq 1/2\}$. *Slično kao u Primjeru 1.1.14, pokaže se da ovaj problem ima jedinstveno rješenje na intervalu* $|x| \leq h \leq 1/2$. *Kao aproksimaciju prethodno posmatranog problema, uzmimo problem*

$$z' = xz, \quad z(0) = 1.1,$$

koji također ima jedinstveno rješenje $z(x) = 1.1e^{x^2/2}$ *na intervalu* $|x| \leq 1/2$. *Po Taylorovoj formuli, imamo*

$$|g(x, y)| = |\sin(xy) - xy| \leq \frac{1}{6}|xy|^6 \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{128} = M_1.$$

Na osnovu Teorema 1.1.5, imamo

$$|y(x) - z(x)| \leq \left(0,1 + \frac{9}{64}\right)e^{\left(\frac{|x|}{2}\right)} - \frac{9}{64} \quad \text{za sve} \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

1.1.4 Opće i partikularno rješenje

Diferencijalna jednadžba

$$y' = f(x, y) \tag{1.56}$$

može imati beskonačno mnogo rješenja. Familija rješenja jednadžbe (1.56), koja zavisi od jedne proizvoljne konstante C :

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.57}$$

naziva se *opće rješenje* jednadžbe (1.56). Geometrijski gledano ta familija predstavlja familiju integralnih krivih u ravni (x, y), koja zavisi od jednog parametra C, pri čemu se jednadžba te familije može riješiti po y. Za svaku vrijednost proizvoljne konstante (parametra) C (od dopustivih vrijednosti) formula (1.57) daje rješenje (integralnu krivu) jednadžbe (1.56).

Iz formule (1.57), općenito govoreći, možemo dobiti rješenje Cauchyevog problema jednadžbe (1.56). Dakle, možemo dobiti rješenje koje zadovoljava date početne uvjete (x_0, y_0). Naime, u formuli (1.57) zamijenimo x sa x_0 i y sa y_0, nakon čega izračunamo vrijednost konstante $C = C_0$. Vratimo se u formulu (1.57) i C zamijenimo sa C_0 i dobivamo rješenje Cauchyevog problema $y = \varphi(x, C_0)$.

Ovdje je veoma važno istaći da nema garancije da se može jednadžba $y_0 = \varphi(x_0, C)$ riješiti po C, kao i da je nađeno rješenje Cauchyevog problema jedinstveno. Stoga, da bismo imali i jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema, potrebno je na funkciju $y = \varphi(x, C)$ postaviti neka ograničenja, za koja bi formula (1.57) bila pogodna za rješenje Cauchyevog problema za bilo koje početne uvjete (x_0, y_0) iz neke oblasti $\mathcal{D}$ promjenljivih x i y. Zato ćemo u oblasti $\mathcal{D}$ promjenljivih (x, y) posmatrati neku oblast čijom svakom tačkom prolazi jedna i samo jedna integralna kriva jednadžbe (1.56). Imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.1.7. *Podskup oblasti definiranosti $\mathcal{D}$ obične diferencijalne jednadžbe (1.2) kroz čiju svaku tačku prolazi samo jedna integralna kriva, zvat ćemo* **oblast egzistencije i jedinstvenosti** *rješenja posmatrane jednadžbe.*[6] *Ovu oblast ćemo označiti sa $\mathcal{E}$.*

Dakle, opće rješenje definiramo na sljedeći način:

Definicija 1.1.8. *Neka je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja jednadžbe (1.56). Funkcija $y = \varphi(x, C)$, definirana u nekoj oblasti $\mathcal{D}$ promjenljive x i parametra C, je* ***opće rješenje*** *jednadžbe (1.56) ako vrijedi:*

(i) *$\varphi(x, C)$ je neprekidno-diferencijabilna po x u oblasti $\mathcal{D}$;*

(ii) *jednadžba $y = \varphi(x, C)$ je rješiva po C u oblasti $\mathcal{E}$, tj. $C = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$;*

(iii) *funkcija $\varphi(x, C)$ je rješenje obične diferencijalne jednadžbe (1.2) za svako C, pri čemu je $C = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$.*

Nije teško vidjeti da opće rješenje sadrži sva rješenja Cauchyevog problema. Naime, neka je $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ proizvoljna tačka i neka je funkcija $y(x)$ rješenje Cauchyevog problema, tj. neka je $y'(x) = f(x, y(x))$ i $y(x_0) = y_0$. Neka je $\varphi(x, C)$ opće rješenje te jednadžbe. Jednadžba $y = \varphi(x, C)$ je rješiva po C; $C = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$, zato postoji konstanta C_0 tako da je $\psi(x_0, y_0) = C_0$. Stavimo da je $\varphi(x, C_0) = y_1(x)$. Ova funkcija je rješenje Cauchyevog problema koje prolazi tačkom (x_0, y_0) zato što je

$$y_1(x_0) = \varphi(x_0, C_0) = \varphi(x_0, \psi(x_0, y_0)) = y_0.$$

Ako tačkom (x_0, y_0) prolaze dva rješenja Cauchyevog problema, kako je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti, oba se rješenja moraju poklapati na zajedničkom intervalu definiranosti, te je proizvoljno rješenje Cauchyevog problema sadržano u općem rješenju.

Zbog navedenog, često se opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe (1.56) definira kao rješenje koje zavisi od proizvoljne konstante C ako se iz njega za odgovarajuće vrijednosti konstante može dobiti bilo koje rješenje Cauchyevog problema.

Primjer 1.1.19. *Obična diferencijalna jednadžba $y' = y^2$ ima opće rješenje $y = \dfrac{1}{C - x}$. Uzmimo tačku $(-1, 1)$. Integralna kriva koja prolazi ovom tačkom je $\phi(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$. Integralna kriva koja prolazi kroz tačku $(1, 0)$ je data sa $\phi(x) = 0$ $x \in (-\infty, +\infty)$ i ovo rješenje je sadržano u općem rješenju za $C = \infty$.*

[6] Može se dogoditi da je *oblast egzistencije i jedinstvenosti* rješenja podijeljena u nekoliko podoblasti pa u tom slučaju svaka od oblasti imat će svoje opće rješenje.

Definicija 1.1.9. *Za rješenje jednadžbe (1.56) kažemo da je* **partikularno** *ako se može dobiti iz općeg rješenja za neku vrijednost konstante C.*

Sada ćemo definirati pojam *integrala* diferencijalne jednadžbe (1.56). Podsjetimo se da funkcija $\psi(x, y)$ definirana u Definiciji 1.1.8, ima osobinu da je $\psi(x, \varphi(x, C)) = C$ za svako x iz oblasti definiranosti rješenja $\varphi(x, y)$.

Definicija 1.1.10. *Funkcija $\psi(x, y)$, definirana, neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $\mathcal{E}$, pri čemu je $\psi'_y(x, y) \neq 0$ za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$, je* **integral** *jednadžbe (1.56) u toj oblasti ako duž bilo kojeg rješenja ima konstantnu vrijednost.*

Uvjet $\psi'_y(x, y) \neq 0$ je nametnut jer bi u protivnom iz totalnog diferencijala $d\psi = \psi'_x dx + \psi'_y dy \equiv 0$ i iz jednadžbe (1.56) slijedilo da je funkcija $f(x, y)$ neodređena u nekim tačkama oblasti $\mathcal{E}$.

Vrijedi sljedeći Teorem.

Teorem 1.1.6. *Funkcija, $\psi(x, y)$ definirana i neprekidna zajedno sa parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $\mathcal{E}$, pri čemu je $\psi'_y(x, y) \neq 0$ za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$, je integral jednadžbe (1.56) ako i samo ako je*

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{E}) \quad \psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y) f(x, y) = 0.$$

Dokaz. Budući da integralna kriva proizvoljnog rješenja $\varphi(x),\ x \in (a, b)$ pripada oblasti $\mathcal{E}$, imamo

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{E}) \quad \psi'_x(x, \varphi(x)) + \psi'_y(x, \varphi(x)) f(x, \varphi(x)) =$$

$$= \psi'_x(x, \varphi(x)) + \psi'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x, \varphi(x)),$$

odnosno, za svako $x \in (a, b)$ je $\psi(x, \varphi(x)) = const.$

Analogno se dokazuje tvrdnja za diferencijalnu jednadžbu u simetričnom obliku, samo što relacija iz Teorema 1.1.6 postaje

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{E}) \quad \psi'_x(x, y) N(x, y) - \psi'_y(x, y) M(x, y) = 0.$$

□

Definicija 1.1.11. *Ako je funkcija $\psi(x, y)$ za $(x, y) \in \mathcal{E}$, integral jednadžbe (1.56), tada se izraz*

$$\psi(x, y) = C, \ C = konst., \tag{1.58}$$

naziva ***opći integral*** *te jednadžbe.*

Konstanta C u izrazu (1.58) je proizvoljna pod uvjetom da sam izraz ima smisla.

Za datu funkciju $\varphi(t)$, definiranu u oblasti vrijednosti integrala $\psi(x, y),\ (x, y) \in \mathcal{E}$, funkcija $F(x, y) = \varphi(\psi(x, y)),\ (x, y) \in \mathcal{E}$ je konstantna duž bilo kojeg rješenja. Ako je funkcija $\varphi(t)$ neprekidno diferencijabilna i ako je $\varphi'(t) \neq 0$ na svom domenu, onda je funkcija $F(x, y),\ (x, y) \in \mathcal{E}$ integral jednadžbe (1.56). Naime, funkcija $F(x, y)$ je definirana i neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $\mathcal{E}$, pri čemu je

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{E}) \quad F'_y(x, y) = \varphi'(\psi)\psi'_y(x, y) \neq 0.$$

Budući da je

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{E}) \quad F'_x(x, y) + F'_y(x, y)f(x, y) =$$
$$= \varphi(\psi(x, y))[\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)f(x, y)] = 0,$$

po Teoremu 1.1.6 slijedi da je funkcija $F(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{E}$, integral jednadžbe (1.56).

1.1.5 Singularno rješenje

Do sad smo upoznali dvije vrste rješenja jednadžbe (1.56) opće i partikularno. Sada ćemo govoriti o rješenju koje se ne može dobiti iz općeg niti za jednu vrijednost konstante C uključujući $\pm\infty$. Takvo rješenje se zove *singularno.* Integralne krive singularnog rješenja ne pripadaju oblasti jedinstvenosti rješenja.

Definicija 1.1.12. *Za rješenje $\omega(x)$ jednadžbe (1.56) kažemo da je* **singularno** *ako bilo kojom njegovom tačkom, osim njega, prolazi i neko drugo rješenje koje u toj tački ima istu tangentu kao i rješenje $\omega(x)$, a razlikuje se od njega u ma kojoj okolini te tačke. Integralna kriva singularnog rješenja se naziva* **singularna integralna kriva.**

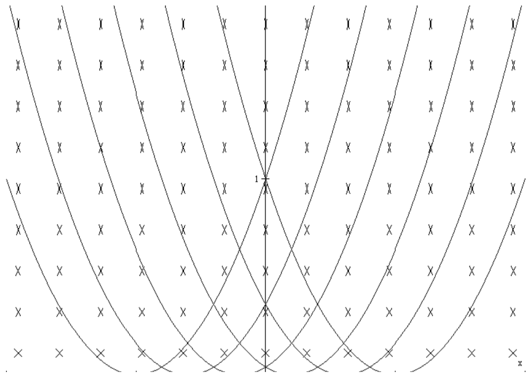
Primjer 1.1.20. *Pokazati da jednadžba $(y')^2 - 4y = 0$ ima opće rješenje dato sa $y = (x + C)^2$. Koliko rješenja prolazi tačkom $(x_0, 0)$?*

Rješenje. Direktnom zamjenom se pokaže da je familija funkcija $y = (x+C)^2$ opće rješenje jednadžbe $(y')^2 - 4y = 0$. Očigledno je funkcija $y \equiv 0$ rješenje date jednadžbe koje se ne može dobiti iz općeg rješenja ni za jednu vrijednost parametra C uključujući $\pm\infty$. Grafički opće rješenje predstavlja familiju parabola (Slika 1.3). Pored rješenja $y \equiv 0$, kroz tačku $(x_0, 0)$ prolazi i rješenje $y = (x-x_0)^2$ koje se dobije iz općeg rješenja za $C = -x_0$, pa je $y \equiv 0$ singularno rješenje. ♦

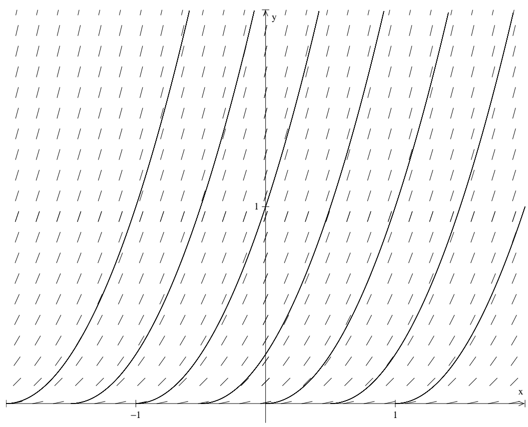
U sljedećem primjeru diferencijalna jednadžba je slična diferencijalnoj jednadžbi u prethodnom primjeru, ali su oblasti definiranosti rješenja drugačije.

Primjer 1.1.21. *Pokazati da jednadžba $y' = 2\sqrt{y}$ ima opće rješenje $y = (x + C)^2$, $x \geq -C$. Koliko rješenja prolazi tačkom $(-x_0, 0)$?*

Rješenje. Direktnom zamjenom se pokaže da je familija funkcija $y = (x + C)^2$, $x \geq -C$ opće rješenje date jednadžbe. Integralne krive čine dijelovi parabola desno od tačke $x = -C$. Primijetimo da je funkcija $y \equiv 0$ također rješenje. Međutim, ovo rješenje nije sadržano u općem rješenju niti za jednu vrijednost konstante C. Ovo rješenje je singularno. Osim toga, tačkom $(-x_0, 0)$ prolaze dvije integralne krive: $y \equiv 0$ i $y = (x + x_0)^2$, $x \geq -x_0$, imaju zajedničku



Slika 1.3: Polje pravaca i integralne krive diferencijalne jednadžbe $(y')^2 - 4y = 0$.



Slika 1.4: Polje pravaca i integralne krive diferencijalne jednadžbe $y' = 2\sqrt{y}$.

tangentu u toj tački, pa je prava $y \equiv 0$ obvojnica poluparabola, i kao takva, singularna integralna kriva (Slika 1.4). Ovdje treba uočiti da ova jednadžba ima i rješenja koja se mogu dobiti iz partikularnih i singularnih rješenja, na način da se uzme dio partikularnog i dio singularnog, koja imaju u zajedničkim tačkama istu tangentu. Takva rješenja se zovu *ni partikularna ni singularna* rješenja. Na primjer,

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq -x_0, \\ (x+x_0)^2, & x > -x_0, \end{cases}$$

nije ni partikularno ni singularno. Također, tačkom $(-x_0, 0)$ prolazi beskonačno mnogo rješenja, koja se lako mogu dobiti. ♦

Jedan od načina pronalaska singularnog rješenja diferencijalne jednadžbe

$$F(x, y, y') = 0$$

jeste preko *p-diskriminante* diferencijalne jednadžbe. Ako je funkcija $F(x, y, y')$ neprekidna i ako su njeni parcijalni izvodi F_x i $F_{y'}$ neprekidni u oblasti definiranosti diferencijane jednadžbe, tada singularno rješenje može biti nađeno preko rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0. \end{cases}$$

Jednadžbu $\psi(x, y) = 0$, koju dobijemo rješavajući ovaj sistem nazivamo *p-diskriminantnom krivom.* Da bismo ispitali da li je ona singularno rješenje potrebno je provjeriti:

1. Da li je ona rješenje diferencijalne jednadžbe?

2. Da li za svaku tačku krive $\psi(x, y) = 0$ postoje druga rješenja koja je dodiruju u toj tački. Odnosno ako je y_1 opće rješenje dato eksplicitno a y_2 rješenje za koje treba da utvrdimo da li je singularno (dato eksplicitno) potrebno je da sistem jednadžbi

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$$

ima rješenje za svako x_0 iz oblasti definiranosti diferencijalne jednadžbe $F(x, y, y') = 0$.

Drugi način na koji možemo pronaći singularno rješenje svodi se na određivanje obvojnice familije integralnih krivih.

Neka je $\Phi(x, y, C) = 0$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe $F(x, y, y') = 0$ dato u implicitnom obliku. Ako je funkcija $\phi(x, y, C)$ sa svojim parcijalnim izvodima neprekidna, obvojnica familije integralni krivih je rješenje sistema jednadžbi

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Da bi rješenje ovog sistema bilo singularno, potrebno je provjeriti da li su zadovoljena dva uvjeta koja smo naveli za p-diskriminantnu krivu.

1.2 Matematički modeli

Mnogi prirodni zakoni i hipoteze mogu se opisati preko matematičkih jednadžbi koje uključuju izvode. Na primjer, izvodi se u fizici pojavljuju kao brzina i ubrzanje, u geometriji kao koeficijent pravca tangente, u biologiji kao brzina rasta populacije, u psihologiji kao brzina učenje, u hemiji kao brzina reakcije, u ekonomiji kao brzina promjene troškova života, a u finansijama kao brzina rasta investicija itd.

U mnogim matematičkim modelima, s ciljem da se dobije jednadžba koja opisuje problem iz stvarnosti, obično pretpostavimo da je taj problem opisan sa jednostavnim zakonom, što će reći da često imamo idealističke pretpostavke. Nakon što je napravljen model u obliku diferencijalne jednadžbe, sljedeći korak je rješavanje diferencijalne jednadžbe te provjera da predviđanja do kojih se dođe sa rješenjem diferencijalne jednadžbe nisu u suprotnosti sa stvarnosti. Ako ima nekih neslaganja, potrebno je ponovo razmotriti pretpostavke koje su korištene u pravljenju modela i ponovo pokušati izgraditi model koji bi bolje opisivao posmatranu pojavu.

Diferencijalne jednadžbe prvog reda su veoma korisne u primjenama. Neka funkcija $y = f(x)$ predstavlja vezu između varijabli x i y. Znamo da prvi izvod $y' = dy/dx$ predstavlja brzinu promjene funkcije y pri jediničnoj promjeni varijable x. Ako je ova brzina promjene poznata (recimo, na osnovu eksperimenata ili fizikalnih zakona) i ako je jednaka funkciji $f(x, y)$, tada y zadovoljava diferencijalnu jednadžbu prvog reda $y' = f(x, y)$. Sad ćemo navesti neke konkretene primjere iz prakse[7].

Biologija (Maltuzijanski zakon rasta populacije bakterija)

■ Odavno je poznato da velika kolonija bakterija ima tendenciju rasta brzinom koja je proporcionalna broju prisutnih bakterija u koloniji. Za takvu koloniju, neka $N = N(t)$ predstavlja broj bakterija u nekom vremenu t. Tada, ako je k konstanta proporcionalnosti, funkcija $N = N(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu prvog reda [8]

$$N' = kN \tag{1.59}$$

Ova jednadžba je poznata kao *Maltuzijanski zakon* rasta populacije. T. R. Malthus je zabilježio 1798. god. da se veličina stanovništva u Evropi udvostručavala u regularnim vremenski intervalima, pa je zaključio da je brzina rasta populacije proporcionalna veličini populacije. Jednadžba (1.59) je diferencijalna jednadžba sa razdvojenim promjenljivim i njeno rješenje je dato sa $N(t) = N(0)e^{kt}$. U ovom slučaju $N(0)$ predstavlja broj bakterija u vremensko trenutku $t = 0$, tj. u nekom početnom trenutku posmatranja.

Sljedeće argumente možemo koristiti kao opravdanje za jednadžbu (1.59). Neka $N(t)$ predstavlja veličinu kolonije u trenutku t i neka je $N(t + \Delta t)$ veličina kolonije u trenuku $t + \Delta t$. Pretpostavimo da je broj rođenih i umrlih bakterija u malom vremenskom intervalu Δt proporcionalan proizvodu veličine populacije i varijable Δt, tj.

$$\text{Rođeni} = bN(t)\Delta t \quad \text{i} \quad \text{Umrli} = dN(t)\Delta t,$$

[7] Detaljnije pogledati [9]

[8] Kako funkcija $N(t)$ uzima samo cijele vrijednosti, ona nije neprekidna pa samim tim ni diferencijabilna. Međutim, ako je broj bakterija jako velik, možemo pretpostaviti da se on može aproksimirati funkcijom $N(t)$, budući da se promjene u veličini populacije javljaju u veoma kratkim vremenskim intervalima.

gdje su b i d pozitivne konstante. Tada je

$$N(t + \Delta t) - N(t) = (b - d)N(t)\Delta t$$

ili

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (b - d)N(t).$$

Uzimajući limes kad $\Delta t \to 0$ i stavljajući da je $k = b - d$ dobivamo jednadžbu (1.59).

Treba naglasiti da jednadžba (1.59) predstavlja matematički model koji opisuje rast kolonije bakterija prema vrlo jednostavnom zakonu: Rast kolonije bakterija je proporcionalan sa brojem bakterija u datom trenutku t. S druge strane, ovaj jednostavni zakon koji opisuje rast kolonije bakterija dovodi do jednostavne diferencijalne jednadžbe. Rješenje, $N(t) = N(0)e^{kt}$, jednadžbe (1.59) daje nam aproksimaciju stvarne veličine kolonije bakterija. Jasno je, da bi više realističniji model dobili ako bismo uzeli u obzir realne faktore kao što su pretrpanost, ograničenje na količinu hrane i slično. Naravno, diferencijalna jednadžba koja bi uzimala sve to u obzir bila bi komplikovanija. Treba naglasiti da je matematički model sa kojim se ne može rukovati, matematički potpuno beskoristan, pa samim tim neka pojednostavljena i modifikacije stvarnih zakona su često neophodne kako bi se dobio prihvatljiv model.

Farmacija (Doziranje lijekom)

■ U farmaciji je poznato da penicilin i mnogi drugi lijekovi iščezavaju iz tijela pacijenata u skladu sa sljedećim jednostavnim pravilom: Ako je $y(t)$ količina lijeka u trenutku t, tada je brzina iščezavanja lijeka $y'(t)$ proporcionalna sa količinom lijeka u datom trenutku. Pa dobivamo da $y(t)$ zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu sa razdvojenim promjenjivim

$$y' = -ky, \tag{1.60}$$

gdje je $k > 0$ konstanta proporcionalnosti. Negativan znak u jednadžbi (1.60) se javlja zbog činjenice da $y(t)$ opada kad t raste, pa je prema tome izvod funkcije $y(t)$ u odnosu na t negativan. Za svaki lijek konstanta k se dobiva eksperimentalno.

Rješenje jednadžbe (1.60) je dato sa

$$y(t) = y_0 e^{-kt}, \tag{1.61}$$

gdje $y_0 = y(0)$ početna količina (početna doza) lijeka. Na osnovu (1.61), imamo da količina lijeka u tijelu pacijenta teži ka nuli kad $t \to \infty$. Međutim u mnogim slučajevima je neophodno održavati otprilike konstantnu koncentraciju lijeka u tijelu pacijenta u dužem vremenskom periodu. Da bi se to postiglo potrebno je pacijentu dati inicijalnu poticajnu dozu y_0 lijeka te kasnije u istim vremenskim intervalima, recimo svaki τ sati, davati pacijentu dozu D lijeka.

Formula (1.61) daje nam količinu lijeka u tijelu pacijenta u vremenskom trenutku t. Odakle je jednostavno odrediti količinu doze D da bi pacijent u trenutku τ imao u tijelu lijek u količini y_0. U trenutku τ, prije nego pacijentu damo dozu D, količina lijeka prisutna u tijelu pacijenta je

$$y(\tau) = y_0 e^{-k\tau}.$$

Ako želimo da održavamo početnu količinu y_0 lijeka u tijelu pacijenta u trenucima $\tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$, doza D treba da zadovoljava jednadžbu

$$y_0 e^{-k\tau} + D = y_0.$$

Dakle, željena doza je data formulom $D = y_0(1 - e^{-k\tau})$.

Psihologija (Model interakcije instruktor/učenik)

■ U teoriji učenja diferencijalna jednadžba prvog reda

$$p'(t) = a(t)G(p(t)) \tag{1.62}$$

je osnovni model interakcije instruktor/učenik. Funkcija G je poznata kao karakteristična funkcija učenja koja zavisi od karakteristike učenika i materijala koji se uči, $p(t)$ je stanje učenika u trenutku t, i $a(t)$ je mjera intenziteta učenja (veća vrijednost funkcije $a(t)$ daje veću brzinu učenja učenika, ali i povećava troškove instruktora).

Mehanika (Newtonov zakon kretanja)

■ Newtonov zakon kretanja, koji kaže da "brzina promjene momenta tijela je proporcionalna rezultirajućoj sili koja djeluje na tijelo i nalazi se u pravcu ove rezultirajuće sile", povlači da se kretanje tijela može opisati običnom diferencijalnom jednadžbom. Napomenimo da je moment tijela jednak proizvodu $m\nu$ njegove mase i ubrzanja ν. Ako je F rezultirajuća sila koja djeluje na tijelo, tada je

$$\frac{d}{dt}(m\nu) = kF, \tag{1.63}$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti. Jednadžba (1.63) je obična diferencijalna jednadžba po ν koja zavisi od m i F. Masa m može biti konstantna ili u funkciji od t. Također, F može biti konstantna ili u funkcija od t, ili čak funkcija od t i ν.

Geometrija (Ortogonalne trajektorije)

■ Posmatrajmo jednoparametarsku familiju krivih koje su date jednadžbom

$$F(x, y) = C. \tag{1.64}$$

Diferenciranjem jednadžbe (1.64), dobivamo da je

$$F_x dx + F_y dy = 0,$$

gdje su F_x i F_y parcijelni izvodi funkcije F u odnosu na x i y, redom. Dakle,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{1.65}$$

daje nam vrijednost koeficijenta pravca tangente svake krive određene jednadžbom (1.64). Želimo odrediti drugu familiju krivih takvu da svaka kriva iz te familije siječe svaku krivu familije (1.64) pod pravim uglom, tj. želimo da odredimo *ortogonalne trajektorije* familije (1.64). Na osnovu jednadžbe (1.65), nagib ortogonalne trajektorije familije (1.64) je dat sa (negativna recipročna vrijednost od (1.64))

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}. \tag{1.66}$$

Opće rješenje jednadžbe (1.66) daje ortogonalnu trajektoriju familije (1.64).

Postoje mnoge fizikalne interpretacije i primjene ortogonalnih trajektorija.

Biologija (Procesi u ćeliji)

■ Crvena krvna zrnca (eritrociti) imaju konačan vijek življenja. Stoga je potrebno konstantno snabdjevanje tijela sa novim eritrocitima koji se proizvode u koštanoj srži. Neka funkcija $R(t)$ označava broj eritrocita u krvi u trenutku t, a $R'(t)$ njen izvod. Tada je

$$R'(t) = r^+(t) - r^-(t), \tag{1.67}$$

tj. brzina promjene broja eritrocita jednaka je razlici između brzine nastajanja novih i brzine gubljenja starih eritrocita (uklonjenih iz tijela pomoću jetre i slezene). Pretpostavimo da je stopa izgubljenih eritrocita proporcionalna sa brojem eritrocita, tj. $r^-(t) = bR(t)$, gdje je b pozitivna konstanta.

Brzina nastajanja novih eritrocita prilagođena je potrebama organizma, prema tome, može se smatrati funkcijom trenutnog broja eritrocita, tj. $r^+(t) = h[R(t)]$. Na osnovu (1.67) dobivamo novu diferencijalnu jednadžbu po $R(t)$,

$$R'(t) = -bR(t) + h[R(t)]. \tag{1.68}$$

Jednadžba (1.68) je matematički model za sistem eritrocita. Funkcija "sprege" $h(R)$ treba da obezbijedi da se model (1.67) ponaša u skladu kako sistem eritrocita funkcioniše u stvarnosti. Kao logično nameće se da funkcija $h(R)$ treba da bude opadajuća, tj. brzina nastajanja novih eritrocita je obrnuto proporcionalno sa brojem eritrocita. Jednostavnosti radi, možemo uzeti da je $h(R) = a/R$ ($a > 0$, konstanta), što daje

$$R'(t) = -bR(t) + \frac{a}{R(t)}. \tag{1.69}$$

Rješenje jednadžbe (1.69) je dato sa

$$R(t) = \left\{ \left[R(0)^2 - \frac{a}{b} \right] e^{-2bt} + \frac{a}{b} \right\}^{1/2}, \quad t \geq 0. \tag{1.70}$$

Ponašanje ovog modela je vrlo jednostavno. Polazeći od biološki relevantnog početnog uvjeta $R(0) \geq 0$, sva rješenja imaju istu graničnu vrijednost, $R(t) \to (a/b)^{1/2}$, kad t teži u beskonačno. Rješenja koja se dobiju za početni uvjet za koji je $R(0) < (a/b)^{1/2}$ su rastuće funkcije, a rješenja koja se dobiju za početni uvjet za koji je $R(0) > (a/b)^{1/2}$ su opadajuće funkcije. Konstantna funkcija $(1/b)^{1/2}$ je također rješenje. Ta vrijednost predstavlja nivo eritrocita koji se obično održava u krvi. Konvergencija svih rješenja ka $(a/b)^{1/2}$ znači da ako u bilo kojem momentu (ovdje je uzeto $t = 0$) broj eritrocita opadne (npr. gubitkom krvi), njihova količina će se vratiti na normalu. Ponašanje modela (1.69) može se opisati i bez eksplicitnog rješavanja njegove jednadžbe. Zaista, ako je $R(t)$ manje od $(a/b)^{1/2}$, tada je desna strana jednadžbe (1.69) pozitivna. Dakle, $R't)$ je pozitivno pa je $R(t)$ rastuća funkcija. Analogno se izvede zaključak kada je $R(t) > (a/b)^{1/2}$.

Rješenja modela (1.69) teže ka ekvilibrijumu $(a/b)^{1/2}$ čak iako je $R(0)$ blizu nule, dok u stvarnom životu. Opadanje broja eritrocita ispod kritičnog nivoa vodi ka izumiranju svega, tj. $R(t) \to 0$ (na primjer, teško zračenje koštane srži). Poboljšani model zahtijeva ne tako jednostavan odabir funkcije $h(R)$.

1.3 Zadaci za samostalan rad

U zadacima od 1 do 8, provjeriti da li su navedene funkcije rješenja odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi.

1. $y = \left(\frac{1}{2x}\right) e^{x^2}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' + y = xe^{x^2}$.

2. $y = e^x$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + y = 0$.

3. $y = e^{-x}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y = 0$,

4. Dokazati da su funkcije $y_1(x) \equiv 0$ i $y_2(x) = x^2/4, \;\; x \geq 0$, rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = y^{1/2}$.

5. Dokazati da je funkcija

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq C \\ \dfrac{(x-C)^2}{4} & \text{for } x > C, \end{cases}$$

za bilo koji realan broj C, rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = y^{1/2}.$$

(*Uputa: Ne zaboravite pokazati da je funkcija $y(x)$ diferencijabilna i za $x = C$.*)

6. Pokazati da je funkcija

$$x(t) = \frac{1}{k} + \frac{kx_0 - 1}{k} e^{-k(t-t_0)},$$

gdje su x_0 i t_0 konstante, rješenje jednadžbe $x' = 1 - kx$. Pokazati, također, da rješenje prolazi kroz tačku (t_0, x_0); tj. $x(t_0) = x_0$.

7. Pokazati da je $N(t) = Ce^{kt}$, za bilo koju konstantu C, rješenje jednadžbe (1.59). Koje je značenje konstante C?

8. Naći diferencijalnu jednadžbu ortogonalne trajektorije familije linija $y = Cx$.

U zadacima od 9 do 12, provjeriti da li su navedene funkcije rješenja odgovarajuće diferencijalane jednadžbe.

9. $y = xe^x$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - 2y = e^x(1 - x)$.

10. $y = x + 1$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $yy' - y^2 = x^2$.

11. $y = -\sqrt{\frac{4 - x^3}{3x}}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

12. $y = -\sqrt{\frac{4 - x^3}{3x}}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

13. Pokazati da svaka kriva iz jedno-parametarske familije krivih

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

siječe svaku krivu iz familije krivih

$$x^2 + y^2 = 2ky$$

pod pravim uglom i obrnuto.

14. Pokazati da ako familiju rješenja jednadžbe

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p(x)q(x) \neq 0$$

presječemo pravom $x = k$, tangenete u presiječnim tačkama rješenja i prave $x = k$ su paralelne. [*Uputa*: jednadžba tangente na rješenje u tački (k, c) je $y - c = [q(k) - cp(k)](x - k)$, pri čemu ova prava sadrži tačku $(k + 1/p(k), q(k)/p(k))$.]

1.4 Neki integrabilni slučajevi diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Ovdje ćemo govoriti o diferencijalnim jednadžbama čija se rješenja mogu dobiti pomoću konačnog broja integracija.

1.4.1 Diferencijalne jednadžbe kod kojih se promjenljive mogu razdvojiti

Jednadžba oblika

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.71}$$

zove se diferencijalna jednadžba kod koje se *promjenljive mogu razdvojiti ili diferencijalna jednadžba sa separabilnim varijablama.*

Napomenimo da će se većina jednadžbi, koje budemo proučavali, moći pogodnim smjenama svesti na jednadžbu (1.71).

Za ovaj tip diferencijalne jednadžbe vrijedi sljedeći teorem o jedinstvenosti rješenja:

Teorem 1.4.1. *Neka su funkcije $f \in C(a_0, b_0)$[9] i $g \in C(a_1, b_1)$, pri čemu je $g(y) \neq 0$ za svako $y \in (a_1, b_1)$. Onda za bilo koju tačku (x_0, y_0) iz oblasti $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = (a_0, b_0) \times (a_1, b_1)$, postoji jedinstveno rješenje $y = \varphi(x)$ obične diferencijalne jednadžbe (1.71) definirano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljva uvjet $\varphi(x_0) = y_0$.*

[9] Sa $C(a, b)$ ćemo označiti skup svih neprekidnih funkcija na (a, b).

Ukoliko funkcije f i g zadovoljavaju uvjete prethodnog Teorema, onda iz diferencijalnog oblika jednadžbe (1.71) je

$$\frac{1}{g(y)}dy - f(x)dx = 0,$$

pa za proizvoljnu fiksnu tačku $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ i za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$ imamo

$$d\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = 0,$$

odnosno

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = C, \;\; C = konst. \tag{1.72}$$

Funkcija

$$\psi(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

je definirana i neprekidna u oblasti $\mathcal{E}$ i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda u toj oblasti. Osim toga, za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$ je $\psi'_y(x, y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ i

$$\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)f(x)g(y) = -f(x) + \frac{1}{g(y)}f(x)g(y) = 0,$$

pa po Teoremu 1.4.1 slijedi da je funkcija $\psi(x, y)$ integral obične diferencijalne jednadžbe (1.71) u oblasti $\mathcal{E}$. Dakle, formulom (1.72) je definiran opći integral koji implicitno definira rješenje.

Jednadžbom

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = 0 \tag{1.73}$$

je implicitno definirano *Cauchyevo rješenje* čija integralna kriva prolazi tačkom $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.

Ako postoji a tako da je $g(a) = 0$, onda je funkcija $y = a, \; x \in (a, b)$, rješenje obične diferencijalne jednadžbe (1.71) koje može biti partikularno ili singularno.

Najjednostavniji oblik jednadžbe (1.71) je $y' = f(x)$. Ako je $f \in C(a, b)$, tada je $y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C, \;\; x \in (a, b)$. Ova jednadžba nema singularnih rješenja.

Sljedeće jednadžbe su jednadžbe sa razdvojenim promjenljivim

$$xdx - (5y^4 + 3)dy = 0 \tag{1.74}$$

$$2x(y + 1)dx + (x^2 - 1)dy = 0 \tag{1.75}$$

$$e^{x-y}y' = \sin x \tag{1.76}$$

One se jednostavnim transformacijama mogu dovesti na sljedeće oblike:

$$xdx = (5y^4 + 3)dy \tag{1.77}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 1}dx = -\frac{1}{y + 1}dy, \quad \text{za} \quad x \neq \pm 1, y \neq -1 \tag{1.78}$$

$$e^{-y}dy = e^{-x}\sin x dx \tag{1.79}$$

Primjer 1.4.1. *Naći opće rješenje jednadžbe (1.74).*

Rješenje. Kao što smo vidjeli jednažba (1.74) je jednadžba sa razdvojenim promjenljivim. Ako integriramo obje strane jednadžbe (1.77), dobivamo

$$\int x dx = \int (5y^4 + 3) dy + C.$$

Dakle,

$$\frac{1}{2}x^2 = y^5 + 3y + C$$

predstavlja opće rješenje jednadžbe (1.74) u implicitnom obliku. ♦

Primjer 1.4.2. *Riješiti jednadžbu (1.75).*

Rješenje. Varijable jednadžbe (1.75) se mogu razdvojiti kao u jednadžbi (1.78). Integriranje obje strane jednadžbe (1.78) daje

$$\ln|x^2 - 1| = -\ln|y + 1| + C.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \ln|x^2 - 1| + \ln|y + 1| &= C \\ \Rightarrow \ln|(x^2 - 1)(y + 1)| &= C. \end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $e^{\ln p} = p$, imamo

$$\begin{aligned} |(x^2 - 1)(y + 1)| = e^C & \\ \Rightarrow (x^2 - 1)(y + 1) &= \pm e^C. \end{aligned}$$

Kako je C proizvoljna konstanta, jasno je da je $\pm e^C$ ponovo proizvoljna konstanta, različita od nule, koju ćemo opet označavati sa C, gdje je $C \neq 0$. Imamo da je

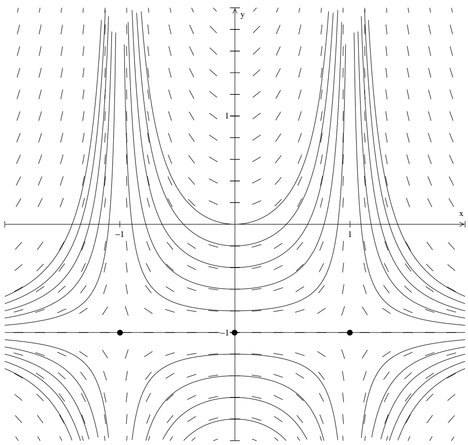
$$(x^2 - 1)(y + 1) = C \Rightarrow y = -1 + \frac{C}{x^2 - 1}, \quad C \neq 0,$$

opće rješenje polazne jednadžbe.

Ne zaboravimo da je jednadžba (1.78) dobivena iz jednadžbe (1.75) dijeljenjem sa $(x^2 - 1)(y + 1)$. Dakle, moramo biti sigurni da ovaj izraz nije nula. Moramo pretpostaviti da je $x \neq \pm 1$, $y \neq -1$ i $y \neq 0$. Na kraju moramo utvrditi šta će se desiti kad je $x = \pm 1$ i $y = -1$. Vraćajući se u jednadžbu (1.75) vidimo da tri linije $x = \pm 1$, i $y = -1$ također zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu (1.75). Ako izostavimo uvjet $C \neq 0$, kriva $y \equiv -1$ će biti sadržana u formuli $y = -1 + [C/(x^2 - 1)]$ za $C = 0$. Međutim, krive $x \equiv \pm 1$ se ne mogu dobiti iz navedene formule niti za jednu vrijednost konstante C. ♦

Primjer 1.4.3. *Pokazati da je rješenje početnog problema*

$$\begin{aligned} y' &= ky, \quad k \text{ je konstanta} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$



Slika 1.5: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $2x(y+1)dx + (x^2-1)dy = 0$.

dato sa $y(t) = y_0 e^{kt}$*. Slično pokazati da je rješenje početnog problema*

$$\begin{aligned} y' &= -ky, \quad k \text{ je konstanta} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

dato sa $y(t) = y_0 e^{-kt}$.

Rješenje. Jasno je da se rješenje drugog početnog problema može dobiti iz prvog zamjenjujući konstantu k sa $-k$. Dakle, dovoljno je naći rješenje prvog problema. Kako je $y' = dy/dt$, razdvajajući varijable y i t dobivamo, za $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

Integrirajući obje strane imamo da je

$$\begin{aligned} \ln|y| &= kt + cC \\ \Rightarrow |y| &= e^{kt+C} = e^C e^{kt} \\ \Rightarrow y &= \pm e^C e^{kt} \\ \Rightarrow y &= Ce^{kt}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Kako je $y = 0$ rješenje jednadžbe $y' = ky$, slijedi da je opće rješenje jednadžbe $y' = ky$ dato sa $y = Ce^{kt}$, gdje je C proizvoljna konstanta. Koristeći početni uvjet, imamo da je $y_0 = C$, odakle slijedi da je $y(t) = y_0 e^{kt}$, pa je ovim dokaz kompletiran. ♦

Primjer 1.4.4. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu* $y(1+xy)dx = x(1-xy)dy$*. Ispitati da li ima singularnih rješenja te odrediti ono rješenje koje zadovoljava početni uvjet* $y(-1) = -1$.

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Očito ova jednadžba nije sa razdvojenim promjenljivim. Očito su $x \equiv 0$ za $y \in (0,\infty)$, $x \equiv 0$ za $y \in (-\infty, 0)$, $y \equiv 0$ za $x \in (0,\infty)$ i $y \equiv 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ rješenja ove jednadžbe. Smjenom $xy = v$, gdje je $v = v(x)$, koristeći činjenicu da je

$$dy = \frac{xdv - vdx}{x^2},$$

polaznu diferencijalnu jednadžbu svodimo na jednadžbu

$$2vdx = x(1-v)dv.$$

Razdvajanjem promjenljivih ($x \neq 0$ i $v \neq 0$) dobivamo jednadžbu

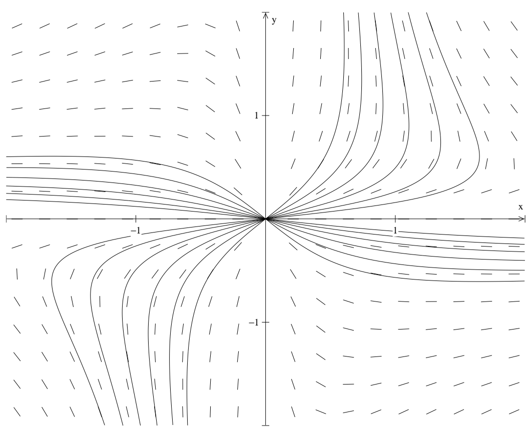
$$2\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - 1\right) dv.$$

Integriranjem obje strane ove jednadžbe dobivamo da je

$$\ln x^2 = \ln|v| - v + C.$$

Vraćajući smjenu dobivamo da je opće rješenje dato sa

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - xy + C = 0.$$



Slika 1.6: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $y(1 + xy)dx = x(1 - xy)dy$.

Ako opće rješenje napišemo u obliku

$$\frac{y}{x} = \pm e^{xy - C},$$

rješenja: $x \equiv 0$ za $y \in (0, \infty)$, $x \equiv 0$ za $y \in (-\infty, 0)$, $y \equiv 0$ za $x \in (0, \infty)$ i $y \equiv 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ dobivamo iz općeg rješenja za $C = \mp\infty$, pa jednadžba nema singularnih rješenja.

Iz početnog uvjeta dobivamo da je $C = 1$, pa je partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(-1) = -1$ dato sa $y = xe^{xy-1}$ za $x \in (-\infty, 0)$. ♦

Primjer 1.4.5. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $(x+y+1)dx+(4x+4y+10)dy = 0$. *Ispitati da li postoje singularna rješenja?*

Rješenje. Uvedimo smjenu

$$x + y = u \Rightarrow y = u - x \Rightarrow dy = du - dx.$$

Uvrštavajući ovo u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$2(2u + 5)du = 3(u + 3)dx.$$

Pretpostavimo da je $u \neq -3$. Razdvajanjem promjenljivih dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{3}{2}dx = \frac{2u+5}{u+3}du.$$

Integriranjem lijeve i desne strane ove jednadžbe dobivamo

$$\frac{3}{2} = 2u - \ln|u + 3| + C.$$

Kako je $x + y = u$, dobivamo opće rješenje u implicitnom obliku

$$\frac{x}{2} + 2y - ln|x + y + 3| + C = 0.$$

Ako je $u = x + y = -3$, jednostavno se provjeri da je prava $y = -x - 3$ rješenje polazne jednadžbe koje se dobiva iz općeg rješenja za $C = -\infty$, pa jednadžba nema singularnih rješenja (Slika 1.7). ♦

1.4.1.1 Zadaci za samostalan rad

U zadacima od 1 do 14, odrediti koje od jednadžbi su sa razdvojenim promjenljivim, te ih riješiti.

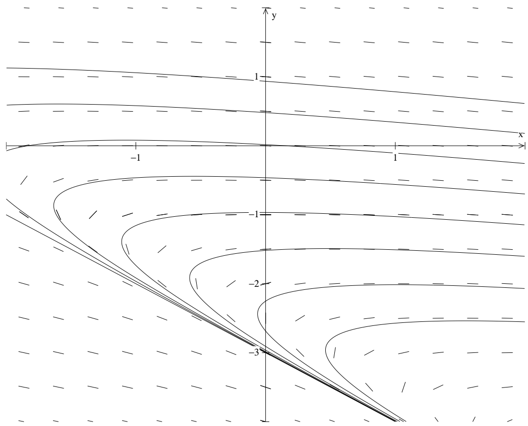
1. $(1 + x)ydx + xdy = 0$

2. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

3. $y' = y^{1/2}$

4. $xy' + y = 3$

5. $y' + xy = 3$



Slika 1.7: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $(x+y+1)dx+(4x+4y+10)dy=0$, za $-2 \leq x \leq 2$ i $-4 \leq y \leq 2$.

6. $\frac{dp}{dt} = Ap - Bp^2;\ A, B \neq 0.$

7. $xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^2$

8. $yy' = y + x^2$

9. $y' = x - xy - y + 1$

10. $3xydx + (x^2+4)dy = 0$

11. $\cos x \sin y dy - (\cos y \cos x + \cos x)dx = 0$

12. $yy' = y62x^3 + y^2 x$

13. $y^4 dx + (x^2 - 3y)dy = 0$

14. $(1+y^2)\cos x dx = (1+\sin^2 x)2y$

15. Naći krivu koja prolazi tačkom $(0,1)$ i čiji je nagib u bilo kojoj tački (x,y) jednak ordinati y.

16. Thurstone je 1930. godine došao do diferencijalne jednadžbe kao metematičkog modela koji opisuje stanje učenika, ili krivu učenja učenika, dok učenik uči određenu materiju. Ako $y(t)$ označava stanje učenika u trenutku t tada je

$$\frac{dy}{y^{3/2}(1-y)^{3/2}} = \frac{2k}{\sqrt{m}}dt,$$

gdje su k i m pozitivne konstante koje zavise od učenika i kompleksnosti materije koja se uči, redom. Riješiti navedenu diferencijalnu jednadžbu. (*Uputa:* Uvesti smjenu $y = \sin^2\theta$.)

17. Volterra je dobio sistem diferencijalnih jednadžbi oblika

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 + a_2 y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(b_1 1 + b_2 x)$$

kao matematički model koji opisuje kompeticiju između dvije vrste koje koegzistiraju na istom području. Iz ovog sistema, koristeći lančano pravilo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

možemo dobiti diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(b_1 + b_2 x)}{x(a_1 + a_2 y)}.$$

Riješiti navedenu diferencijalnu jednadžbu.

18. Pretpostavimo da je brzina raspadanja radioaktivnog materijala proporcionalna njegovoj količini u datom trenutku. Za određeni uzorak je utvrđeno da se 50% materije raspadne za 1600 godina. (Ovo je tačno, na primjer, za radium 226.)

(a) Napisati diferencijalnu jednadžbu koja opisuje proces raspadanja radioaktivne tvari.

(b) Izračunati konstantu proporcionalnosti.

(c) Koji procenat radioaktivne materije će se raspasti za 800 godina?

(d) Za koliko godina će ostati samo jedna petina radioaktivne materije u odnosu na količinu na početku?

19. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax^{5/6}}{(b - Bt)^{3/2}}$$

20. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad k, a, b > 0$$

koja se javlja kod opisivanja *hemijskih reakcija.* Odrediti čemu teži x kad $t \to \infty$?

21. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dI}{dw} = 0.088(2.4 - I),$$

koja modelira podatke koji su dobiveni eksperimentalno, te odrediti čemu teži I kad $w \to \infty$.

22. Odrediti *ortogonalne trajektorije* jednoparametarske familije krivih $y = cx$.

23. Kolonija bakterija se povećava brzinom koja je proporcionalna veličini kolonije. Ako se broj bakterija utrostruči za 4 sata, poslije koliko vremena će se kolonija povećati 27 puta u odnosu na početnu veličinu?

24. Pretpostavimo da populacija raste prema Verhulstovim *logističkom zakonu*

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2,$$

gdje je $N = N(t)$ veličina populacije u trenutku t, a konstante A i B su *vitalni koeficijenti* populacije. Kolika će biti veličina populacije u trenutku t? Čemu će težiti veličina populacije kada $t \to \infty$.

25 Odrediti parametar a tako da se smjenom $y(x) = x^a z(x)$ obična diferencijalna jednadžba

$$2xy' + y\sqrt{x^2y^4 - 1} + y = 0$$

transformira u diferencijalnu jednadžbu kod koje se promjenljive mogu razdvojiti. Zatim naći sva rješenja koja prolaze tačkom $(1, -1)$.

26. Odrediti oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja obične diferencijalne jednadžbe

$$xy' \cos y + \sin y = 0$$

i naći integralne krive koje prolaze tačkom $(0, \frac{3\pi}{2})$.

27. Rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{A - x}{B + Cx + Dx^2} y$$

daju važne funkcije distribucije u statistici za različite vrijednosti parametara A, B, C i D. Riješiti diferencijalnu jednadžbu u sljedećim slučajevima:

a) $C = D = 0,\ B > 0$ i A proizvoljno (normalna distribucija).

b) $A = B = D = 0$ i $C > 0$ (eksponencijalna distribucija).

c) $B = D = 0,\ C > 0,$ i $A > -C$ (gama distribucija).

d) $B = 0, C = -D,\ (A - 1)/C < 1,$ i $A/C > -1$ (beta distribucija)

28. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dN}{dt} = b\lambda N e^{-\lambda t},$$

gdje je N veličina tumora, a b i λ pozitivne konstante. Pokazati da tumor zaista raste.

29. U članku[10] od M. Slatkin i D. J. Anderson, koji su se bavili kompetitivnim modelima, dat je sljedeći početni poroblem

$$\frac{dF}{dR} = -4\pi RDF^2(R), \quad F(0) = 1,$$

gdje je $F(R)$ vjerovatnoća da slučajno odabrana individua preživi u radiusu R, i D je početna gustoća. Pokazati da je

$$F(R) = \frac{1}{1 + 2\pi R^2 D}.$$

30. Na konferenciji o populacionoj dinamici,[11] J. R. Thompson je govorio na temu "Modeli-Osnove ispitivanja AIDS: Njegovi uzroci i krajnja eliminacija" gdje je dao sljedeći model: Neka je

$$\begin{aligned} Y &= \text{broj inficiranih u trenutku } t, \\ k &= \text{broj kontakata po jedinici vremena} \\ \alpha &= \text{vjerovatnoća da kontakt izazove AIDS} \\ \mu &= \text{stepen emigracije i} \\ \delta &= \text{stopa smrtnosti od AIDS-a} . \end{aligned}$$

Tada u ranim fazama bolesti vrijedi,

$$\frac{dY}{dt} = (k\alpha - \mu - \delta)Y.$$

Riješiti ovu diferencijalnu jednadžbu kada je

$$k\alpha = 0.25,\ \mu = 0.00556,\ \delta = 0.1,\ \text{i}\ \ Y(0) = 2000.$$

Jednadžba

$$y' = f(ax + by + c),$$

pri čemu je $ab \neq 0$, $f \in C(a, b)$, se smjenom $ax + by + c = u(x)$ može svesti na jednadžbu kod koje se promjenljive mogu razdvojiti.

31 Riješiti jednadžbu

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

[10] *Ecology* 65 (1984):1840.
[11] Novembar 20-22, 1986, University of Mississippi, Oxford, Miss.38677.

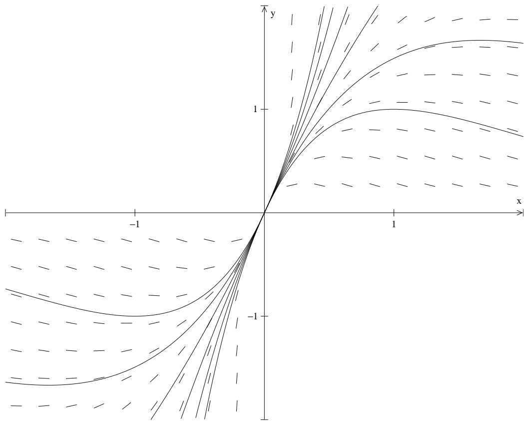
1.4.2 Homogena diferencijalna jednadžba

Jednadžba oblika
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.80}$$
naziva se *homogena diferencijalna jednadžba.*
Ako je funkcija f definirana na intervalu (a, b), oblast definiranosti ove jednadžbe je
$$\mathcal{D} = \{(x, y) | ax < y < bx,\ x > 0,\ bx < y < ax,\ x < 0\}.$$
Koordinatni početak je singularna tačka.

Smjenom $\dfrac{y}{x} = u$, gdje je $u(x)$ nova nepoznata funkcija, diferencijalna jednadžba (1.80) se svodi na običnu diferencijalnu jednadžbu kod koje se promjenljive mogu razdvojiti.
Za funkciju $M(x, y)$ kažemo da je homogena stepena homogenosti m ako za svako $t \in (-\infty, +\infty)$ vrijedi $M(tx, ty) = |t|^m M(x, y)$.
Ako je data jednadžba
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$
gdje su funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ definirane i homogene istog stepena homogenosti u oblasti $\mathcal{E}$, pri čemu je $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ za svako $(x, y) \in \mathcal{E}$, onda je ova jednadžba homogena. Za $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, je
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{|x|^m M(\pm 1, \pm \frac{y}{x})}{|x|^m N(\pm 1, \pm \frac{y}{x})} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Primjer 1.4.6. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu* $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$.

Rješenje. Oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe je skup $(-\infty, 0) \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \times (0, \infty)$. Diferencijalnu jednadžbu možemo napisati u obliku
$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$
Uvedimo smjenu $y = ux$, gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija. Kako je $y' = u'x + u$, diferencijalna jednadžba se svodi na jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim
$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \quad \ln u - 1 \neq 0.$$
Integriranjem lijeve i desne strane ove jednadžbe, dobivamo
$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C.$$
Konstantu C napišimo u obliku $C = \ln C_1$ za $C_1 > 0$, pa dobivamo da je
$$u = e^{1 \pm C_1 x}.$$



Slika 1.8: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $y' = xy\ln\dfrac{y}{x}$.

Ako je $C_1 = 0$, lako se vidi da je $y = xe$ rješenje diferencijalne jednadžbe, pa je opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe dato sa $y = xe^{1+Cx}$, gdje je C proizvoljna konstanta. Jednadžba nema singularnih rješenja (Slika 1.8). ⧫

Primjer 1.4.7. Odrediti opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy' = 2y - 3\sqrt{xy - 2x^2}.$$

Ispitati da li postoji singularno rješenje? Odrediti rješenja koja prolaze tačkama $(0, -1)$, $(1, 3)$ i $(-1, -2)$.

Rješenje. Oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe je skup $\{(x, y) : (y \geq 2x \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 2x \wedge x \leq 0)\} \setminus \{(0, 0)\}$. Jednadžba se svodi na dvije diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{2y}{x} - 3\sqrt{\frac{y}{x} - 2}, \quad x > 0$$

i

$$y' = \frac{2y}{x} + 3\sqrt{\frac{y}{x} - 2}, \quad x < 0.$$

Smjenom $y = xz$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, ove jednadžbe se svode na diferencijalne jednadžbe sa razdvojenim promjenljivim

$$xdz = (z \mp 3\sqrt{z - 2})dx.$$

Za $x \neq 0$ i $z - 3\sqrt{z - 2} \neq 0$ opće rješenje je dato sa

$$\frac{(\sqrt{z - 2} \mp 2)^4}{(\sqrt{z - 2} \mp 1)^2} = Cx,$$

pa je opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe dato sa

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{y}{x}-2}\mp 2\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{y}{x}-2}\mp 1\right)^2}=Cx, \quad x\neq 0.$$

Rješenja $x\equiv 0$ za $y<0$ i $x\equiv 0$ za $y>0$ se dobivaju iz općeg rješenja za $C=\infty$. Jednadžba $z-3\sqrt{z-2}=0$ ima dva rješenja $z=6$ i $z=3$. Za $y=6x$, $x\neq 0$, polazna jednadžba postaje $-6xdx=-6|x|dx$, pa je funkcija $y=6x$, $x>0$ partikularno rješenje polazne jednadžbe sadržano u općem za $C=0$. Na isti način se može vidjeti da je funkcija $y=3x$, $x>0$ partikularno rješenje polazne jednadžbe sadržano u općem za $C=\infty$.

Poluprave $y=2x$ za $x<0$ i $y=2x$ za $x>0$, koje čine rub oblasti definiranosti, nisu rješenja polazne diferencijalne jednadžbe, pa polazna diferencijalna jednadžba nema singularnih rješenja. Kroz tačku $(0,-1)$ prolazi rješenje $x\equiv 0$ za $y<0$, a kroz tačku $(1,3)$ prolazi rješenje $y=3x$, $x>0$. Kroz tačku $(-1,-2)$ prolazi rješenje

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}-2}\mp 2\right)^4-16x\left(\sqrt{\frac{y}{x}-2}\mp 1\right)^2=0.$$

♦

Posmatrajmo sada jednadžbu

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0. \tag{1.81}$$

Pokazat ćemo da se ova jednadžba može svesti na homogenu jednadžbu ili jednadžbu kod koje se promjenljive mogu razdvojiti.

Prije svega, podsjetimo se nekih stvari iz analitičke geometrije u ravni. Jednadžba prvog stepena $ax+by+c=0$ predstavlja pravu liniju. Zbog toga se ona zove linearna jednadžba. (Prisustvo konstante c u ovoj jednadžbi sprječava da jednadžba bude homogena.) Ako su koeficijenti uz x i y u jednoj linearnoj jednadžbi proporcionalni sa odgovarajućim koeficijentima u drugoj, onda su odgovarajuće prave linije paralelne. A ako su sva tri koeficijenta u jednoj jednadžbi proporcionalna sa odgovarajuća tri koeficijenta u drugoj, onda se odgovarajuće prave linije poklapaju.

Drugi koncept koji ćemo ovdje trebati je pojam "translacije osa". Naime, neka su (x,y) koordinate tačke P u odnosu na koordinatni početak. Sada translatiramo koordinatni početak iz položaja $(0,0)$ u novi položaj (h,k) i taj novi položaj označimo sa $(\bar{0},\bar{0})$. Tačka P sada ima dva položaja: jedan u odnosu na $(0,0)$ i u tom slučaju njene korodinate su (x,y), i drugi u odnosu na $(\bar{0},\bar{0})$, u ovom slučaju njene koordinate ćemo označiti sa (u,v). Pitanje koje postavljamo je : "Kakva je veza između koordinata (x,y) i (u,v)?" Lako se vidi da je

$$u=x-h, \quad v=y-k.$$

Ovo su jednadžbe za translaciju. Sada ćemo pokazati kako se translacija koordinatnih osa može iskoristiti za rješavanje jednadžbe (1.81).

Pretpostavit ćemo da prave predstavljene linearnim jednadžbama u brojniku i nazivniku nisu paralelne. Osim toga, pretpostavit ćemo da su c_1 i c_2 oba različiti od nule (u protivnom ako su oba jednaki nuli, imat ćemo homogenu običnu diferencijalnu jednadžbu, za koju znamo kako se rješava.) Budući da smo pretpostavili da prave nisu paralelne, onda sistem linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje po x i y. Označime ovo rješenje sa (h, k). Ako sada translatiramo koordinatni početak $(0, 0)$ za (h, k) redom, i označimo novi položaj sa $(\bar{0}, \bar{0})$, jedandžba (1.81) postaje

$$[a_1(u + h) + b_1(v + k) + c_1]du + [a_2(u + h) + b_2(v + k) + c_2]dv = 0,$$

tj.

$$[a_1u + b_2v + (a_1h + b_1k + c_1)]du + [a_2u + b_2v + (a_2h + b_2k + c_2)]dv = 0.$$

Tačka (h, k) je tačka presjeka pomenute dvije prave, tj. leži i na jednoj i na drugoj, pa je izraz u malim zagradama prethodne relacije jednak nuli. Sada se prethodna jednadžba reducira na

$$(a_1u + b_1v)du + (a_2u + b_2v)dv = 0,$$

što je homogena obična diferencijalna jednadžba.

Primjer 1.4.8. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x + y - 1}{x + 2}\right)^2.$$

Rješenje. Prave $h + k - 1 = 0$ i $h + 2 = 0$ se sijeku u tački $(-2, 3)$. Smjenom $x = u - 2$ i $y = v + 3$ polazna jednadžba se transformiše u homogenu jednadžbu

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{u}\right)^2,$$

čije je rješenje dato sa

$$2 \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \ln|u| + C.$$

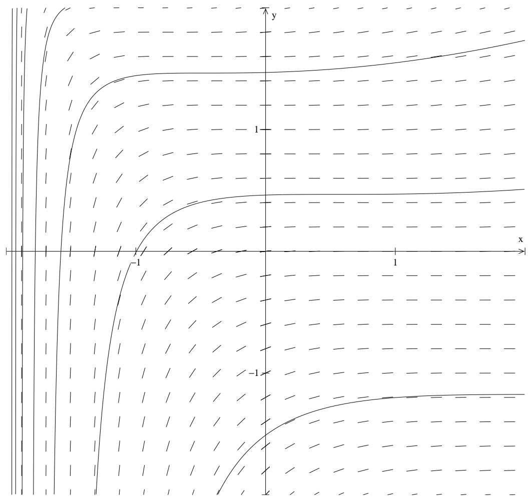
Odavde slijedi da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$2 \arctan\left(\frac{y - 3}{x + 2}\right) = \ln|x + 2| + C \quad (\text{ Slika 1.9}).$$

♦

Drugi način da se riješi obična diferencijalna jednadžba (1.81) je da se uvede smjena $u = a_1x + b_1y + c_1$ i $v = a_2x + b_2y + c_2$, zatim se diferencira i izračunaju se dx i dy i zamijene u (1.81). Dobiva se homogena obična diferencijalna jednadžba.

Ukoliko su prave u (1.81) paralelne, onda se uvodi smjena $u = a_1x + b_1y + c_1$.



Slika 1.9: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y-1}{x+2}\right)^2$.

1.4.3 Zadaci za samostalan rad

1. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}.$$

2. Naći rješenje početnog problema
$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0, \quad y(1) = -1.$$

3. Odrediti ortogonalne trajektorije jednoparametarske familije krivih $x^2 + y^2 = 2Cx$.

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $xy' - y = xe^{y/x}$.

5. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(2x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0$.

6. Riješiti jednadžbu $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y + 2)dy = 0$.

7. Pokazati da se smjenom $y(x) = xv(x)$, gdje je $v = v(x)$ nova nepoznata funkcija, jednadžba $y^n f(x) + g(y/x)(y - xy') = 0$ svodi na jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim.

8. Dokazati da se smjenom varijabli $yx^n = v$ diferencijalna jednadžba $y' = x^{n-1} f(y/x^n)$ svodi na jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim. Koristeći to riješiti diferencijalnu jednadžbu
$$x^3 y' = 2y(x^2 - y).$$

9. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
$$y' = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$$
koristeći smjenu $y = vx^n$, za pogodno odabrano n, $v = v(x)$ nova nepoznata funkcija.

10. Naći krive koje imaju osobinu da bilo koja tangenta na tu krivu siječe $x-$osu u tački koja je podjednako udaljena od tačke dodira i od koordinatnog početka.

11. Naći krive kod kojih je zbir normale i subnormale proporcionalan apcisi.

12. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
$$(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0.$$

13. Riješiti diferencijalnu jednadžbu
$$2xy' = y^2\sqrt{x - x^2y^2} - y$$
smjenom varijabli $y = z^m$, za pogodno odabrano m.

14. Riješiti diferencijalnu jednažbu
$$(y' + 1)\ln\frac{x+y}{x+3} = \frac{x+y}{x+3}.$$
Odrediti ono rješenje za koje je $y(-4) = 5$.

1.4.4 Linearna diferencijalna jednadžba

Jednadžba oblika
$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.82}$$
naziva se *linearna diferencijalna jednadžba prvog reda.* Ako je $q(x) \equiv 0$, tj. jednadžba
$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.83}$$
se naziva *homogena diferencijalna jednadžba pridružena jednadžbi (1.82).* Ako su funkcije p i q neprekidne na intervalu (a, b), onda je oblast egzistencije i jedinstvenosti data sa $\mathcal{E} = (a, b) \times (-\infty, +\infty)$. Budući da je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti obične diferencijalne jednadžbe (1.82), nema singularnih rješenja.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (1.83) je dato sa
$$y = Ce^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \ x \in (a, b),$$

gdje je $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ proizvoljna tačka. Rješenje Cauchyevog problema za diferencijalnu jednadžbu (1.83) je dato sa

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \ x \in (a, b).$$

Linearna diferencijalna jednadžba (1.82), može se rješavati na više načina.

1.4.4.1 Metod varijacije konstanti (Lagrange)

Ovaj metod sastoji se u tome da se pođe od općeg rješenja homogene jednadžbe (1.83) tako da se umjesto konstante C posmatra neprekidno diferencijabilna funkcija $C(x)$ takva da je funkcija

$$y = C(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \ x \in (a, b)$$

rješenje obične diferencijalne jednadžbe (1.82). Nakon difrenciranja i uvrštavanja u jednadžbu (1.82), dobivamo opće rješenje:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \left[C + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{\int_{x_0}^{t} p(u)du} dt \right], \ x \in (a, b). \tag{1.84}$$

Ovom formulom je dato opće rješenje, jer funkcija na lijevoj strani izraza (1.84) zadovoljava uvjete Teorema o integralu u oblasti $\mathcal{E}$. Za datu tačku (x_0, y_0) rješenje početnog problema je dato sa

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{\int_{x_0}^{t} p(u)du} dt \right], \ x \in (a, b) \tag{1.85}$$

1.4.4.2 Metod neodređenih koeficijenata (Bernoulli)

Bernoulliev metod sastoji se u tome da se rješenje jednadžbe (1.82) traži u obliku proizvoda dvije funkcije $u(x)$ i $v(x)$ koje su neprekidno diferencijabilne na (a, b). Dakle, tražimo rješenje u obliku $y = u(x)v(x)$. Kako je za svako $x \in (a, b)$

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + p(x)v(x)] = q(x),$$

to se funkcija $v(x)$ određuje iz uvjeta

$$v'(x) + p(x)v(x) = 0,$$

tj. kao rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe. Dakle,

$$v(x) = e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Sada je $u'(x) = q(x)e^{\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$, pa je

$$u(x) = C + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\displaystyle\int_{x_0}^{t} p(u)du} dt.$$

Množenjem ovako dobivenih funkcija $u(x)$ i $v(x)$ dobivamo opće rješenje.

1.4.4.3 Metod integracionog faktora (Euler)

O integracionom faktoru govorit ćemo detaljno kod običnih diferencijalnih jednadžbi totalnog diferencijala.

Dakle, diferencijalna jednadžba (1.82) se pomnoži sa tzv. integracionim faktorom $e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$ (cilj ovog množenja je da lijeva strana jednadžbe (1.82) bude totalni diferencijal) dobije se

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\right) = q(x)e^{\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Odavde integracijom i smjenom dobivamo opće rješenje diferencijalne jednadžbe (1.82).

Primjer 1.4.9. *Naći rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$\frac{dy}{dt} + (\tan x)y = \sin x$$

na intervalu $(0, \pi/2)$.

Rješenje. Ovo je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda sa

$$p(x) = \tan x \quad \text{i} \quad q(x) = \sin x,$$

gdje su obje funkcije neprekidne na $(0, \pi/2)$. Množeći obje strane jednadžbe sa

$$e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln \cos x} = \frac{1}{\cos x},$$

dobivamo da je

$$\left(y\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Integrirajući ovu jednadžbu, imamo da je

$$y\frac{1}{\cos x} = C - \ln\cos x.$$

Dijeleći je sa $1/\cos x$ dobijemo rješenje $y(x) = (\cos x)(C - \ln\cos x)$, $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
♦

Primjer 1.4.10. *Riješiti problem početnih vrijednosti*

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= -x^2, \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Ovu diferencijalnu jednadžbu možemo napisati u obliku $y' - \dfrac{2}{x}y = -x$, gdje je $x \neq 0$. Ovdje je $p(x) = -\dfrac{2}{x}$ i $q(x) = -x$. Prema tome, interval I, gdje su $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne je $(-\infty, 0)$ ili $(0, \infty)$. Kako $x_0 = 1$ leži u intervalu $(0, \infty)$, to postoji jedinstveno rješenje definirano na intervalu $(0, \infty)$. Kako je

$$e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2},$$

to imamo da je

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x}.$$

Integriranjem obje strane ove jednadžbe dobivamo da je

$$y\frac{1}{x^2} = C - \ln x.$$

Pa je opće rješenje dato sa $y(x) = x^2(C - \ln x)$. Koristeći činjenicu da je $y(1) = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= 1^2(C - \ln 1) \\ \Rightarrow C &= 0, \end{aligned}$$

pa je rješenje početnog problema dato sa $y(x) = -x^2\ln x$, $\quad x > 0$. ♦

Primjer 1.4.11. *Jednadžbu*

$$(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$$

svesti na linearnu uvođenjem pogodne smjene.

Rješenje. Očigledno je $y \equiv 0$ rješenje polazne jednadžbe. Polaznu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{-xy} = -\frac{x}{y} - \frac{1}{x}\frac{y^2+1}{y}.$$

Množeći obje strane prethodne jednadžbe sa $x \neq 0$ dobivamo jednadžbu

$$xx' + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2+1}{y} = 0.$$

Smjenom

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2xx' \Rightarrow \frac{u'}{2} = xx' \quad (u = u(y), x = x(y))$$

prethodna jednadžba se svodi na linearnu jednadžbu

$$u' + \frac{2}{y} = -2\frac{y^2+1}{y},$$

čije je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} u(y) =& e^{-\int \frac{2}{y}dy}\left[C - \int \frac{2(y^2+1)}{y} e^{\int \frac{2}{y}dy} dy\right] = \\ =& \frac{C}{y^2} + \frac{y^2}{2} + 1. \end{aligned}$$

Vraćajući smjenu dobivamo da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$x^2 = \frac{C}{y^2} + \frac{y^2}{2} + 1 \text{ (Slika 1.10).}$$

♦

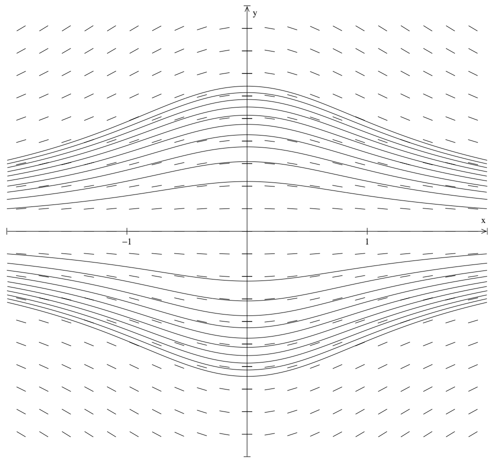
1.4.5 Bernoullieva diferencijalna jednadžba

Jednadžba oblika

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{1.86}$$

gdje je α bilo koji realan broj različit od 0 i 1. Naime, ako je $\alpha = 0$, onda je diferencijalna jednadžba (1.86) linearna, a ako je $\alpha = 1$, onda je diferencijalna jednadžba (1.86) sa razdvojenim promjenljivim.

Pretpostavimo da $p(x), q(x) \in C(a,b)$. Oblast definiranosti jednadžbe (1.86) je $\mathcal{D} = (a,b) \times Y$, gdje je Y oblast definiranosti funkcije y^{α}.



Slika 1.10: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

Ako je $y \neq 0$, onda nakon dijeljenja sa y, jednadžba (1.86) postaje

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Smjenom, $y^{1-\alpha} = z$, pri čemu je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija od x, diferencijalna jednadžba (1.86) se transformira u linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Zatim riješimo ovu jednadžbu i to rješenje uvrstimo u smjenu. Koristeći izraz za opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe, dobivamo opće rješenje Bernoullieve jednadžbe:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[C + (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} q(t)e^{(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} p(u)du}dt\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; x \in (a,b).$$

Uočimo da jednadžba (1.86) ima rješenje $y = 0, \; x \in (a,b)$. Ovo rješenje je partikularno za $\alpha > 1$ i može se dobiti iz općeg za $C = \infty$. Ako je $0 < \alpha < 1$, ovo rješenje se ne može dobiti iz općeg niti za jednu vrijednost konstante C uključujući $\pm\infty$, pa je singularno.

Primjer 1.4.12. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

te odrediti ono koje prolazi tačkom $(1,1)$.

Rješenje. Ovo je Bernulijeva jednadžba za $\alpha = 2$. Očigledno je $y \equiv 0$ rješenje ove jednadžbe. Smjenom $u = y^{-1} \Rightarrow y' = -\dfrac{u'}{u^2}$, jednadžba se svodi na linearnu jednadžbu

$$u' - \frac{u}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0,$$

čije je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} u(x) =& e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx\right] = \\ =& \ln x + 1 + Cx. \end{aligned}$$

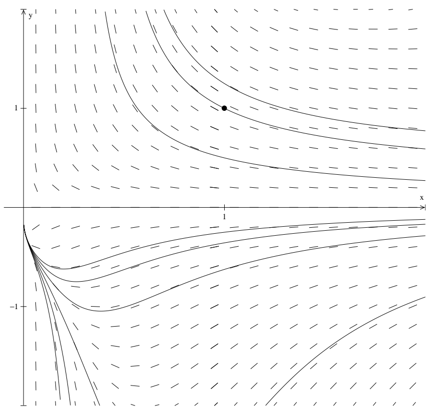
Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

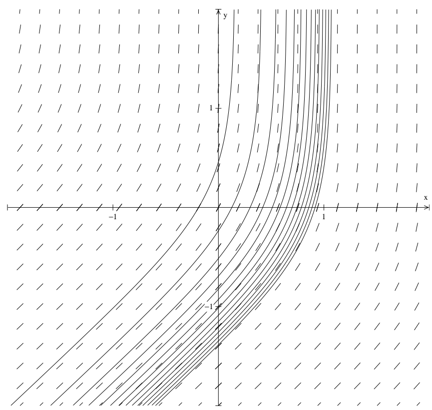
Iz ovog rješenja izdvojimo ono koje prolazi kroz tačku $(1,1)$. Lako se vidi da je $C = 0$, pa je traženo rješenje dato sa

$$y = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad x \in (e^{-1}, \infty) \ \text{(Slika 1.11 (a))}.$$

♦



(a)



(b)

Slika 1.11: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $xy' + y = y^2 \ln x$ i (b) $y' - 1 = e^{x+2y}$.

Primjer 1.4.13. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' - 1 = e^{x+2y}.$$

Rješenje. Smjenom

$$e^{2y} = t, \quad t = t(x) > 0 \Rightarrow 2y'e^{2y} = t' \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{t'}{t}$$

se polazna jednadžba svodi na Bernulijevu jednadžbu

$$t^{-2}t' - 2t^{-1} = 2e^x,$$

za $\alpha = 2$. Smjenom $z = t^{-1} \Rightarrow -t't^{-2} = z'$, ova jednadžba se transformira u linearnu jednadžbu

$$z' + 2z = -2e^x,$$

čije je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} z(x) =& e^{-2\int dx}\left[C - 2\int e^x e^{2\int dx} dx\right] = \\ =& Ce^{-2x} - \frac{2}{3}e^x. \end{aligned}$$

Kako je $z = \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{e^{2y}}$, opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa $3e^{-2y} = Ce^{-2x} + 2e^x$ (Slika 1.11 (b)). ♦

1.4.6 Zadaci za samostalan rad

1. Riješiti jednadžbu $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$.

2. Riješiti jednadžbu $3y^2y' + y^3 + x = 0$.

3. Riješiti jednadžbu $dx + (x + y^2)dy = 0$.

4. Riješiti jednadžbu $y^{n-1}(ay'+y) = x$, za razne vrijednosti parametara $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

5. Riješiti jednadžbu $y' - y = xy^2$ i naći ono rješenje koje prolazi tačkom $(0, 0)$.

6. Pogodno odabranom smjenom riješiti diferencijalne jednadžbe:

   (a) $xy' + 1 = e^y$

   (b) $y' \cos y + qsiny = x + 1$

   (c) $y' + siny + xcosy + x = 0$

7. Naći jednadžbu krivih kod kojih je odsječak koji gradi normala na $y-$osi jednak x^2/y.

1.4.7 Darbouxova diferencijalna jednadžba

Jednadžba oblika

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0 \tag{1.87}$$

gdje su $M(x,y)$ i $N(x,y)$ homogene funkcije stepena homogenosti α, a $P(x,y)$ homogena funkcija stepena homogenosti β, naziva se *Darbouxova diferencijalna jednadžba.*

Ako je $\beta - \alpha + 2 \neq 0$ ili $\beta - \alpha + 1 \neq 0$, smjenom $\dfrac{y}{x} = z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, Darbouxova jednadžba se transformira u Bernoullievu. Naime, u dijelu zajedničke oblasti definiranosti funkcija M, N, P i u kome je $x > 0$ (analogno za $x < 0$), jednadžbu (1.87) napišimo u obliku

$$x^\alpha M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^\alpha N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy + x^\beta P\left(1, \frac{y}{x}\right)(xdy - ydx) = 0.$$

Stavimo $y = zx$, onda je $xdy - ydx = x^2 dz$, pa jednadžba postaje

$$[M(1,z) + zN(1,z)]dx + N(1,z)xdz + P(1,z)x^{\beta-\alpha+2}dz = 0.$$

Ako je $M(1,z) + zN(1,z) \neq 0$, ovo je Bernoullieva jednadžba po nepoznatoj funkciji $x(z)$. Može se pokazati da ako je $x(z)$ rješenje ove jednadžbe, onda je $y = xz(x)$, gdje je $z(x)$ inverzna funkcija funkcije $x(z)$, rješenje Darbouxove jednadžbe.

Ako je z_0 korijen jednadžbe $M(1,z) + zN(1,z) = 0$, onda posebno treba ispitati da li je neka od funkcija $y = z_0 x,\ x < 0$, ili $y = z_0 x,\ x > 0$ rješenje jednadžbe (1.87), a zatim odrediti prirodu rješenja.

Ako je $\beta - \alpha + 2 = 0$, onda je diferencijalna jednadžba (1.87) linearna, a ako je $\beta - \alpha + 1 = 0$, onda je jednadžba (1.87) homogena.

Primjer 1.4.14. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0.$$

Rješenje. Oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe je skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jednadžba je Darbouxova diferencijalna jednadžba, jer se može napisati u obliku

$$xdy + ydx + x(xdy - ydx) = 0.$$

Smjenom $y = zx$ ona se svodi na diferencijalnu jednadžbu

$$z'(zx + x^2) + z^2 + 1 = 0$$

koja je Bernulijeva po x, tj. imamo da je

$$x' + \frac{z}{z^2+1}x = -\frac{1}{z^2+1}x^2.$$

Smjenom $u = x^{-1} \Rightarrow x' = -u'/u^2$ ova jednadžba se svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$u' - \frac{z}{z^2+1}u = 1\frac{1}{z^2+1}.$$

čije je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} u(z) =& e^{\int \frac{z}{z^2+1}dz}\left[C + \int \frac{1}{z^2+1}e^{-\int \frac{z}{z^2+1}dz}dz\right] = \\ =& \sqrt{z^2+1}\left[C + \int \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}\right]. \end{aligned}$$

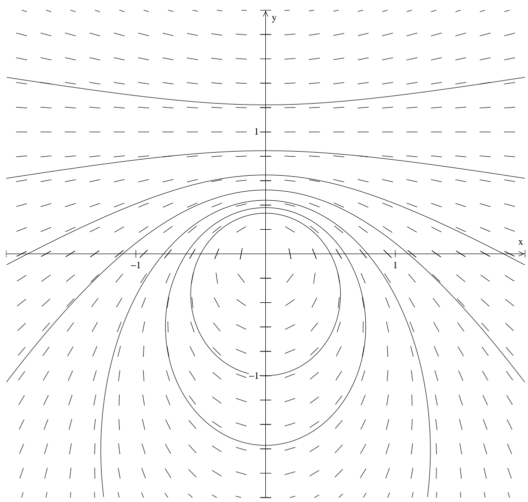
Kako je

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}},$$

to je $u(z) = C\sqrt{z^2+1}+z$. Vraćajući smjenu dobivamo da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$y + C\sqrt{y^2+x^2} = 1 \text{ (Slika 1.12).}$$

♦



Slika 1.12: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$.

Primjer 1.4.15. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$xy' - x(y-x)\sqrt{y^2-x^2} = y.$$

Odrediti ono rješenje koje sadrži tačku $(-2, -2)$.

Rješenje. Oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe je skup $\{(x,y) : |y| \geq |x|\} \setminus \{(0,0)\}$. Jednadžba je Darbouxova diferencijalna jednadžba

$$xdy - ydx - x(y-x)\sqrt{y^2-x^2}dx = 0$$

za $N(x,y) \equiv 0$. Smjenom $y = zx$ ona se svodi na diferencijalnu jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim $dz - |x|(z-1)\sqrt{z^2-1}dx = 0$. Ako je $z^2 - 1 \neq 0$, njen opći integral je

$$\int \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z^2-1}} = \int |x|dx + C.$$

Kako je

$$\int \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z^2-1}} = -\frac{z+1}{\sqrt{z^2-1}},$$

to je

$$\frac{z+1}{\sqrt{z^2-1}} = C - \operatorname{sgn}(x)x^2,$$

pa je rješenje Darbouxove diferencijalne jednadžbe

$$y = \frac{x[(C-x^2)^2+4]}{(C-x^2)^2-4}.$$

Za $z = 1$, funkcije $y = x$ za $x > 0$ i $y = x$ za $x < 0$, su partikularna rješenja sadržana u općem rješenju za $C = \infty$.

Za $z = -1$, funkcija $y = -x$ za $x < 0$ je singularno rješenje, jer kroz proizvoljnu tačku $(x_0, -x_0)$, $x_0 > 0$, osim nje prolazi i Cauchyevo rješenje

$$4\frac{y+x}{y-x} = (x_0^2 - x^2)^2.$$

Diferenciranjem ovog izraza lako se vidi da je $y'(x_0) = -1$, pa je integralna kriva $y = -x$ za $x < 0$ njegova tangenta u tački $(x_0, -x_0)$. Prema tome, ova prava je singularno rješenje, kao i prava $y = -x$ za $x > 0$.

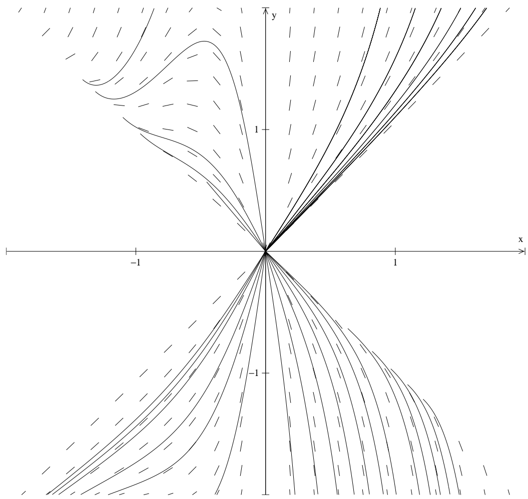
Kroz tačku $(2, -2)$ prolazi singularno rješenje $y = -x$, $x < 0$, i Cauchyevo rješenje

$$y = \frac{x[(4-x^2)^2+4]}{(4-x^2)^2-4}, \quad -\sqrt{6} < x < -\sqrt{2} \text{ (Slika 1.13)}.$$

♦

1.4.8 Zadaci za samostalan rad

1. Riješiti sljedeće Darbouxove diferencijalne jednadžbe:
   (a) $(x+3y)dx + 2ydy + a(x+y)(xdy - ydx) = 0$
   (b) $(x^3 - xy^2)dx + 2x^2ydy - (xdy - dyx) = 0$
2. Riješiti jednadžbu $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$.
3. Riješiti jednadžbu $(x^3 - y)dx + (x^2y + x)dx = 0$.



Slika 1.13: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $xy' - x(y-x)\sqrt{y^2-x^2} = y$.

1.4.9 Riccatieva diferencijalna jednadžba

Jednadžba oblika

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{1.88}$$

se naziva *Riccatieva* diferencijalna jednadžba.
Ako su funkcije $p(x), q(x), r(x) \in C(a,b)$, onda slijedi da je $\mathcal{E} = (a,b)\times(-\infty,+\infty)$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Budući da je $\mathcal{E}$ i oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe, onda jednadžba (1.88) nema singularnih rješenja. Za razliku od integralnih krivih linearne diferencijalne jednadžbe, integralne krive Riccatieve jednadžbe ne moraju biti definirane na cijelom intervalu (a,b).

Primjer 1.4.16. *Rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y^2$ sa početnim uvjetom $y(0) = 1$, je $y = 1/(1-x)$. Ovo rješenje nije definirano svuda na realnoj osi. Naime, ono je definirano samo za $1 - x > 0$, tj. za $x < 1$, dok je desna strana date diferencijalne jednadžbe definirana svuda na $\mathbb{R}$.*

Ono što karakterizira jednadžbu (1.88) je da se ona u općem slučaju ne može riješiti pomoću konačnog broja integracija.

S druge strane, Riccatieva jednadžba se uvijek može riješiti ako je poznat jedan partikularni integral y_1. Smjenom $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, gdje je $z(x)$ nova nepoznata funkcija, ona se transformira u linearnu diferencijalnu jednadžbu. Postoje specijalni slučajevi ove jednadžbe koji se mogu riješiti:

Na primjer, ako su a, b, c konstante, takve da je $a^2 + c^2 \neq 0$, onda jednadžba

(i) $y' = f(x)(ay^2 + by + c)$ je diferencijalna jednadžba koja razdvaja promjenljive (f je data funkcija);

(ii) $y' = \frac{a}{x^2}y^2 + \frac{b}{x}y + c$ je homogena diferencijalna jednadžba;

(iii) $y' = \frac{a}{x}y^2 + \frac{1}{2x}y + c$, smjenom $y = z\sqrt{x}$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, transformira u diferencijalnu jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim

$$z'\sqrt{x} = az^2 + c.$$

(iv) $y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}$, gdje su A, B i C konstante za koje vrijedi $(B+1)^2 \geq 4AC$ ima jedno partikularno rješenje u obliku

$$y_1 = \frac{a}{x},$$

gdje je a neka konstanta, pa se rješava kao u prethodno opisanom slučaju.

(v) $y' + Ay^2 = Bx^m$ se za $m = 0$ se svodi na diferencijalnu jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim, dok za $m = -2$, jednadžba se svodi na oblik pod (iv). U ostalim slučajevima ovu jednadžbu je moguće riješiti preko integrala akko je

$$\frac{m}{2m+4} = k, \qquad k \text{ je cijeli broj i } m \neq 0, m \neq -2.$$

U tom slučaju se smjenom

$$y = \frac{z}{x}, \quad x^{m+2} = t, \quad z = z(t)$$

svodi na diferencijalnu jednadžbu

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t, \quad \alpha = k - \frac{1}{2},$$

koja se smjenom

$$(\text{za } \alpha > 1) \quad z = \frac{t}{a+u}, \quad a = \frac{1+\alpha}{\gamma},$$

$$(\text{za } \alpha < 1) \quad z = a + \frac{t}{u}, \quad a = -\frac{\alpha}{\beta},$$

svodi na diferencijalnu jednadžbu oblika kao pod ii).

Riccatieva diferencijalna jednadžba (1.88) može se smjenom

$$y = \alpha(x)z$$

prevesti u Riccatievu diferencijalnu jednadžbu kod koje su koeficijenti uz kvadrat $+1$ ili -1. Smjenom

$$y = z + \beta(x),$$

ne mijenjajući koeficijent uz kvadrat, data Riccatieva diferencijalna jednadžba se može svesti na oblik koji ima uz y koeficijent nula. Kombinirajući prethodno opisana dva postupka, svaka Riccatieva diferencijalna jednadžba se može svesti na oblik

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Može se pokazati da je opće rješenje Riccatieve jednadžbe oblika

$$y = \frac{CA_1(x) + B_1(x)}{CA(x) + B(x)},$$

te da je jednadžba čije je opće rješenje dato sa $y = \frac{CA_1(x)+B_1(x)}{CA(x)+B(x)}$, $A_1(x)B(x) - A(x)B_1(x) \neq 0$ Riccatieva diferencijalna jednadžba.

Primjer 1.4.17. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

Rješenje. Očigledno je jedno partikularno rješenje dato sa $y_1 = x$. Smjenom

$$y = x + \frac{1}{z}$$

polazna jednadžba se svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu $z' - 2xz = 1$, čije je rješenje dato sa

$$z = e^{x^2}\left(C + \int e^{-x^2}dx\right).$$

Odavde slijedi da je opće rješenje dato sa

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2}dx}.$$

♦

Primjer 1.4.18. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' = y^2 + x^{-4}.$$

Rješenje. Ovdje je $m = -4$. Kako je $\dfrac{m}{2m+4} = -1 \in \mathbb{Z}$, to je polazna diferencijalna jednadžba rješiva pomoću kvadratura. Smjenom

$$y = \frac{z}{x}, \quad t = \frac{1}{x^2}, \quad z = z(t),$$

dobijemo diferencijalnu jednadžbu

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t \quad (\alpha = \frac{1}{2}).$$

Kako je $\alpha < 1$, to smjenom $z = -1 + \dfrac{t}{u}$ ova jednadžba se svodi na jednadžbu

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t.$$

Smjenom $u = v\sqrt{t}$, prethodna jednadžba se svodi na jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim

$$v'\sqrt{t} = \frac{1+v^2}{2},$$

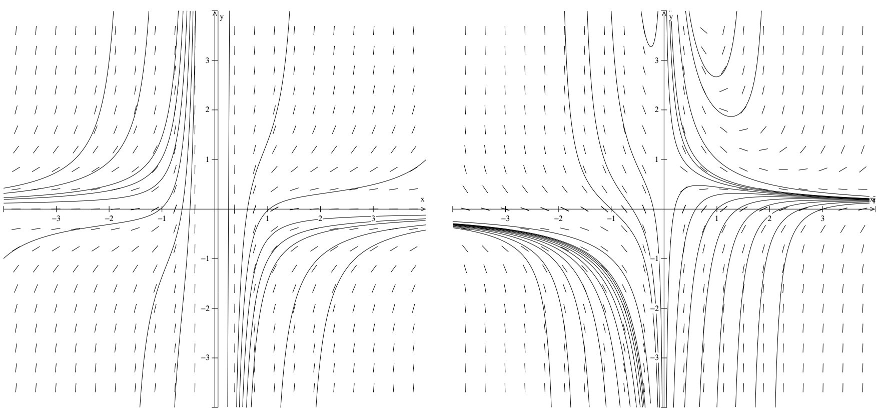
čije je rješenje dato sa

$$v = \tan(\sqrt{t} + C) \quad \text{za } -C - \frac{\pi}{2} \leq \sqrt{t} \leq -C + \frac{\pi}{2}.$$

Vraćanjem smjena opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$y = \frac{1}{x^2}\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{x} + C\right)} - \frac{1}{x} \quad \text{za } -C - \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -C + \frac{\pi}{2} \quad \text{(Slika 1.14 (a)).}$$

♦



(a) (b)

Slika 1.14: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $y' = y^2 + x^{-4}$ i (b) $xy' = x^2y^2 - (2x+1)y + 1$.

Primjer 1.4.19. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$xy' = x^2y^2 - (2x+1)y + 1.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $y = \alpha(x)z \Rightarrow y' = \alpha' z + z'\alpha$. Uvrštavajući u polaznu jednadžbu dobijemo da je

$$z' = x\alpha z^2 - \frac{(2x+1)\alpha + \alpha' x}{\alpha x} z + \frac{1}{\alpha x}.$$

Odaberimo α tako da koeficijent uz y^2 bude 1, tj. $\alpha = 1/x$ za $x \neq 0$. U tom slučaju se jednadžba svodi na diferencijalnu jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim

$$z' = z^2 - 2z + 1$$

koja se može za, $z \neq 1$, napisati u obliku

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = dx.$$

Integriranjem obje strane prethodne jednadžbe dobivamo da je $-\frac{1}{z-1} = x + C$. Vraćanjem smjene dobivamo da je opće rješenje dato sa $yx - 1 = -\frac{1}{x+C}$. Ako je $z = 1$, tada dobivamo da je $y = 1/x$, rješenje koje se dobiva iz općeg rješenja za $C = -\infty$ (Slika 1.14 (b)). ♦

1.4.10 Zadaci za samostalan rad

1. Riješiti sljedeće diferencijalne jednadžbe:

   a) $xy' + 3y + y^2 = x^2$,

   b) $xy' - 5y - y^2 = x^2$,

   c) $y' + y^2 = x^{-4}$,

   d) $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$,

   e) $y' = y^2 + x^{-\frac{4}{3}}$.

2. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

   $$x^2(y^2 + y') - 2\lambda x^2 y + \frac{1}{4} + \lambda^2 x^2 = 0, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

   ako ima partikularno rješenje oblika $y(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Izdvojiti rješenje koje prolazi tačkom $(0,1)$.

3. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

   $$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}.$$

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

   $$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}.$$

   Odrediti ono rješenje koje sadrži tačku $(0,1)$.

5. Riješiti pogodnim smjenama diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' + ay(y - x) - 1 = 0,$

   b) $y' + xy(y - x^2) - 2x = 0,$

   c) $y' + y^2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{4}{x^2} = 0,$

   d) $y' + ay^2 = \dfrac{b}{x^2}.$

1.4.11 Diferencijalne jednadžbe totalnog diferencijala

Posmatrajmo funkciju

$$z(x, y) = 3x^2y + 5xy + y^3 + 5.$$

Diferencijal ove funkcije je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (6xy + 5y)dx + (3x^2 + 5x + 3y^2)dy.$$

Dakle, ako je data neka neprekidna funkcija $z = z(x, y)$ onda nije teško naći njen totalni diferencijal. Međutim, možemo postaviti obrnuto pitanje, tj. da li je izraz

$$(6xy + 5y)dx + (3x^2 + 5x + 3y^2)dy$$

totalni diferencijal neke funkcije.

Prije nego detaljnije damo odgovor na postavljeno pitanje navedimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.4.1. *Izraz*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

se zove **totalni** *diferencijal ako postoji funkcija $f(x, y)$ za koju je ovaj izraz totalni diferencijal, tj.*

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x};\ N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Sada ćemo precizno definirati jednadžbu totalnog diferencijala. Neka su funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ definirane i neprekidne u jednostruko povezanoj oblasti[12] $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ i neka je u toj oblasti $M^2 + N^2 \neq 0,$ za sve $(x, y) \in \mathcal{D}$. Jednadžba oblika

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.89}$$

[12] Oblast (otvoren i povezan skup) $\mathcal{D}$ jednostruko povezana ako se svaka jednostavna zatvorena Jordanova kriva koja leži u $\mathcal{D}$ može neprekidnom deformacijom stegnuti na tačku a da se pri tome ne izađe iz $\mathcal{D}$. Pod zatvorenom Jordanovom krivom podrazumjevamo po dijelovima glatku, jednostavnu zatvorenu ravansku krivu.

zove se diferencijalna jednadžba **totalnog** diferencijala ako je njena lijeva strana totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y)$ definirane u oblasti $\mathcal{D}$, tj. ako za svako $(x, y) \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Uvjet $M^2 + N^2 \neq 0$ je uvjet određenosti polja pravaca u oblasti $\mathcal{D}$, pa je zbog toga oblast $\mathcal{D}$ i oblast definiranosti diferencijalne jednadžbe (1.89).

Postavlja se pitanje veze između funkcije U i rješenja diferencijalne jednadžbe (1.89). Može se pokazati da ako je $y(x)$, $x \in (a, b)$, bilo koje rješenje jednadžbe (1.89), onda je $U(x, y(x)) = const.$ za svako $x \in (a, b)$. Naime, kako je $y(x)$ rješenje jednadžbe (1.89), onda je

$$\begin{aligned} 0 = M(x,y(x))dx + N(x,y(x))dy \equiv & \left[\frac{\partial U(x,y(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y(x))}{\partial y}y'(x)\right] \\ =& dU(x,y(x)). \end{aligned}$$

Dakle, $U(x, y(x)) = const.$ za sve $x \in (a, b)$. Može se pokazati da vrijedi i obratno: svaka funkcija $\phi(x)$, $x \in (a, b)$, implicitno definirana jednadžbom $F(x, y) = C$, je rješenje jednadžbe (1.89). Zaista, zbog neprekidnosti funkcija $M(x, y)$ i $N(x, y)$ i uvjeta određenosti polja pravaca u oblasti $\mathcal{D}$, funkcija $F(x, y)$ je neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda u toj oblasti, pri čemu je bar jedan od njih različit od nule. Na primjer, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \equiv N(x, y) \neq 0$ u oblasti $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Kako je $F(x, \phi(x)) = C$, $x \in (a, b)$, to je

$$dF(x,\phi(x)) = \frac{\partial F(x,\phi(x))}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,\phi(x))}{\partial y}d\phi(x)$$

$$\equiv M(x,\phi(x))dx + N(x,\phi(x))d\phi(x) \equiv 0,$$

i po Teoremu o integralu, slijedi da je funkcija $F(x, y)$ integral diferencijalne jednadžbe (1.89). Dakle, jednadžbom $F(x, y) = C$ je određen integral diferencijalne jednadžbe (1.89), pa su njome implicitno definirana sva Cauchyeva rješenja.

Pogledajmo koje uvjete treba da ispunjavaju funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ da bi jednadžba (1.89) bila diferencijalna jednadžba totalnog diferencijala. Vrijedi sljedeći Teorem.

Teorem 1.4.2. *Neka su funkcije $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ i $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ definirane i neprekidne u oblasti $\mathcal{D}$, pri čemu je $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ za svako $(x, y) \in \mathcal{D}$. Diferencijalna jednadžba (1.89) je diferencijalna jednadžba totalanog diferencijala ako i samo ako je*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad (x,y) \in \mathcal{D}. \tag{1.90}$$

Dokaz. Ako je (1.89) jednadžba totalnog diferencijala, zbog neprekidnosti funkcija $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ slijedi jednakost parcijalnih izvoda $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ i $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$, odnosno relacija (1.90).

Pretpostavimo, sada da vrijedi relacija (1.90), onda je moguće odrediti funkciju $F(x,y)$ definiranu u obasti $\mathcal{D}$, tako da je $dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ za svako $(x,y) \in \mathcal{D}$. Samim tim će biti određen opći integral ove jednadžbe.

Neka je $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ proizvoljna tačka. Iz $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ za svako $(x,y) \in \mathcal{D}$, dobiva se

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \phi(y),$$

gdje je $\phi(y)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija. Ovu funkciju ćemo odrediti iz relacije

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \phi'(y) = N(x,y).$$

Budući da su funkcije $M(x,y)$ i $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ neprekidne, integral se može diferencirati po parametru y za svako $(x,y) \in \mathcal{D}$, tj.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dt + \phi'(y) = N(x,y).$$

Iz (1.90) slijedi

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial y} dt + \phi'(y) = N(x,y),$$

pa je $\phi'(y) = N(x_0, y)$, odnosno

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C_1.$$

Sada je

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C_1,$$

pa je jednadžba $F(x,y) = C_2$ opći integral diferencijalne jednadžbe (1.89). Dakle, opće rješenje ove jednadžbe je implicitno definirano jednažbom

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt = C, \quad C = C_2 - C_1.$$

Ako se u određivanju funkcije $F(x,y)$ krene od relacije $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, dobiva se opći integral

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt = C.$$

Dakle, pod uvjetom Teorema 1.4.2, oblast $\mathcal{D}$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja, pa diferencijalna jednadžba (1.89) nema singularnih rješenja. $\square$

Primjer 1.4.20. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$(1 + 2x\sqrt{x^2 - y^2})dx - 2y\sqrt{x^2 - y^2}dy = 0.$$

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\{(x, y) : |x| \geq |y|\} \setminus \{(-1/2, 0)\}$. Lako se vidi da je ovo jednadžba totalnog diferencijala, tj. da vrijedi

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{2xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Kako je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2x\sqrt{x^2 - y^2}$, dobivamo da je

$$F(x, y) = \int (1 + 2x\sqrt{x^2 - y^2})dx = x + \frac{2}{3}(x^2 - y^2)^{3/2} + \phi(y),$$

gdje je $\phi(y)$ nepoznata funkcija koju ćemo odrediti.

Uvrštavajući ovo u $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y\sqrt{x^2 - y^2}$, dobivamo da je

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x + \frac{2}{3}(x^2 - y^2)^{3/2} + \phi(y)\right] = -2y\sqrt{x^2 - y^2},$$

odakle slijedi da je $\phi'(y) = 0$, tj. $\phi(y) = C$, gdje je C konstanta. Dakle, opće rješenje je dato sa

$$x + \frac{2}{3}(x^2 - y^2)^{3/2} + C = 0 \quad \text{(Slika 1.15 (a))}.$$

♦

Primjer 1.4.21. *Pokazati da se diferencijalna jednadžba*

$$y(y - x^2\sqrt{x^2 - y^2})dx - (xy\sqrt{x^2 - y^2} + x)dy = 0$$

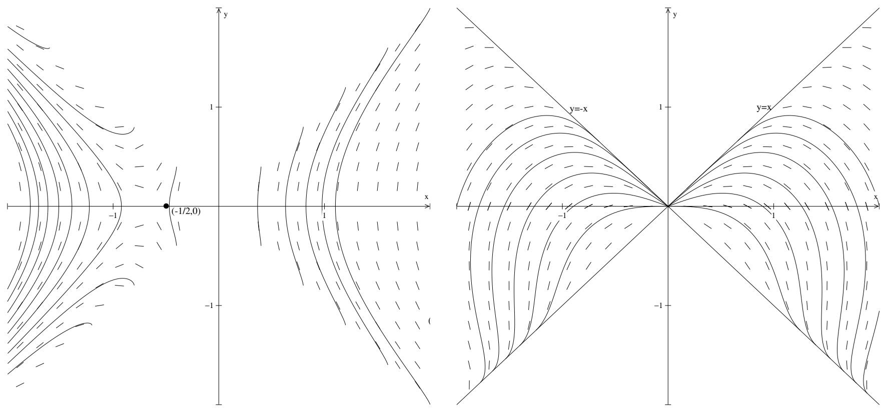
smjenom $y = xz$, $z = z(x)$ svodi na diferencijalnu jednadžbu sa totalnim diferencijalom. Odrediti joj opće rješenje. Ispitati postojanje singularnih rješenja.

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\{(x, y) : |x| \geq |y|\} \setminus \{(0, 0)\}$. Smjenom se svodi na jednažbu

$$(xz - x^2|x|\sqrt{x^2 - y^2})dx - (x^2|x|\sqrt{x^2 - y^2} + x)(xdz + zdx) = 0.$$

Za $1 - z^2 > 0$, ova diferencijalna jednadžba se svodi na jednadžbu

$$x(1 + z^2)dx + \left(x^2 z + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1 - z^2}}\right)dz = 0.$$



(a) (b)

Slika 1.15: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $(1+2x\sqrt{x^2-y^2})dx - 2y\sqrt{x^2-y^2}dy = 0$ i (b) $y(y - x^2\sqrt{x^2-y^2})dx - (xy\sqrt{x^2-y^2} + x)dy = 0$.

Jednostavno se može vidjeti, primjenjujući postupak kao u prethodnom primjeru, da je funkcija čiji je totalni diferencijal jednak lijevoj strani prethodne jednadžbe, data sa

$$\frac{x^2+y^2}{2} + \operatorname{sgn}(x) \arcsin \frac{y}{x} = C.$$

Pored toga, može se vidjeti da je funkcija $y = x$, $x \neq 0$, singularno rješenje polazne jednadžbe. Zaista, na primjer, kroz tačku (x_0, x_0) integralne krive $y = x$, $x \neq 0$, prolazi i partikularno rješenje

$$\frac{x^2+y^2}{2} + \arcsin \frac{y}{x} = x_0^2 + \frac{\pi}{2},$$

sa koeficijentom pravca tangente u toj tački $y'(x_0) = 1$ (Slika 1.15 (a)).

♦

1.4.12 Zadaci za samostalan rad

1. Riješiti jednadžbu

$$x(y^2+1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0.$$

   Ispitati ponašanje rješenja u blizini singularne tačke.

2. Riješiti jednadžbu

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

3. Riješiti jednadžbu
$$xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$$

4. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe
$$\frac{(x + 2y)dx + ydy}{x + y)^2} = 0.$$
Odrediti ono rješenje koje sadrži tačku $(1, 0)$.

1.4.13 Integracioni faktor

Prednost diferencijalne jednadžbe totalnog diferencijala je u tome što se opće rješenje uvijek može odrediti, pa je zato od interesa tražiti uvjete pod kojima se može diferencijalna jednadžba prvog reda, u normalnom obliku, transformirati u jednadžbu totalnog diferencijala.

Neka su funkcije $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ definirane i neprekidne u jednostruko povezanoj oblasti $\mathcal{D}$, pri čemu je $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$, za svako $(x, y) \in \mathcal{D}$. Ako uvjet (1.90) nije ispunjen, onda jednadžba

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.91}$$

nije jednadžba totalnog diferencijala, pa se ne može odmah integrirati. Zato je potrebno od jednadžbe (1.91) probati napraviti diferencijalnu jednadžbu totalnog diferencijala.

Definicija 1.4.2. *Funkcija $\mu(x, y)$ definirana i neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $\mathcal{D}$, različita od nule u toj oblasti, je integracioni faktor diferencijalne jednadžbe (1.91) ako nakon množenja sa ovom funkcijom jednadžba (1.91) postaje diferencijalna jednadžba totalnog diferencijala, tj. ako je diferencijalna jednadžba*

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{1.92}$$

jednadžba totalnog diferencijala.

Sada se problem svodi na određivanje funkcije $\mu(x, y)$. Jasno je, iz prethodnog poglavlja, da se ta funkcija određuje tako da je ispunjen sljedeći uvjet

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Odavde dobivamo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

koja se općenito teško rješava.

Međutim, postoje slučajevi u kojima se ova jednadžba može riješiti. Na primjer, ako je integracioni faktor funkcija samo od x ili samo od y.

Općenito, ako pretpostavimo da je $\mu(x, y) = \mu(\omega)$, tada se μ može odrediti iz sljedeće diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega$$

pod uvjetom da je

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}$$

funkcija od ω. U tom slučaju je

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega},$$

gdje funcija ω može da bude, na primjer, sljedećeg oblika

$$\omega = \frac{x}{y}, \quad \omega = \frac{y}{x}, \quad \omega = xy, \quad \omega = x^2 + y^2, \quad \omega = x + y, \quad \omega = x - y, \quad \text{itd.}$$

Ono što je važno uočiti kada je u pitanju integracioni faktor je da on nije jedinstven, tj. problem se svodi na izbor jedne takve funkcije, a njih može biti i više. Zapravo, ako je $\mu(x, y)$ jedan integracioni faktor, onda je svaka funkcija $\mu_0(x, y)\mu(x, y)$, gdje je μ_0 neka neprekidno diferencijabilna funkcija, također integracioni faktor. Odavde zaključujemo da integracionih faktora ima beskonačno mnogo. Također, ako su μ_0 i μ_1 dva integraciona faktora diferencijalne jednadžbe (1.91), F_0 integral koji odgovara integracionom faktoru μ_0, tada postoji neprekidno diferencijabilna funkcija $\phi(x)$ takva da je $\mu_1 = \mu_0\phi(F_0)$. Dakle, svaka dva integraciona faktora jednadžbe (1.91) su zavisna.

Na kraju, ako su μ_0 i μ_1 dva integraciona faktora jednadžbe (1.91) i neka je $\dfrac{\mu_0}{\mu_1} \neq const.$ u zajedničkoj oblasti definiranosti funkcija μ_0 i μ_1, tada je $\dfrac{\mu_0}{\mu_1} = C$ opći integral diferencijalne jednadžbe (1.91).

Primjer 1.4.22. *Odrediti opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$$

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1, 1)\}$. U ovom slučaju je $M(x, y) = 1 - xy^2$ i $N(x, y) = x^2(y - x)$ te se lako može vidjeti da je $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, te jednadžba nije jednadžba totalnog diferencijala. Pokušajmo odrediti integracioni faktor. Imamo da je

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{2x(x - y))}{[x^2(y - x)]\frac{\partial \omega}{\partial x} - (1 - x^2y)\frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Ako uzmemo da je $\omega = x$, tada dobijemo da je $\psi = \psi(\omega)$, odakle slijedi

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x}dx \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Lako se vidi da je funkcija F, čiji je totalni diferencijal jednak lijevoj strani izraza

$$\frac{1}{x^2}\left[(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy\right] = 0,$$

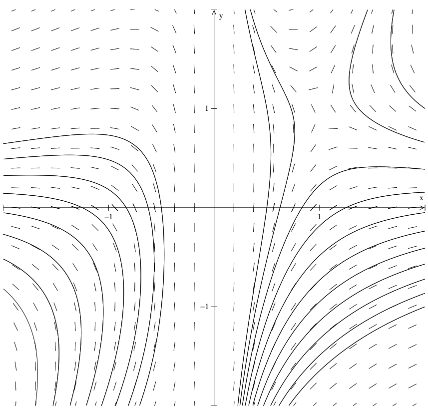
data sa

$$F(x, y) = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + C,$$

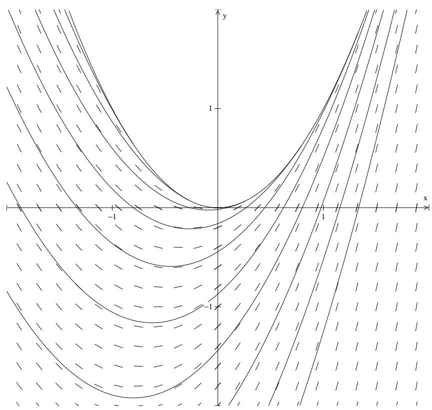
pa je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + C = 0 \text{ za } x \neq 0.$$

Jednostavno se vidi da je $x \equiv 0$ rješenje koje se dobije iz općeg rješnje za $C = -\infty$, pa polazna jednadžba nema singularnih rješenja (Slika 1.16 (a)). ♦



(a)



(b)

Slika 1.16: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$ i (b) $(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0$.

Primjer 1.4.23. *Odrediti opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0.$$

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\{(x,y) : y \le x^2\}$. U ovom slučaju je $M(x,y) = \sqrt{x^2-y} + 2x$ i $N(x,y) = -1$ te se lako može vidjeti da je $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, pa jednadžba nije jednadžba totalnog diferencijala. Pokušajmo odrediti integracioni faktor. Imamo da je

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}}}{-\frac{\partial \omega}{\partial x} - (\sqrt{x^2-y}+2x)\frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Ako uzmemo da je $\omega = x^2 - y$, tada dobijemo da je $\psi = \psi(\omega) = -1/(2\omega)$, odakle slijedi

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2\omega}d\omega \Rightarrow \mu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Rightarrow \mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Lako se vidi da je funkcija F, čiji je totalni diferencijal jednak lijevoj strani izraza

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}\left[(\sqrt{x^2-y}+2x)dx - dy\right] = 0,$$

data sa

$$F(x,y) = 2\sqrt{x^2-y} + x + C,$$

pa je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$2\sqrt{x^2-y} + x + C = 0.$$

Jednostavno se vidi da je i funkcija $y = x^2$ rješenje polazne jednadžbe. Kako kroz proizvoljnu tačku (x_0, x_0^2) krive $y = x^2$ prolazi i partikularno rješenje $2\sqrt{x^2-y} + x - x_0 = 0$, za $x \le x_0$, sa koeficijentom pravca tangente $y'(x_0) = 2x_0$, to je ona i singularno rješenje polazne jednadžbe (Slika 1.16 (b)). ⧫

Primjer 1.4.24. *Odrediti opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0.$$

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. U ovom slučaju je $M(x,y) = x^2y^3 + y$ i $N(x,y) = x^3y^2 - x$, i vrijedi $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, pa jednadžba i u ovom slučaju nije jednadžba totalnog diferencijala. Pokušajmo odrediti integracioni faktor. Kako je

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{2}{(x^3y^2 - x)\frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2y^3+y)\frac{\partial \omega}{\partial y}},$$

ako uzmemo da je $\omega = xy$, tada dobivamo da je $\psi = \psi(\omega) = -1/\omega$, odakle slijedi

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{\omega}d\omega \Rightarrow \mu(\omega) = \frac{1}{\omega} \Rightarrow \mu(x,y) = \frac{1}{xy}.$$

Lako se vidi da je funkcija F, čiji je totalni diferencijal jednak lijevoj strani izraza

$$\frac{1}{xy}\left[(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy\right]=0,$$

data sa

$$F(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}-\ln|y|+\ln|x|+C,$$

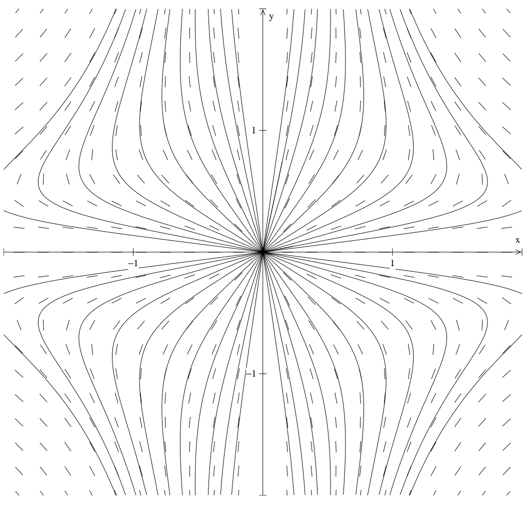
pa je opće rješenje polazne jednadžbe

$$\frac{x^2y^2}{2}-\ln|y|+\ln|x|+C=0.$$

Ako opće rješenje napišemo u obliku

$$\frac{y}{x}=\pm e^{(x^2y^2)/2+C},$$

jednostavno se vidi da su i funkcije $y\equiv 0$, $x>0$, $y\equiv 0$, $x<0$, $x\equiv 0$, $y>0$ i $x\equiv 0$, $y<0$ rješenje polazne jednadžbe. za $C=\pm\infty$, pa polazna jednadžba nema singularnih rješenja (Slika 1.17). ♦



Slika 1.17: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalne jednadžbe $(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy=0$.

1.4.14 Zadaci za samostalan rad

Riješiti diferencijalne jednadžbe:

1. $x\left(4+\frac{1}{x^2-y^2}\right)dx-y\left(4-\frac{1}{x^2-y^2}\right)dy=0.$

2. $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$.
3. $\left(2y + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dx + \left(3y + x + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dy = 0$.
4. $(y + xy^2)dx + \left(\frac{1}{2}x^2 y + y + 1\right) dy = 0$.
5. $\left(\frac{2}{y} - \frac{y}{x^3}\right) dx + \left(\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^3}\right) dx = 0$.
6. $axdy + bydx + x^m y^m(\alpha xdy + \beta ydx) = 0$, gdje $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{Z}$.

1.5 Diferencijalne jednadžbe koje nisu riješene po prvom izvodu

Obična diferencijalna jednadžba prvog reda koja nije riješena po prvom izvodu ima oblik

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.93}$$

gdje je F data funkcija definirana u oblasti $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, naziva se *diferencijalna jednadžba prvog reda u implicitnom obliku.*

Definicija 1.5.1. *Funkcija $\varphi(x)$, definirana na intervalu (a, b) je rješenje diferencijalne jednadžbe (1.93) ako za svako $x \in (a, b)$ vrijedi:*

(i) *postoji $\varphi'(x)$;*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \mathcal{D}$;

(iii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.

Za datu tačku (x_0, y_0), jednadžba $F(x_0, y_0, z) = 0$ može imati više rješenja, pa u toj tački diferencijalna jednadžba (1.93) ima više polja pravaca. Integralna kriva rješenja ima osobinu da se tangenta u svakoj njenoj tački poklapa sa jednim od pravaca polja u toj tački.

Cauchyev problem za jednadžbu(1.93) se postavlja na sljedeći način: Za datu tačku (x_0, y_0) odrediti rješenje $\varphi(x)$ diferencijalne jednadžbe (1.93), definirano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava uvjet $\varphi(x_0) = y_0$.

Kao i kod diferencijalnih jednadžbi u eksplicitnom obliku, tako i ovdje zanima nas jedinstveno rješenje Cauchyevog problema. Ovdje se jedinstvenost posmatra u sljedećem smislu: Postoji jedinstveno rješenje Cauchyevog problema, ako postoji okolina tačke x_0 u kojoj se poklapaju sva rješenja čije integralne krive prolaze tačkom (x_0, y_0) i koje u toj tački imaju istu tangentu. Jedinstvenost neće biti narušena ako tačkom (x_0, y_0) prolaze dva rješenja $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ za koja je $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ i $\varphi_1'(x_0) \neq \varphi_2'(x_0)$.
Dakle, Cauchyev problem će biti definiran ako zadamo tačku (x_0, y_0) i zadamo koeficijent pravca tangente y_0' u toj tački, gdje je y_0' neko od rješenja jednadžbe $F(x_0, y_0, z) = 0$.

Sada ćemo navesti teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyevog problema za diferencijalnu jednadžbu (1.93).

Teorem 1.5.1. (Teorem o egzistenciji i jedinstvenosti) *Neka je funkcija $F(x, y, y')$ definirana i neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda po y i y' u nekoj okolini tačke $(x_0, y_0, y_0') \in \mathcal{D}$, pri čemu je $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ i $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$. Onda diferencijalna jednadžba (1.93) ima jedinstveno rješenje $\varphi(x)$, definirano i neprekidno diferencijabilno u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava uvjete $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$.*

Dokaz. Funkcija $F(x, y, y')$ zadovoljava uvjete teorema o implicitno datim funkcijama, pa jednadžba $F(x, y, y') = 0$ ima jedinstveno rješenje po y'. Znači, postoji jedinstvena funkcija $f(x, y)$ definirana i neprekidna u nekoj okolini $O(x_0, y_0)$, tako da je za svako (x, y) iz te okoline $y' = f(x, y)$, $y_0' = f(x_0, y_0)$ i $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Zadnji identitet diferenciramo po y, za svako $(x, y) \in O(x_0, y_0)$, imamo

$$F'_y(x, y, f(x, y)) + F'_{y'}(x, y, f(x, y))f'_y(x, y) = 0,$$

pa je, prema uvjetima teorema, funkcija

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_{y'}(x, y, f(x, y))}$$

neprekidna u toj okolini. Slijedi da postoji jedinstveno rješenje $\varphi(x)$ diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$ definirano i neprekidno diferencijabilno u nekoj okolini $O(x_0)$, koje zadovoljava uvjet $\varphi(x_0) = y_0$. Također je $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) = y_0'$.

Funkcija $\varphi(x)$ je rješenje diferencijalne jednadžbe (1.93). Naime, budući da je $F(x, y, f(x, y)) = 0$ za svako $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ i $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ za svako $x \in O(x_0)$, to je

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = F(x, \varphi(x), f(x, \varphi(x))) = 0.$$

□

1.5.1 Načini rješavanja

1.5.1.1 Rješavanje bez parametrizacije

Neka se diferencijalna jednadžba (1.93) može riješiti po y' i to tako da se dobije konačan broj diferencijalnih jednadžbi u normalnom obliku

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Neka su funkcije $f_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ definirane u nekoj oblasti $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}^2$ i neka se u proizvoljnoj tački te oblasti polja pravaca svih jednadžbi međusobno različita. Ako je $\mathcal{D}_1$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja proizvoljnog Cauchyevog problema ovih jednadžbi, tj. ako postoje odgovarajući opći integrali $\Psi_k(x, y) = C$, $k = 1, \ldots, m$, opći integral jednadžbe (1.93) piše se u obliku

$$[\Psi_1(x, y) - C][\Psi_2(x, y) - C] \cdots [\Psi_m(x, y) - C] = 0.$$

Ovaj način pisanja općeg integrala je prirodan jer je bilo koje rješenje diferencijalne jednadžbe (1.93) integral neke od jednadžbi $y' = f_k(x,y),\ k = 1,\ldots,m$.

Ovom tipu jednadžbi pripada diferencijalna jednadžba oblika

$$p_0(x,y)y'^n + \cdots + p_{n-1}(x,y)y' + p_n(x,y) = 0.$$

Posebno nas interesiraju ona rješenja kod kojih je narušena jedinstvenost Cauchyevog problema, tj. singularna rješenja. Naravno, ovdje treba shvatiti singularno rješenje na način kako smo rekli. Ono što karakterizira diferencijalnu jednadžbu (1.93) u odnosu na diferencijalnu jednadžbu u normalnom obliku je da se eventualna singularna rješenja mogu odrediti iz same jednadžbe.

Teorem 1.5.2. *Neka je funkcija $F(x,y,y')$ definirana i neprekidna i neka ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po y i y' u oblast $\mathcal{D}$. Onda singularno rješenje diferencijalne jednadžbe (1.93) zadovoljava jednadžbe*

$$F(x,y,y') = 0, \quad F'_{y'}(x,y,y') = 0 \tag{1.94}$$

Dokaz. Naime, ako je funkcija $\varphi(x),\ x \in (a,b)$, singularno rješenje diferencijalne jednadžbe (1.93), kao rješenje ono identički zadovoljava jednadžbu, pa je $F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0$ za svako $x \in (a,b)$. Pokažimo da $\varphi(x)$ zadovoljava i drugu jednadžbu. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $(x_0,\varphi(x_0))$ proizvoljna tačka singularne integralne krive rješenja $y = \varphi(x)$ i neka je $F'_{y'}(x_0,\varphi(x_0),\varphi'(x_0)) \neq 0$. Označimo sa $\varphi(x_0) = y_0$ i $\varphi'(x_0) = y'_0$. Budući da je $F(x_0,y_0,y'_0) = 0$ i $F'_{y'}(x_0,y_0,y'_0) \neq 0$, slijedi da jednadžba (1.93) ima jedinstveno rješenje (ranije dokazani teorem) $\psi(x)$ definirano u nekoj okolini tačke x_0 i koje zadovoljava uvjete $\psi(x_0) = y_0$ i $\psi'(x_0) = y'_0$. Budući da rješenja $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ zadovoljavaju iste početne uvjete, zbog jedinstvenosti, moraju se poklapati u zajedničkoj oblasti definiranosti, pa funkcija $\varphi(x)$ ne može biti singularno rješenje, što je suprotno pretpostavci. Dakle, mora biti $F'_{y'}(x_0,\varphi(x_0),\varphi'(x_0)) = 0$. Budući da je $(x_0,\varphi(x_0))$ proizvoljna tačka singularne krive, to je $F'_{y'}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0$ za svako $x \in (a,b)$. Ovim je teorem dokazan. □

Eliminiranjem y' iz sistema jednadžbi (1.94) se u općem slučaju određuje više krivih koje se nazivaju *diskriminantne* krive diferencijalne jednadžbe (1.94). Iz prethodnog teorema slijedi da svaka singularna integralna kriva jeste diskriminantna kriva. Obratno ne vrijedi, tj. svaka diskriminantna kriva nije singularna kriva, čak ne mora biti ni integralna kriva. Dakle, za nalaženje singularnog rješenja potrebno je naći sve diskriminantne krive i ispitati koja je od njih singularna integralna kriva.

Pojam singularnog rješenja je povezan sa pojmom obvojnice jednoparametarske familije krivih. U tom smislu, može se pokazati da ako je jednadžbom $\Phi(x,y,C) = 0$ opisana jednoparametarska familija rješenja diferencijalne jednadžbe (1.93) koja ima obvojnicu, onda je obvojnica singularna integralna kriva. Ako diferencijalna jednadžba ima oblik

$$y'^2 + 2p(x,y)y' + q(x,y) = 0,$$

onda jednadžbe diskriminantnih krivih se dobivaju iz jednakosti polja pravaca u tačkama tih krivih: $p^2(x,y) - q(x,y) = 0$. Pravac polja u tački diskriminantne krive je $y'(x) = -p(x,y)$.

1.5.1.2 Opći metod parametrizacije

Kada nije moguće riješiti diferencijalnu jednadžbu (1.93) po y', onda se pristupa parametrizaciji, tj.

$$x = \theta_1(u,v),\ y = \theta_2(u,v),\ y' = \theta_3(u,v)$$

gdje su funkcije $\theta_i,\ i = 1,2,3$ definirane i neprekidne u oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, a funkcije θ_1 i θ_2 imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda u toj oblasti. Osim toga, preslikavanje $(u,v) \to (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ je obostrano jednoznačno iz Ω u $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ (gdje je $\mathcal{D}$ oblast definiranosti funkcije F) za svako $(u,v) \in \Omega$ je $F(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 0$. Budući da je $dy = y'dx$, onda je

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial u}du + \frac{\partial\theta_2}{\partial v}dv = \theta_3\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}du + \frac{\partial\theta_2}{\partial v}dv\right),$$

na ovaj način dobivamo diferencijalnu jednadžbu u obliku

$$\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial u} - \theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial v} - \theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)dv = 0.$$

Može se dokazati da ako je $v = \varphi(u),\ u \in (u_1,u_2)$ rješenje ove jednadžbe, onda je

$$\begin{cases} x = \theta_1(u,\varphi(u)) \\ y = \theta_2(u,\varphi(u)),\ u \in (u_1,u_2), \end{cases}$$

rješenje u parametarskom obliku.

Postupak parametrizacije može biti složen. Obično se parametrizacija primijenjuje kada nije moguće na drugi način riješiti diferencijalnu jednadžbu, što ne znači da će obavezno i parametrizacija dovesti do rješenja. Postoje slučajevi kada je parametrizacija dosta jednostavna. Takve slučajeve diferencijalnih jednadžbi ćemo navesti. Obično se radi o jednadžbama koje ne sadrže bar jednu od promjenljivih x ili y. Takve jednadžbe zovu se *nepotpune diferencijalne jednadžbe.*

(i) Najjednostavnija nepotpuna diferencijalna jednadžba ima oblik

$$F(y') = 0.$$

Ukoliko jednadžbu $F(z) = 0$ ne možemo eksplicitno riješiti, ali možemo dokazati egzistenciju rješenja $z = z_k,\ k = 1,2,\ldots,m$, onda iz $y' = z_k$ imamo $y = z_k x + C$. Sada je opći integral dat sa

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

(ii) Diferencijalna jednadžba oblika

$$F(x, y') = 0$$

je nepotpuna diferencijalna jednadžba koja se općenito rješava parametrizacijom i to tako da se stavi

$$x = \theta_1(u), \;\; y' = \theta_2(u),$$

pri čemu funkcije θ_1 i θ_2 treba birati tako da je $\theta_1 \in C^1(u_1, u_2)$, $\theta_2 \in C(u_1, u_2)$, $F(\theta_1(u), \theta_2(u)) = 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$.

Iz $dy = y'dx$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu kod koje se promjenljive mogu razdvojiti

$$dy = \theta_2(u)\theta_1'(u)du.$$

Sada jednadžba $F(x, y') = 0$ ima opće rješenje u parametraskom obliku:

$$\begin{cases} x &= \theta_1(u) \\ y &= \int \theta_2(u)\theta_1'(u)du + C, \;\; u \in (u_1, u_2) \end{cases}$$

Cauchyevo rješenje $y = f(x)$ sa početnim uvjetom $f(x_0) = y_0$ određuje se pomoću u_0 i to tako da je $x_0 = \theta_1(u_0)$, a $C = y_0 - \left(\int \theta_2\theta_1' du\right)|_{u=u_0}$. Napomenimo, ukoliko postoji konstanta a takva da je $F(a, \infty) = 0$, onda je funkcija $x = a$ rješenje koje može biti i singularno.

(iii) Diferencijalna jednadžba oblika

$$F(y, y') = 0$$

je nepotpuna diferencijalna jednadžba koja, ukoliko se ne može drugačije riješiti, rješava parametrizacijom

$$y = \theta_1(u), \;\; y' = \theta_2(u).$$

Funkcije θ_1 i θ_2 biramo tako da je $\theta_1 \in C^1(u_1, u_2)$[13], $\theta_2 \in C^2 \in (u_1, u_2)$, $\theta_2 \neq 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$ i $F(\theta_1, \theta_2) = 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$. Iz $dy = y'dx$ dobije se jednadžba

$$\theta_1'(u)du = \theta_2(u)dx$$

koja ima opće rješenje u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x &= \displaystyle\int \frac{\theta_1'}{\theta_2} du + C \\ y &= \theta_1(u). \end{cases}$$

Cauchyev problem se rješava kao i u prethodnom slučaju. Ukoliko postoji konstanta a takva da je $F(a, 0) = 0$, funkcija $y = a$ je rješenje koje može biti singularno.

[13] $C^1(u_1, u_2)$-skup neprekidnih funkcija sa neprekidnim prvim izvodom na (u_1, u_2).

(iv) Ako jednadžbu $F(x,y,y')=0$ možemo riješiti po nepoznatoj funkciji y, tj. ako je
$$y=f(x,y'),$$
pri čemu je funkcija $f(x,y')$ definirana i neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda u oblasti promjenljivih x i y'. Uvedemo parametar $u=y'$, tada jednadžba postaje $y=f(x,u)$. Budući da je $dy=udx$, onda je
$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}du=udx,$$
$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\frac{du}{dx}=u-\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}. \tag{1.95}$$
Ako je rješenje prethodne jednadžbe $u=\phi(x),\ x\in(a,b)$, onda je funkcija $y=f(x,\phi(x)),\ x\in(a,b)$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y=f(x,y')$. Ovo se jednostavno provjeri diferenciranjem. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (1.95) je dato u parametarskom obliku
$$\begin{cases} x &= \psi(u) \\ y &= f(\psi(u),u), \quad u\in(u_1,u_2) \end{cases}$$

(v) Ako diferencijalnu jednadžbu $F(x,y,y')=0$ možemo riješiti po x, tj. $x=f(y,y')$, onda koristeći prethodnu parametrizaciju dobivamo jednadžbu $x=f(y,u)$. Iz $dx=\frac{1}{u}dy$ imamo jednadžbu koja se može riješiti po prvom izvodu.

Primjer 1.5.1. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*
$$9y'^2-4x=0.$$

Rješenje. Oblast definiranosti ove diferencijalne jednadžbe je skup $\{(x,y): x\geq 0\}$. Ovu jednadžbu možemo riješiti po x te dobivamo da je $x=\left(9y'^2\right)/4$. Uvođenjem smjene $y'=u,\ u=u(x)$ možemo je napisati u obliku $x=\left(9u^2\right)/4$. Uzimajući diferencijal lijeve i desne strane, dobivamo da je
$$dx=\frac{9}{4}\cdot 2udu=\frac{9}{2}udu.$$
Kako je $dy=udx$, zadnji izraz možemo napisati kao
$$\frac{dy}{u}=\frac{9}{2}udu \text{ ili } dy=\frac{9}{2}u^2du.$$
Integrirajući obje strane dobijemo da je $y=\frac{3}{2}u^3+C$, gdje je C proizvoljna konstanta. Na osnovu ovog imamo da je opće rješenje dato u parametarskom obliku
$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}u^3+C, \\ x=\dfrac{9}{4}u^2. \end{cases}$$

Ako iz druge jednadžbe izračunamo u, dobivamo da je $u = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo da je opće rješenje dato sa $y = \pm\frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$. ♦

Primjer 1.5.2. *Integrirati diferencijalnu jednadžbu*

$$y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy' = 0.$$

Rješenje. Ovu jednadžbu možemo napisati u ekvivalentnom obliku $(y'^2 - 4y)(y' - x) = 0$. Jednadžba $y' = x$ ima rješenje dato sa $y = \frac{x^2}{2} + C$. Jednadžba $y'^2 = 4y \quad (y \geq 0)$, je ekvivalentna sa $y' = \pm 2\sqrt{y}$ te joj je rješenje dato sa $y = (\pm x + C)^2$. Dakle, opće rješenje polazne jedandžbe je dato sa

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)\left(y - (x + C)^2\right)\left(y - (-x + C)^2\right) = 0.$$

♦

Primjer 1.5.3. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$e^{y'} + y' = x.$$

Rješenje. Ova jednadžba je rješiva po x pa uvedimo smjenu $y' = u$, odakle slijedi da je $x = e^u + u$. Diferenciranjem obje strane zadnje jednadžbe, koristeći činjenicu da je $dy = udx$, dobivamo da je $dy = u(e^u + 1)du$. Integrirajući obje strane ove jednadžbe dobijemo da je

$$y = (u - 1)e^u + \frac{u^2}{2} + C.$$

Odavde slijedi da je opće rješenje polazne jednadžbe dato u parametarskom obliku

$$\begin{cases} y = (u - 1)e^u + \frac{u^2}{2} + C, \\ x = e^u + u. \end{cases}$$

♦

Primjer 1.5.4. *Integrirati diferencijalnu jednadžbu $y = y'^2 e^{y'}$ i ispitati da li ima singularnih rješenja.*

Rješenje. Uvedimo smjenu $y' = u$, dobivamo da je $y = u^2 e^u$. Kako je $dy = udx$, imamo da je $u\left(2e^u + ue^u\right)du = udx$. Za $u \neq 0$ rješenje ove jednadžbe je $x = 2e^u + (u - 1)e^u + C$, odakle slijedi da je opće rješenje polazne jednadžbe dato u parametarskom obliku

$$\begin{cases} y = u^2 e^u, \\ x = 2e^u + (u - 1)e^u + C. \end{cases}$$

Ako jednadžba ima singularno rješenje, tada je to prava $y = b$ pri čemu je $F(b, 0) = 0$, gdje je $F(y, y') = y - y'^2 e^{y'}$. Očigledno je $b = 0$ rješenje ove jednadžbe, te se jednostavno vidi da je prava $y \equiv 0$ singularno rješenje koje sa može dobiti i za $u = 0$. ♦

Primjer 1.5.5. *Naći rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$2y = 2x^2 + 4xy' + y'^2.$$

Rješenje. Neka je $y' = u$, $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija, tada jednadžbu možemo napisati u obliku $2y = 2x^2 + 4xu + u^2$. Diferenciranjem obje strane ove jednadžbe, kako je $dy = udx$, dobivamo da je

$$2xdx + udx + 2xdu + udu = 0 \Leftrightarrow (2x + u)(dx + du) = 0.$$

Pretpostavimo da je $dx + du = 0$. Na osnovu ovog dobivamo da je $u = -x + C$. Uvrštavajući to u $2y = 2x^2 + 4xu + u^2$, dobivamo da je $y = C^2 - \frac{u^2}{2}$, pa je opće rješenje dato sa

$$\begin{cases} y = C^2 - \frac{u^2}{2}, \\ x = -u + C. \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $2x + u = 0$. Dakle, $2x + y' = 0$ tj. $y = -x^2 + C$, gdje je C konstanta koju treba odrediti tako da $y = -x^2 + C$ bude rješenje polazne jednadžbe. Jednostavno se uvrštavanjem dobije da je $C = 0$, pa je $y = -x^2$ rješenje polazne jednažbe koje se ne može dobiti iz općeg rješenja niti za jednu vrijednost parametra C, tj. to je singularno rješenje. ♦

Primjer 1.5.6. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x^2(y - xy') = yy'^2,$$

te ispitati postojanje singularnih rješenja.

Rješenje. Jednadžbu možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$y = \frac{x^3y'}{x^2 - y'^2}, \quad y' \neq \pm x.$$

Stavimo da je $y' = u$, tada jednadžba postaje $y = \frac{x^3u}{x^2-u^2}$. Uzimajući diferencijal lijeve i desne strane, koristeći činjenicu da je $dy = udx$, imamo

$$dy = udx = \frac{3x^2u(x^2 - u^2) - 2x(x^3u)}{(x^2 - u^2)^2}dx + \frac{x^3(x^2 - u^2) + 2u(x^3u)}{(x^2 - u^2)^2}du,$$

što se poslije sređivanja svodi na

$$u^3(u^2 + x^2)dx = x^3(x^2 + u^2)du \Leftrightarrow u^3dx = x^3du.$$

Za $u \neq 0$ i $x \neq 0$ imamo da je $\frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{u^3}du$. Integrirajući ovu jednadžbu dobivamo da je

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2} + C \Rightarrow \frac{1}{u^2} = \frac{1 - x^2C}{x^2}.$$

Odnosno, imamo da je

$$u = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2C}} \text{ za } 1 - x^2C > 0.$$

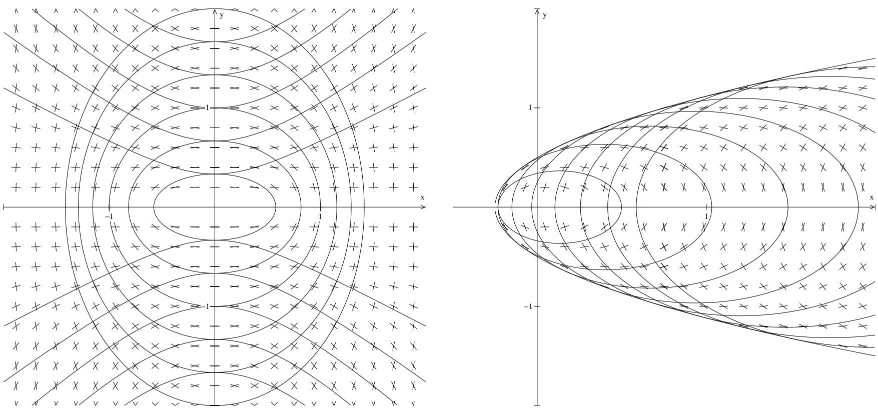
Odavde slijedi da je

$$y = \frac{\pm x^3\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2C}}}{x^2 - \frac{x^2}{1-x^2C}} = \frac{\pm x^3|x|(1-x^2C)}{-x^4C\sqrt{1-x^2C}} = \frac{\pm\sqrt{1-x^2C}}{C},$$

što je ekvivalentno sa $y^2C^2 = 1 - x^2C$, pa je to i opće rješenje polazne jednadžbe.

Za $y' = \pm x$ je $y = \pm\frac{x^2}{2} + C$, uvrštavanjem se vidi da to nije rješenje polazne jednadžbe.

Ako je $u = 0$ tada je $y' = 0$, pa se lako vidi da je u tom slučaju jedino rješenje $y \equiv 0$, koje se može dobiti iz općeg rješenja za $C = \infty$, pa slijedi da jednadžba nema singularnih rješenja (Slika 1.18 (a)). ♦



(a) (b)

Slika 1.18: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $x^2(y - xy') = yy'^2$ i (b) $y^2(1 + y'^2) = a(x + yy')$ za $a = 1$.

Primjer 1.5.7. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y^2(1 + y'^2) = a(x + yy').$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $y^2 = z,\ z = z(x)$. Tada je $2yy' = z'$, tj. $y' = \dfrac{z'}{2y} = \dfrac{z'}{\pm 2\sqrt{z}}$. Uvrštavanjem ove smjene u polaznu jednadžbu dobijemo $z = ax + \frac{a}{2}z' -$

$\frac{z'^2}{4}$. Uvedimo sada smjenu $z' = u$. Tada je $z = ax + \frac{a}{2}u - \frac{u^2}{4}$. Kako je $dz = udx$, to diferenciranjem lijeve i desne strane dobivamo da je

$$(a-u)dx = -\frac{1}{2}(a-u)du.$$

Za $a \neq u$ to je ekvivalentno sa $dx = -\frac{1}{2}du$. Integriranjem ove jednadžbe dobivamo da je

$$x = -\frac{1}{2}u + C \Rightarrow u = 2C - 2x,$$

odakle slijedi da je

$$\begin{aligned} z =& ax + \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot (C-x) - \frac{4 \cdot (C-x)^2}{4} \\ =& aC - (C-x)^2, \end{aligned}$$

tj. opće rješenje je dato sa $y^2 + (C-x)^2 = aC$. Ako je $u = a \Rightarrow z' = a \Rightarrow z = ax + C_1$. Lako se vidi, uvrštavanjem, da je ovo rješenje samo ako je $C_1 = \frac{a^2}{4}$, pa je $y = \pm\sqrt{ax + \dfrac{a^2}{4}}$ rješenje koje se ne može dobiti iz općeg ni za jednu vrijednost parametra C. Jednostavno se vidi da je to obvojnica familje integralnih krivih općeg rješenja, zato je to singularno rješenje (Slika 1.18 (b)). ♦

Primjer 1.5.8. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y(y' + 2y)^2 + y + y' = 0.$$

Rješenje. Uvedimo parametar u tako da je $y' + 2y = u$. Na osnovu toga imamo da je $y' = u - 2y$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobijemo $y = \frac{u}{1-u^2}$ za $u \neq \pm 1$, odakle slijedi $y' = u - 2y = \frac{u(1+u^2)}{u^2-1}$, $\quad u \neq \pm 1$. Kako je $dy = y'dx$, to imamo da je

$$\begin{aligned} d\left(\frac{u}{1-u^2}\right) =& \frac{u(1+u^2)}{u^2-1}dx \\ \frac{1-u^2+2u^2}{(1-u^2)^2}du =& \frac{u(1+u^2)}{u^2-1}dx \Rightarrow \\ dx =& \frac{du}{u(u^2-1)} \end{aligned}$$

odakle, integriranjem zadnje jednadžbe, dobivamo da je

$$x = \int \frac{du}{u(u^2-1)}du = \frac{1}{2}\ln|u^2-1| - \ln|u| + \ln|C| = \ln\left(\frac{|C|\sqrt{|u^2-1|}}{|u|}\right),$$

za $C \neq 0$. Opće rješenje je dato u parametarskom obliku

$$\begin{cases} y = \frac{u}{1-u^2}, \\ x = \ln\left(\frac{|C|\sqrt{|u^2-1|}}{|u|}\right). \end{cases}$$

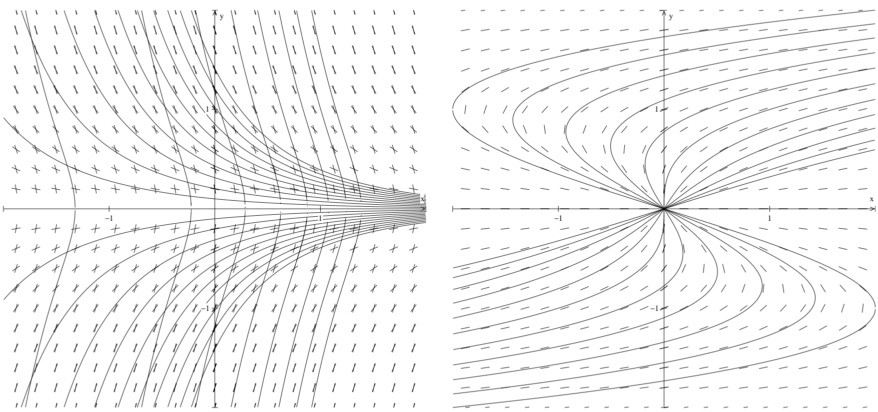
Oslobodimo se sad parametra u. Iz druge jednadžbe je

$$e^x = \frac{|C|\sqrt{|u^2-1|}}{|u|} \Leftrightarrow u^2e^{2x} = \frac{C^2|u|}{|y|}.$$

Kako je $u^2 = \dfrac{y-u}{y}$, iz posljednje jednadžbe dobivamo da je $(y-u)e^{2x} = C^2|u|sgn(y)$. Iz prve jednadžbe dobivamo da je $u = \frac{-1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2y}$, pa je opće rješenje dato sa

$$\left(y - \frac{-1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2y}\right)e^{2x} = C^2\left|\frac{-1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2y}\right| sgn(y), \quad y \neq 0.$$

Ako je $u = \pm 1$ može se vidjeti da rješenja diferencijalne jednadžbe $y' + 2y = \pm 1$ nisu i rješenja polazne jednadžbe. Ako je $u = 0$, tada je rješenje jednadžbe $y' + 2y = 0$ dato sa $y = C_1e^{-2x}$, pa samo za $C_1 = 0$ imamo da je to rješenje polazne jednadžbe, koje se može dobiti iz općeg rješenja za $C = 0$, te je ono partikularno rješenje (Slika 1.19 (a)). ♦



(a) (b)

Slika 1.19: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $y(y'+2y)^2 + y + y' = 0$ i (b) $(x+2y^3)y' = y = 0$.

Primjer 1.5.9. *Integrirati diferencijalnu jednadžbu*

$$(x+2y^3)y' = y.$$

Rješenje. Očigledno je prava $y \equiv 0$ rješenje polazne jednadžbe. Pored toga imamo da je $x = \dfrac{y-2y^3y'}{y'}$. Uvedimo smjenu $y' = u$. Tada je $x = \dfrac{y-2y^3u}{u} =$

$\frac{y}{u} - 2y^3$. Kako je $dy = udx$, dobivamo da je

$$dy = ud\left(\frac{y}{u} - 2y^3\right) = u\left(\frac{1}{u}dy - \frac{y}{u^2}du - 6y^2udy\right),$$

što poslije sređivanja daje jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim $\frac{du}{u^2} = -6ydy$, čije je rješenje $\frac{1}{u} = 3y^2 + C$. Na osnovu ovog imamo da je $x = \frac{y}{u} - 2y^3 = y(3y^2 + C) - 2y^3$. Dakle, opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$x = y^3 + yC \text{ (Slika 1.19 (b))} .$$

♦

Primjer 1.5.10. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0.$$

Rješenje. Uvedimo parametar u tako da je $y' = ux$. Tada je $x^3 + u^3x^3 - 3ux^2 = 0$, odakle je je $x = \frac{3u}{1+u^3}$. Na osnovu tog je $y' = \frac{3u^2}{1+u^3}$. Kako je $dy = y'dx$, to je

$$\begin{aligned} dy &= \frac{3u^2}{1+u^3} \cdot \frac{3(1+u^3) - 9u^3}{(1+u^2)^2}du = \frac{9(1-u^3)u^2}{(1+u^2)^2}du,\\ y &= \int \frac{9(1-u^3)u^2}{(1+u^2)^2}du + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4u^3}{(1+u^2)^2} + C. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje je dato u parametarskom obliku

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4u^3}{(1+u^2)^2} + C, \\ x = \frac{3u}{1+u^3}. \end{cases}$$

♦

1.5.2 Lagrangeova i Clairautova diferencijalne jednadžba

Ove dvije jednadžbe su specijalni slučajevi diferencijalne jednadžbe $F(x, y, y') = 0$, ali ih posebno radimo zbog nekih njihovih osobina.
Diferencijalna jednadžba oblika

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1.96}$$

u kojoj je $\varphi(y') \neq y'$ naziva se *Lagrangeova diferencijalna jednadžba.*
Ako su φ, $\psi \in C^1(u_1, u_2)$, pomoću parametra $y' = u$ dobiva se

$$[\varphi(u) - u]dx + [\varphi'(u)x + \psi'(u)]du = 0.$$

Ako je $\varphi(u) - u \neq u$ za svako $u \in (u_1, u_2)$, linearna diferencijalna jednadžba

$$x' + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - u} x = -\frac{\psi'(u)}{\varphi(u) - u}$$

ima opće rješenje oblika

$$x(u) = CA(u) + B(u),$$

gdje su $A(u)$ i $B(u)$ odgovarajuće funkcije, pa je opće rješenje Lagrangeove diferencijalne jednadžbe dato sa

$$\begin{cases} x &= CA(u) + B(u) \\ y &= \varphi(u)[CA(u) + B(u)] + \psi(u), \ u \in (u_1, u_2). \end{cases}$$

Ako je u_0 rješenje jednadžbe $\varphi(u) - u = 0$, onda funkcija $y = u_0 x + \varphi(u_0)$ je rješenje Lagrangeove diferencijalne jednadžbe koje može biti i singularno.

Diferencijalna jednadžba oblika

$$y = xy' + \psi(y') \tag{1.97}$$

se naziva *Clairautova diferencijalna jednadžba.*

Ako je funkcija $\psi(u)$ definirana na intervalu (u_1, u_2), onda je opće rješenje Clairautove diferencijalne jednadžbe dato sa

$$y = Cx + \psi(C),$$

što je jednoparametarska familija pravih, $C \in (u_1, u_2)$. Clairatuova diferencijalna jednadžba može imati i drugih rješenja. Naime, neka je $\psi \in C^2(u_1, u_2)$ i $\psi''(u) \neq 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$. Uvedimo parametar $y' = u$, pa dobivamo jednadžbu

$$[x + \psi'(u)]du = 0.$$

Ako je $du = 0$, tj. $u = C$, dobivamo opće rješenje. Ako je $x + \psi'(u) = 0$, onda je funkcija

$$\begin{cases} x &= -\psi'(u) \\ y &= -u\psi'(u) + \psi(u), \quad u \in (u_1, u_2), \end{cases} \tag{1.98}$$

rješenje ove jednadžbe, što se može lako provjeriti.

Ovo rješenje je singularno. Naime, uzmimo proizvoljnu tačku (x_0, y_0) integralne krive rješenja (1.98). Postoji u_0, jedinstveno, zbog uvjeta $\psi''(u) \neq 0$ za svako $u \in (u_1, u_2)$, tako da je $x_0 = -\psi'(u_0)$ i $y_0 = -u_0\psi'(u_0) + \psi(u_0)$. Iz familije $y = Cx + \psi(C)$ odredimo konstantu C tako da odgovarajuća prava prolazi tačkom (x_0, y_0). Budući da je $Cx_0 + \psi(C) = x_0 u_0 + \psi(u_0) = y_0$, pa je $C = u_0$, sada je jednadžba tražene prave $y = u_0 x + \psi(u_0)$. Ova prava je tangenta integralne krive (1.98) u tački (x_0, y_0), jer je

$$\frac{dy(x_0, y_0)}{dx} = \frac{y'(u)du}{x'(u)du}\bigg|_{u=u_0} = u_0.$$

Dakle, svakom tačkom integralne krive rješenja (1.98) prolazi neka prava iz familije $y = Cx + \psi(C)$ koja je njena tangenta u toj tački, tj. integralna kriva (1.98) je obvojnica famlije pravih $y = Cx + \psi(C)$, pa je singularna integralna kriva.

Budući da je singularna integralna kriva diskriminantna kriva familije funkcija $y = Cx + \psi(C)$, onda se singularno rješenje Clairautove diferencijalne jednadžbe dobiva eliminacijom parametra C iz sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} y &= Cx + \psi(C) \\ 0 &= x + \psi'(C). \end{aligned}$$

Primjer 1.5.11. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Rješenje. Ovo je Lagrangeova diferencijalna jednadžba. Poslije smjene $y' = u$, imamo da je $y = xu^2 + u^2$. Kako je $dy = y'dx = udx$ to je

$$dy = d(xu^2 + u^2) = udx,$$

tj.

$$u^2dx + (2ux + 2u)du = udx$$

ili

$$(u^2 - u)dx + 2u(x+1)du = 0.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba po x pa je za $u^2 - u \neq 0$

$$\frac{dx}{du} + \frac{2}{u-1}x = \frac{2}{1-u}.$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$x = \frac{C}{(u-1)^2} - 1,$$

pa je $y = xu^2 + u^2 = \frac{Cu^2}{(u-1)^2}$. Opće rješenje je dato u parametarskom obliku

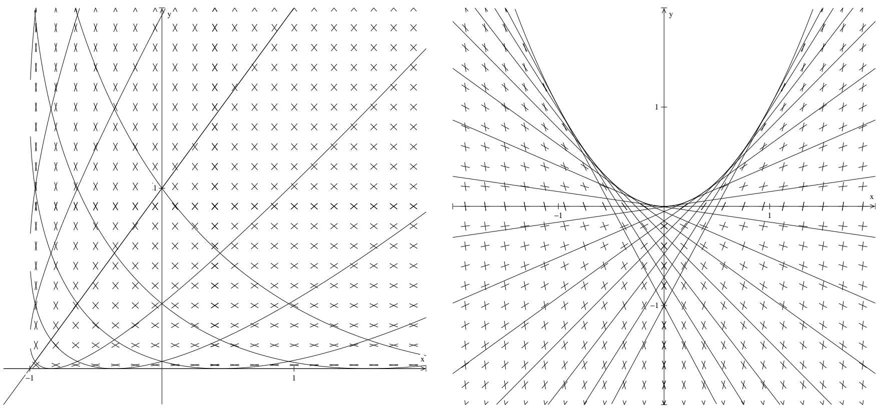
$$\begin{cases} y = \dfrac{Cu^2}{(u-1)^2}, \\ x = \dfrac{C}{(u-1)^2} - 1. \end{cases}$$

Eliminacijom parametra u dobivamo da je opće rješenje u eksplicitnom obliku $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$.

Pretpostavimo sada da je $u^2 - u = 0$, tj. neka je $u = 0$ ili $u = 1$. Iz $y = xu^2 + u^2$ dobivamo da rješenja polazne jednadžbe $y = 0$ i $y = x + 1$. Prvo rješenje je singularno, jer kroz tačku $(x_0, 0)$ za $x_0 \geq -1$ prolazi i integralna kriva $y_1 = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1}\right)^2$ pri čemu je $y_1'(x_0) = 0$. Drugo rješenje se može dobiti iz općeg za $C = 0$, pa je ono partikularno rješenje (Slika 1.20 (a)). ♦

Primjer 1.5.12. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$y = y'x - \frac{1}{4}y'^2.$$



(a) (b)

Slika 1.20: Polje pravaca i neke integralne krive diferencijalnih jednadžbi (a) $y = xy'^2 + y'^2$ i (b) $y = y'x - \frac{1}{4}y'^2$.

Rješenje. Ovo je Clairautova diferencijalna jednadžba, pa je opće rješenje dato sa $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$. Kako je $\psi(C) = -\frac{1}{4}C^2$, to je $\psi''(C) = -\frac{1}{2} \neq 0$, pa singularna rješenja dobivamo eliminacijom parametra C iz sistema

$$\begin{aligned} y &= Cx - \frac{1}{4}C^2, \\ 0 &= x - \frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

Dakle, dobivamo da je $y = x^2$ singularno rješenje polazne jednadžbe (Slika 1.20 (b)). ♦

1.6 Razni zadaci za samostalan rad

1. Riješiti diferencijalnu jedandžbu

$$2y\sqrt{by - y^2}dx - (b^2 + x^2)dy = 0,\ b > 0,$$

zatim naći ono rješenje koje polazi tačkom $(0, b)$.

Uputa. Oblast definiranosti jednadžbe je $\mathcal{D} = (-\infty, \infty) \times [0, b]$. U oblasti $\mathcal{E} = (-\infty, \infty) \times (0, b)$ jednadžba ima jedinstveno rješenje. Razdvoje se promjenljive, itd. Prave $y = 0$ i $y = b$ su integralne krive ove jednadžbe. Rješenje $y = 0$ je partikularo sadržano u općem za $C = \infty$. Analizirati tačku (x_0, b).

2. Dokazati da svaka integralna kriva diferencijalne jednadžbe $y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$ ima dvije horizontalne asimptote.

   Uputa. Opći integral diferencijalne jednadžbe je $\int \dfrac{dy}{\sqrt[3]{y^2+1}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}} + C$ i on se ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija. Egzistencija horizontalne asimptote se može pokazati tako da se posmatra Cauchyevo rješenje
$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt[3]{t^2+1}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}.$$
   Integral na lijevoj strani je divergentan kad $y \to \infty$, a integral na desnoj strani je konvergentan kad $x \to \infty$. Dakle, postoji konačna vrijednost $b > 0$, tako da je
$$\lim_{y\to b} \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}},$$
   Slično se pokaže i egzistencija horizontalne asimptote $y = -b$ kad $x \to \infty$.

3. Odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe $x^2 dy = (1 + \cos 2y)dx$ koje teži $\frac{5\pi}{4}$, $x \to \infty$.

4. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$. Koliko rješenja prolazi tačkom $(1, 1)$?

   Uputa: Diferencijalna jednadžba se sastoji od dvije homogene jednadžbe
$$y' = \frac{x}{y} \pm \sqrt{2}\sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}.$$
   Zatim naći oblast definiranosti jedandžbe itd.

5. Riješiti jednadžbu $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$.

6. Riješiti jednadžbu $(2y - 3x + 1)^2 y' - (3x - 2y - 4)^2 = 0$.

7. Tangenta i normala u proizvoljnoj tački M neke krive sijeku $x-$osu u tačkama A i B. Odrediti jednadžbu krive ako je $\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2$.

8. Dokazati da integralne krive diferencijalne jednadžbe $xy' = -6xe^{\frac{y}{x}-2} + x + y$ sijeku pravu $y = 2x$ pod uglom $\dfrac{\pi}{4}$. Ovaj zadatak riješiti u općem slučaju.

9. Odrediti rješenje jednadžbe $y' \sin x - y \cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ koje teži nuli kada $x \to \infty$.

10. Riješiti jednadžbu $(x^2 - 5x + 6)y' + 3xy - 8y + x^2 = 0$.

11. Pogodnom smjenom svesti jednadžbu $yy' \sin^2 x + y^2 \cos x \sin x = 1$ na linearnu, pa je riješiti.

12. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(2x^2y^3 + x^2y^2 - 2x)y' = 2y + 1$.

13. Pogodnom smjenom tranformirati jednadžbu $y' \cos y - \cos x \sin^2 y - \sin y = 0$ na Bernoullievu i riješiti je.

14. Normala u proizvoljnoj tački krive odsijeca na $x-$osi odsječak čija je dužina jednaka radijusu vektora te tačke. Odrediti jednadžbu krive ako ona prolazi tačkom $(0, 3)$.

15. Odrediti jednadžbu krive čija tangenta u tački $M(x, y)$ odsijeca na $y-$osi odsječak dužine $b = \left| \dfrac{ay^3}{2x(1 + a^2x^2)} \right|$.

16. Odrediti rješenje jednadžbe $xy' - x(y-x)\sqrt{y^2 - x^2} = 0$ koje prolazi tačkom $(-2, 2)$.

17. Riješiti jednadžbu $(x^3 - 2xy^2)dx + 3x^2ydy = xdy - ydx$.

18. Za Riccatievu jednadžbu dokazati:

    (i) Ako su poznata dva partikularna integrala definirana na istom intervalu, onda se opće rješenje dobije pomoću jedne integracije.

    (ii) Ako su poznata tri partikularna integrala definirana na istom intervalu, onda se opće rješenje dobije bez integracije.

    (iii) Za bilo koja četiri partikularna rješenja $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, definirana na istom intervalu (a, b), za svako $x \in (a, b)$ vrijedi

    $$\frac{\varphi_4(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_4(x) - \varphi_2(x)} : \frac{\varphi_3(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_3(x) - \varphi_2(x)} = const.$$

    (iv) Tri partikularna integrala definirana na (a, b) na jedinstven način određuju Riccatievu jednadžbu.

19. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0$. Koja rješenja imaju kosu asimptotu? Odrediti rješenje koje prolazi tačkom $(2, 3)$.

20. Odrediti opće rješenje Riccatieve diferencijalne jednadžbe

    $$y' = f(x)(y^2 + 1) + \cosh\left(\frac{1}{\sinh} - 2f(x)\right)y - \frac{1}{\sinh x}, \quad f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

    ako ima dva partikularna integrala čiji je produkt jednak 1.

21. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$.

22. Pokazati da se diferencijalna jednadžba

$$y' = \frac{y - x^2\sqrt{x^2 - y^2}}{xy\sqrt{x^2 - y^2} + x}$$

smjenom $y = zx$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, svodi na diferencijalnu jednadžbu totalnog diferencijala. Odrediti opće rješenje, kao i rješenje koje prolazi tačkom $(1, 1)$.

23. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0$, ako je poznato da ima integracioni faktor $\mu(x^2 - y)$. Odrediti oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja.

24. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(2x^2y + x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$.

25. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $(xy^4 + 2x^2y^3 + 2y + x)y' + y^5 + y = 0, \ \ \mu = \mu(xy^3)$.

26. Odrediti parametre λ i μ tako da diferencijalna jednadžba

$$\frac{1}{x}(\lambda x^2 - y^2)dx + (\mu x + 2\lambda y)dy = 0$$

ima integracioni faktor $\frac{1}{x^2+y^2}$. Za tako dobivene parametre odrediti partikularno rješenje $\varphi(x)$ koje zadovoljava uvjet $\varphi(a) = 0, \ a > 0$.

27. Odrediti dva integraciona faktora diferencijalne jednadžbe $(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^2(y^2 - 2) = 0$.

28. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y'^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$. Odrediti ono rješenje koje prolazi tačkom $(0, 1)$.

29. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.

30. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y^3 + y'^3 - 3ayy' = 0, \ a \neq 0$. (Uvede se parametar u tako da je $y'u = y$.)

31. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y'^4 - 4y(xy' - 2y)^2 = 0$.

32. Odrediti sva rješenja koja prolaze tačkom $(1, 1)$ diferencijalne jednadžbe $y'^3 - \frac{3}{2}y'^2 = (y - x)^2$.

33. Ako diferencijalna jednadžba $(x^2 - 4)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0$ ima singularno rješenje, odrediti familiju integralnih krivih čija je obvojnica singularna integralna kriva.

34. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$yy'^2 + axy' + by = 0, \ \ a \neq 0, \ b \neq 0.$$

35. Odrediti jednadžbu ortogonalnih trajektorija familije krivih $y \ln y' + x = \frac{x}{y'}$.

36. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $xy'^2 + 2yy' - x = 0$.

37. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y = xy'^2 + (y' - 1)^4$.

38. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$(3x + 1)y'^2 - 3(y + 2)y' + 9 = 0.$$

Odrediti sva rješenja koja prolaze koordinatnim početkom.

39. Odrediti jednadžbu krive tako da je produkt rastojanja dviju datih tačaka od tangente u proizvoljnoj tački krive konstantan i jednak b^2.

40. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singulanih rješenja:

    (i) $x\sqrt{1-y}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$;
    (ii) $y^2dx + (x\sqrt{y^2-x^2} - xy)dy = 0$;
    (iii) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
    (iv) $y' + y^2 = ax + b$;
    (v) $y' + y^2 + ax^m = 0$.

41. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

    (i) $y' + y^2 - 2x^2y + x^4 - 2x - 1 = 0$;
    (ii) $y' - y^2 - xy - x + 1 = 0$;
    (iii) $y' + x^{-a-1}y^2 = x^a, \quad x > 0$;
    (iv) $y' = \frac{y - x^2\sqrt{x^2-y^2}}{xy\sqrt{x^2-y^2} + x}$;
    (v) $y' - e^{x-y} + e^x = 0$;
    (vi) $xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0$;
    (vii) $(x + 1)y' + y(y - x) = 0$.

42. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

    (i) $(x^2 + 1)y' + x \sin y \cos y - x(x^2 + 1) \cos^2 y = 0$;
    (ii) $2yy' - xy^2 - x^3 = 0$;
    (iii) $(4y - 3x - 5)y' - 3y + 7x + 2 = 0$;
    (iv) $x(2y - x - 1)y' + y(2x - y - 1) = 0$;
    (v) $(2x^2y + x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$;
    (vi) $(y^2 + x^2 + x)y' - y = 0$;

43. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $x(y^2 - 3x)y' + 2y^3 - 5xy = 0$;
(ii) $(6xy^2 + x^2)y' - y(3y^2 - x) = 0$;
(iii) $2y^3 + 5x^2y)y' + 5xy^2 + x^3 = 0$;
(iv) $(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^2(y^2 - 2) = 0$;
(v) $(2x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^2y - x)y' - x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}} + xy^2 - y = 0$;

44. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $y'^2 - 2y' - y^2 = 0$;
(ii) $y'^2 - (x+1)y' + y = 0$;
(iii) $y'^2 + ax^3y' - 2ax^2y = 0$;
(iv) $xy'^2 + yy' + x^3 = 0$;
(v) $(x+1)y'^2 - (y+x)y' + y = 0$;
(vi) $x^2y'^2 - (2xy + a)y' + y^2 = 0$;
(vii) $x^2y'^2 + (x^2y - 2xy + x^3)y' + (y^2 - x^2y)(1-x) = 0$.

45. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $(y'^2 + 1)\sin^2(xy' - y) = 1$;
(ii) $y'^2 - 2x\sqrt{y}y' + 4y\sqrt{y}$.

46. Odrediti jednadžbu krive čija tangenta u proizvoljnoj tački gradi sa koordinatnim osama trougao površine $2a^2$.

47. Odrediti jednadžbu ortogonalnih trajektorija familije integralnih krivih diferencijalne jednadžbe $y \ln y' + x = \dfrac{x}{y'}$.

48. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$. Odrediti rješenje koje prolazi tačkom $(x_0, 2x_0)$.

49. Metodom sukcesivnih aproksimacija naći rješenje Cauchyevog problema $y' = x + y,\ y(0) = 0$, u oblasti $\mathcal{D} = \{(x,y) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$, procijeniti grešku aproksimacije i odrediti rješenje koje se ne može produžiti.

50. Neka je

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0,\ -\infty < y < +\infty, \\ 2x, & 0 < x \le 1,\ -\infty < y < 0, \\ \frac{2x-4y}{x}, & 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le x^2, \\ -2x, & 0 < x \le 1,\ x^2 < y < +\infty \end{cases}$$

Dokazati da Cauchyev problem $y' = f(x,y),\ y(0) = 0$, ima rješenje, ali da niz iteracija ne konvergira ni na kom segmentnu $[0,\varepsilon]$, $0 < \varepsilon \le 1$.

51. Normala u proizvoljnoj tački krive odsijeca na $x-$osi odsječak čija je dužina jednaka kvadratu radijus vektora te tačke. Odrediti jednadžbu krive ako ona prolazi tačkom $(0,3)$.

52. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singulanih rješenja:

(i) $x\sqrt{1-y}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$;

(ii) $y^2dx + (x\sqrt{y^2-x^2} - xy)dy = 0$;

(iii) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

(iv) $y' + y^2 = ax + b$;

(v) $y' + y^2 + ax^m = 0$.

53. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $y' + y^2 - 2x^2y + x^4 - 2x - 1 = 0$;

(ii) $y' - y^2 - xy - x + 1 = 0$;

(iii) $y' + x^{-a-1}y^2 = x^a, \ \ x > 0$;

(iv) $y' = \dfrac{y - x^2\sqrt{x^2-y^2}}{xy\sqrt{x^2-y^2}+x}$;

(v) $y' - e^{x-y} + e^x = 0$;

(vi) $xy' - xy^2 - (2x^2+1)y - x^3 = 0$;

(vii) $(x+1)y' + y(y-x) = 0$.

54. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $(x^2+1)y' + x\sin y\cos y - x(x^2+1)\cos^2 y = 0$;

(ii) $2yy' - xy^2 - x^3 = 0$;

(iii) $(4y - 3x - 5)y' - 3y + 7x + 2 = 0$;

(iv) $x(2y - x - 1)y' + y(2x - y - 1) = 0$;

(v) $(2x^2y + x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$;

(vi) $(y^2 + x^2 + x)y' - y = 0$.

55. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $x(y^2 - 3x)y' + 2y^3 - 5xy = 0$;

(ii) $(6xy^2 + x^2)y' - y(3y^2 - x) = 0$;

(iii) $2y^3 + 5x^2y)y' + 5xy^2 + x^3 = 0$;

(iv) $(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^2(y^2 - 2) = 0$;

(v) $(2x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} + x^2y - x)y' - x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}} + xy^2 - y = 0$.

56. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $y'^2 - 2y' - y^2 = 0$;

(ii) $y'^2 - (x+1)y' + y = 0$;

(iii) $y'^2 + ax^3y' - 2ax^2y = 0$;

(iv) $xy'^2 + yy' + x^3 = 0;$

(v) $(x+1)y'^2 - (y+x)y' + y = 0;$

(vi) $x^2y'^2 - (2xy + a)y' + y^2 = 0;$

(vii) $x^2y'^2 + (x^2y - 2xy + x^3)y' + (y^2 - x^2y)(1-x) = 0.$

57. Riješiti diferencijalne jednadžbe i ispitati postojanje singularnih rješenja:

(i) $(y'^2 + 1)\sin^2(xy' - y) = 1;$

(ii) $y'^2 - 2x\sqrt{y}y' + 4y\sqrt{y}.$

Poglavlje 2

Diferencijalne jednadžbe višeg reda

2.1 Opći pojmovi

Diferencijalna jednadžba $n-$tog reda nepoznate funkcije y i nezavisno promjenljive x je data sa

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

gdje je F data funkcija definirana u oblasti $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Ukoliko jednadžbu (2.1) možemo riješiti po najvišem izvodu, tj. ako postoji funkcija f definirana u oblasti $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, tako da je

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu u *normalnom obliku.* Budući da su diferencijalne jednadžbe prvog reda specijalan slučaj diferencijalnih jednadžbi $n-$tog reda, neki pojmovi i rezultati, koje smo formulirali za diferencijalne jednadžbe prvog reda, biće poopćeni na $n-$ti red.

Posmatrat ćemo diferencijalnu jednadžbu (2.2). Prvo ćemo definirati pojam rješenja.

Definicija 2.1.1. *Funkcija $y = \varphi(x)$, definirana na intervalu (a, b)*[1]*, je* ***rješenje diferencijalne jednadžbe*** *(2.2) ako za svako $x \in (a, b)$ vrijedi*

(i) *Postoji $\varphi^{(n)}(x)$;*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{O}$;

(iii) $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$.

[1] Rješenje može biti definirano i na intervalima oblika $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

Iz zahtjeva (*iii*) Definicije 2.1.1 slijedi ako je funkcija $f \in C(\mathcal{O})$, onda $\varphi \in C^{(n)}(a,b)$.

Svakom rješenju diferencijalne jednadžbe (2.2), kao i u slučaju diferencijalne jednadžbe prvog reda, odgovara u ravni xy neka kriva, koju ćemo, kao i ranije, zvati integralnom krivom. Dakle, *integralna kriva* rješenja $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$, diferencijalne jednadžbe (2.2), ili *grafik rješenja*, je geometrijsko mjesto tačaka $\{(x, \varphi(x)) : x \in (a,b)\}$.

Cauchyev problem za diferencijalne jednadžbe (2.2) formulira se na sljedeći način: Za datu tačku $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$ odrediti ono rješenje $y = y(x)$, definirano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava uvjete

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Brojevi $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ nazivaju se *početne* vrijednosti, a uvjet (2.3) *početni uvjet* ili *Cauchyev uvjet*. Problem (2.2)-(2.3) zove se *problem početnih vrijednosti* ili *Cauchyev problem*. Rješenje početnog problema (2.2)-(2.3) postoji ako postoji interval (a,b) kome pripada tačka x_0 i ako postoji funkcija $y = y(x)$, definirana na tom intervalu, koja je rješenje diferencijalne jednadžbe (2.2) i zadovoljava uvjet (2.3). Takvo rješenje, obično, zovemo Cauchyevo rješenje.

U slučaju diferencijalne jednadžbe drugog reda $y'' = f(x, y, y')$ Cauchyev problem se sastoji u nalaženju onog rješenja $y = y(x)$ koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y_0'$. Geometrijski gledano, treba naći takvu integralnu krivu koja prolazi tačkom (x_0, y_0) i ima u toj tački zadani koeficijent pravca tangente. Prilikom razmatranja Cauchyevog problema, kao i kod diferencijalnih jednadžbi prvog reda, tako i kod diferencijalnih jednadžbi $n-$tog reda, postavlja se pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja Cauchyevog problema. Ovdje treba napomenuti da jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema jednadžbe (2.2) ne znači da zadanom tačkom (x_0, y_0) prolazi samo jedna integralna kriva, kao što je to bilo sa diferencijalnom jednadžbom prvog reda koje su se mogle rješiti po prvom izvodu. Na primjer, za diferencijalnu jednadžbu drugog reda $y'' = f(x, y, y')$ jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y_0'$ potrebno je posmatrati u smislu da tačkom (x_0, y_0) prolazi jedinstvena integralna kriva, koja ima osobinu da tangenta na tu krivu u tački (x_0, y_0) zaklapa sa pozitivnim dijelom $x-$ose ugao α_0 čiji tangens je jednak zadanom početnom uvjetu y_0', tj. $\tan \alpha_0 = y_0'$, a u isto vrijeme tačkom (x_0, y_0) prolazi beskonačno mnogo integralnih krivih ali sa drugim koeficijentom pravca u tački (x_0, y_0).

Primjer 2.1.1. *Pokazati da Cauchyev problem*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ima jedinstveno rješenje.

Rješenje. Može se pokazati da data diferencijalna jednadžba ima rješenje $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gdje su C_1, C_2 su proizvoljne konstante. Sada je $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Koristeći početne uvjete dobijemo $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, pa je rješenje početnog problema dato sa $y = \cos x$. Ovo rješenje je jedinstveno, iako tačkom $(0,1)$, osim krive $y = \cos x$, prolazi beskonačno mnogo integralnih krivih $y = \cos x + C_2 \sin x$, gdje je $C_2 \neq 0$. Međutim, tangenta niti jedne od krivih iz ove familije u tački $(0,1)$ ne poklapa sa tangentom krive $y = \cos x$ u tački $(0,1)$. ♦

Familija rješenja jednadžbe (2.2) koja zavisi od n proizvoljnih konstanti C_1, C_2, ..., C_n,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

naziva se općim rješenjem te jednadžbe. Geometrijski ona predstavlja familiju integralnih krivih u ravni xy koja zavisi od n parametara C_1, C_2, ..., C_n, pri čemu je jednadžba te familije riješena po y. U onom što slijedi definirat ćemo opće rješenje jednadžbe (2.2) u oblasti $\mathcal{O}$ promijenljivih $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$. Specijalno ćemo u oblasti $\mathcal{O}$ posmatrati oblast u čijoj svakoj tački Cauchyev problem (2.2)-(2.3) ima jedinstveno rješenje. Tu oblast ćemo označiti sa $\mathcal{E}$ i zvati oblast *egzistencije i jedinstvenosti* rješenja diferencijalne jednadžbe (2.2).

Cauchyev problem (2.2)-(2.3) ima jedinstveno rješenje ako postoji okolina tačke x_0 u kojoj se poklapaju sva rješenja diferencijalne jednadžbe (2.2) koja zadovoljavaju početni uvjet (2.3).

Sada ćemo definirati pojam *općeg rješenja*

Definicija 2.1.2. *Neka je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja diferencijalne jednadžbe (2.2). Funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ definirana u nekoj oblasti $\mathcal{K}$ promjenljivih $x, C_1, \ldots, C_n$ je* ***opće rješenje*** *diferencijalne jednadžbe (2.2), ako vrijedi:*

(i) *$\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ je n puta neprekidno diferencijabilna po x u oblasti $\mathcal{K}$;*

(ii) *sistem jednadžbi*

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, \ldots, C_n) \\ y' &= \varphi'(x, C_1, \ldots, C_n) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

je rješiv po $C_1, C_2, \ldots, C_n$ u oblasti $\mathcal{E}$, tj. $C_i = \psi_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, za svako $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in \mathcal{E}$;

(iii) *Funkcija $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ je rješenje diferencijalne jednadžbe (2.2), za bilo koje vrijednosti $C_1, \ldots, C_n$, pri čemu je $C_i = \psi_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, za svako $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in \mathcal{E}$.*

Iz Definicije 2.1.2 slijedi da je opće rješenje familija rješenja koja zavisi od n parametara $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Kao i kod diferencijalne jednadžbe prvog reda, tako se i ovdje može dokazati da opće rješenje sadrži sva Cauchyeva rješenja u čijim tačkama nije narušena jedinstvenost rješenja.

Za jednadžbu

$$\phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{2.4}$$

kažemo da je *opći integral* diferencijalne jednadžbe (2.2) ako je njome implicitno definirano opće rješenje.

Ako se eliminacijom parametra t iz sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1, \ldots, C_n) \\ y &= \psi(t, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

dobije opće rješenje, onda kažemo da je ovaj sistem definira opće rješenje u *parametarskom obliku.* Rješenje diferencijalne jednadžbe (2.2) je *partikularno* ako se može dobiti iz općeg rješenja za konkretne vrijednosti parametara $C_1, \ldots, C_n$, uključujući i $\pm\infty$. Rješenje diferencijalne jednadžbe (2.2) je *singularno* ako je u svakoj njegovoj tački narušena jedinstvenost rješenja odgovarajućeg Cauchyevog problema. Grafik singularnog rješenja zove se *singularna integralna kriva.* Diferencijalna jednadžba (2.2) može imati familiju singularnih rješenja koja zavisi od najviše $n-1$ parametara.

Kad je u pitanju egzistencija i jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema diferencijalnih jednadžbi višeg reda, vrijede analogni rezultati kao i u slučaju diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Teorem 2.1.1 (Peanov teorem). *Neka je u oblasti $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definirana funkcija $f(x,y,y' \ldots, y^{(n-1)})$ koja je neprekidna na $\mathcal{O}$. Tada za svako $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$ Cauchyev problem* (2.2)-(2.3) *ima bar jedno rješenje. To rješenje je definirano bar na jednom segmentu $[x_0 - h, x_0 + h]$ gdje broj h općenito ne zavisi od $(x_0, y_0, y_0' \ldots, y_0^{(n-1)})$.*

Teorem 2.1.2 (Picardov teorem). *Neka je data jednadžba* (2.2) *i početni uvjeti* (2.3)*. Pretpostavimo da je funkcija $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ definirana u nekoj zatvorenoj i ograničenoj oblasti*

$$\mathcal{R} = \{(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) : \ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b,\ |y' - y_0'| \leq b, \\ \ldots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b\}$$

(a i b su zadani pozitivni brojevi) i zadovoljava u ovoj oblasti sljedeće uvjete:

1. *Funkcija $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ je neprekidna po svim svojim argumentima, pa slijedi da je i ograničena , tj.*

$$|f(x, y, y' \ldots, y^{(n-1)})| \leq M,$$

gdje je M pozitivna konstanta, a $(x, y, y, \ldots, y^{(n-1)})$ proizvoljna tačka iz oblasti $\mathcal{R}$;

2. *Funkcija* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *ima ograničene parcijalne izvode po argumentima* $y, y' \ldots, y^{(n-1)}$, *tj.*

$$\left|\frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}}\right| \leq K, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1; \quad y^{(0)} \equiv y,$$

gdje je K *pozitivna konstanta, a* $(x, y, y, \ldots, y^{(n-1)})$ *proizvoljna tačka iz oblasti* $\mathcal{R}$;

Onda jednadžba (2.2) *ima jedinstveno rješenje*

$$y = y(x),$$

koje zadovoljava početni uvjet (2.3). *Ovo je rješenje definirano i neprekidno, zajedno sa svojim izvodima do reda* n *uključno, u intervalu*

$$|x - x_0| \leq h,$$

gdje je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_{\mathcal{R}}\{M, |y'|, \ldots, |y^{(n-1)}|\}}\right\}.$$

Iz ovog teorema slijedi, *ako je desna strana jednadžbe* (2.2) *polinom po svojim argumentima, onda za bilo koje zadane početne uvjete, postoji jedinstveno rješenje jednadžbe* (2.2) *koje zadovoljava zadane početne uvjete.*

Primjer 2.1.2. *Da li jednadžba*

$$y'' = 2\sqrt{y'}$$

ima singularnih rješenja?

Rješenje. Da bismo riješili ovu jednadžbu, stavimo

$$y' = z, \ z = z(x)$$

gdje je z nova nepoznata funkcija od x. Koristeći ovu smjenu, polazna jednadžba postaje

$$z' = 2\sqrt{z}.$$

Lako se dobije da je opće rješenje ove jednadžbe

$$z = (x + C_1)^2, \quad x > -C_1.$$

Koristeći smjenu, imamo

$$y' = (x + C_1)^2, \quad x > -C_1.$$

Integriranjem ove jednadžbe, dobivamo opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2, \quad x > -C_1.$$

Primijetimo da jednadžba $z' = 2\sqrt{z}$ ima singularno rješenje $z = 0$ (ono je singularno jer se ne može dobiti iz općeg rješenja niti za jednu vrijednost proizvoljnih konstanti C_1 i C_2 uključujući i $\pm\infty$). Koristeći smjenu $y' = z$, dobivamo jednadžbu $y' = 0$. Integriranjem ove jednadžbe dobivamo familiju rješenja

$$y = C.$$

Svako rješenje iz ove familije je singularno, jer se ne može dobiti iz općeg rješenja niti za jednu vrijednost konstanti C_1 i C_2 uključujući $\pm\infty$. ♦

Pojam rješenja za diferencijalnu jednadžbu (2.1) dat je u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.1.3. *Funkcija $\varphi(x)$ definirana na intervalu (a, b) je rješenje diferencijalne jednadžbe (2.1) ako za svako $x \in (a, b)$ vrijedi:*

(i) *Postoji* $\varphi^{(n)}(x)$;

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \mathcal{D}$;

(iii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$

Cauchyev problem za diferencijalne jednadžbe (2.1) se definira isto kao i za diferencijalne jednadžbe u normalnom obliku. Ako za početne vrijednosti $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ jednadžba $F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, z) = 0$ ima samo jedno rješenje $z = y_0^{(n)}$, onda Cauchyev problem ima jedinstveno rješenje.

Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1.3. *Ako su:*

(i) *funkcije* $F, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial y'}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$ *definirane i neprekidne u nekoj okolini tačke* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) \in \mathcal{D}$,

(ii) $F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) = 0,$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) \neq 0,$

onda diferencijalna jednadžba (2.1) ima jedinstveno rješenje $\varphi(x)$, definirano i $n-$puta neprekidno diferencijabilno u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava početne uvjete $\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ i uvjet $\varphi^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$.

Uočimo da za diferencijalnu jednadžbu (2.1), jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema nije narušena ako iste početne uvjete zadovoljavaju rješenja $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ za koje je $\varphi_1^{(n)}(x_0) \neq \varphi_2^{(n)}(x_0)$.

Singularno rješenja zadovoljava uvjete

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Primjer 2.1.3. *Mogu li jednadžbe*

$$y'' = 2x + \sqrt{x^2 - y'} \text{ i } y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$$

imati singularnih rješenja?

Rješenje. Oblast egzistencije rješenja obje jednadžbe je $\mathcal{A} = \{(x, y, y') : x^2 \geq y'\}$. Sada ćemo naći oblast jedinstvenosti rješenja. U tom cilju stavimo

$$F(x, y, y') = 2x + \sqrt{x^2 - y'}.$$

Sada je

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y'}}.$$

F i $\frac{\partial F}{\partial y'}$ su neprekidne funkcije, pa po teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti, oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja je $\mathcal{E} = \{(x, y, y') : x^2 > y'\}$. Ako je $y' = x^2$ onda je $y = \frac{1}{3}x^3 + C$. Primijetimo da ova familija može biti, eventualno, singularno rješenje prve jednadžbe ali ne i druge, jer za drugu jednadžbu ova familija rješenja nije uopće rješenje, pa druga jednadžba nema singularnih rješenja. ⧫

Sada ćemo Primjer 2.1.2 uraditi koristeći gornje uvjete za postojanje singularnog rješenja.

Primjer 2.1.4. Ispitati da li jedandžba $y'' = 2\sqrt{y'}$, čije je opće rješenje dato sa $y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$, može imati singularnih rješenja.

Rješenje. Oblast egzistencije rješenja je $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$. Stavimo

$$F(x, y, y') = 2\sqrt{y'},$$

imamo

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y'}}.$$

Vidimo da je oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja skup $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. Sada ćemo ispitati šta se dešava za $y' = 0$, tj. $y = C$. Uzmimo proizvoljnu tačku (x_0, C_0). Ovom tačkom, pored rješenja $y = C_0$, prolazi i partikularno rješenje $y = \frac{1}{3}(x - x_0)^3 + C_0,\ x \geq x_0$, sa koeficijentom pravca tangente jednakim nuli u toj tački. Dakle, $y = y_0$ je singularno rješenje. ⧫

Primjer 2.1.5. Da li pored date familije rješenja jednadžbe $(y - x)y'' - 2y'(y' + 1) = 0,\ \ y = C_1 + \dfrac{C_2}{x - C_1}$, ima i drugih rješenja.

Rješenje. Stavimo

$$F(x, y, y', y'') = (y - x)y'' - 2y'(y' + 1).$$

Sada posmatrajmo sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'') &= (y - x)y'' - 2y'(y' + 1) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, y', y'')}{\partial y''} &= y - x = 0. \end{aligned}$$

Rješenja ovog sistema su $y' = -1$ i $y' = 0$.

Za $y' = -1$ dobiva se familija rješenja $y = -x + C_3$, koja nije sadržana u prvoj familiji. Za $y' = 0$, familija rješenja $y = C$ je sadržana u prvoj familiji za $C_2 = 0$. ♦

2.2 Neki integrabilni tipovi nelinearnih diferencijalnih jednadžbi višeg reda

Diferencijalne jednadžbe (2.2), (2.1) mogu biti veoma složene, pa je zato jasno da se one općenito ne mogu riješiti. Sada ćemo navesti neke tipove za koje je moguće nekim metodom dobiti rješenje ili bar dobiti diferencijalnu jednadžbu nižeg reda koja se onda možda može riješiti.

a) Najjednostavnija diferencijalna jednadžba $n-$tog reda je jednadžba

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Ako se ona može riješiti po $y^{(n)}$, $y^{(n)} = f(x)$, gdje je f neprekidna funkcija na (a, b), onda se opće rješenje može dobiti uzastopnom integracijom n puta. Zaista, kako je $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$ onda jednadžbu $y^{(n)} = f(x)$ možemo napisati u obliku

$$\left[y^{(n-1)}\right]' = f(x),$$

pa je

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

gdje je C_1 proizvoljna konstanta a x_0 bilo koji fiksan broj iz (a, b). Analognim rezonovanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
y^{(n-2)} &= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx + C_1(x-x_0) + C_2 \\
y^{(n-3)} &= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdxdx + \frac{C_1}{2}(x-x_0)^2 + C_2(x-x_0) + C_3 \\
y' &= \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}}_{(n-1)-\text{puta}} f(x)dxdx...dx + \frac{C_1}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \\
&\quad + \frac{C_2}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} + \frac{C_3}{(n-4)!}(x-x_0)^{n-4} + ... + C_{n-1} \\
y &= \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}}_{n-\text{puta}} f(x)dxdx...dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\
&\quad + \frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + ... + C_{n-1}(x-x_0) + C_n.
\end{aligned}$$

Ova formula sadrži u sebi sva rješenja jednadžbe $y^{(n)} = f(x)$ i daje opće rješenje te jednadžbe u oblasti

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, ..., -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Iz ove formule može se dobiti rješenje za bilo koje početne uvjete

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-2)}(x_0) = y_0^{(n-2)}, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \;\; x_0 \in (a,b).$$

Uvrštavanjem u prethodnu formulu dobivamo vrijednosti za konstante

$$C_1 = y_0^{(n-1)}, C_2 = y_0^{(n-2)}, ..., C_{n-1} = y_0', C_n = y_0.$$

Uvrštavanjem u formulu za y dobivamo Cauchyevo rješenje

$$\begin{aligned}
y &= \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}}_{n-\text{puta}} f(x)dxdx...dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\
&\quad + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \frac{y_0^{(n-3)}}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} + ... + y_0'(x-x_0) + y_0.
\end{aligned}$$

Primjetimo da je funkcija

$$y_1 = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}}_{n-\text{puta}} f(x)dxdx...dx \tag{2.5}$$

rješenje diferencijalne jednadžbe $y^{(n)} = f(x)$ i da je to partikularno rješenje jer se dobije iz općeg rješenja za $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$. Ovo rješenje zadovoljava početne uvjete $y_1(x_0) = 0, y_1'(x_0) = 0, ..., y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$. Ovakvo rješenje ćemo zvati nultim rješenjem. Formula (2.5) sadrži n integracija. Ove integracije možemo zamijeniti sa jednim integralom. Naime, vrijedi sljedeća Cauchyeva formula

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

Zaista, smjenom $u = x, t = x_0, t = u$ imamo

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} f(x) dx dx = \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t) dt = \int_{x_0}^{x} f(t) dt \int_{t}^{x} du = \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t) dt.$$

Slično se dobije da je

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} f(x) dx dx &= \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)(u-t) dt = \\ &= \int_{x_0}^{x} f(t) dt \int_{t}^{x} (u-t) du = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^2 dt, \end{aligned}$$

pa koristeći princip matematičke indukcije dobivamo datu formulu.
Sada opće rješenje možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1} dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\ &+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \frac{y_0^{(n-3)}}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} + ... + y_0'(x-x_0) + y_0, \end{aligned}$$

gdje su $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ proizvoljne konstante.

Ova diferencijalna jednadžba nema sigularnih rješenja. Ako diferencijalnu jednadžbu $F(x, y^{(n)}) = 0$ ne možemo riješiti po $y^{(n)}$, ali je dozvoljena parametrizacija

$$x = \varphi(t), \;\; y^{(n)} = \psi(t), \;\; \varphi \in C^1(t_1, t_2), \; \psi \in C(t_1, t_2)$$

tako da je

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Tada iz

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t)\varphi'(t) dt$$

slijedi

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Sa $n-1$ uzastopnih integracija dobije se opće rješenje u parametraskom obliku

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \;\; t \in (t_1, t_2). \end{aligned}$$

U slučaju kad jednadžbu $F(x, y^{(n)}) = 0$ možemo riješiti po x, tj. $x = \varphi(y^{(n)})$ onda stavimo $y^{(n)} = \psi(t)$ pa je $x = \varphi[\psi(t)]$, $y^{(n)} = \psi(t)$, parametarska reprezentacija jednadžbe $x = \varphi(y^{(n)})$.

Sada ćemo razmotriti nekoliko tipova diferencijalnih jednadžbi kod kojih se može sniziti red.

b) Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \;\; 0 \leq k < n,$$

smjenom $y^{(k)} = z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, se transformira u diferencijalnu jednadžbu $(n-k)-$ tog reda,

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}).$$

Ako je moguće odrediti opće rješenje ono je oblika $z = \omega(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0$. Ako je moguće odrediti opći integral on je $\phi(x, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0$. Tako se dobiju diferencijalne jednadžbe $k-$tog reda

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

odnosno

$$\phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0,$$

koje smo posmatrali u **a).** Dakle, integracijom ovih jednadžbi dobiva se opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe.

c) Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

tj. ako ne sadrži nezavisno promjenljivu, onda se njen red snižava smjenom $y' = z$, uzimajući y za novu nezavisno promjenljivu, a $z = z(y)$ za novu nepoznatu funkciju. Diferenciranjem i zamjenom u odgovarajuće izvode, dobivamo diferencijalnu jednadžbu $(n-1)-$reda,

$$F(y, z, \varphi_1(z, z'), \ldots, \varphi_{n-1}(z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Ako znamo odrediti njeno opće rješenje $z = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$, onda nam ostaje još da riješimo diferencijalnu jednadžbu $y' = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$.

Ako jednadžba $F(b, 0, \ldots, 0) = 0$ ima korijene $b = b_i, \;\; i = 1, 2 \ldots, m$, rješenja ove diferencijalne jednadžbe su i funkcije $y = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m$.

d) Ako je u diferencijalnoj jednadžbi (2.1) funkcija F homogena stepena homogenosti m u odnosu na nepoznatu funkciju i njene izvode, tj.

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

onda se njen red snižava smjenom $y' = yz$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Zaista,

$$\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z') \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}), \end{aligned}$$

onda je

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z), \ldots, y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0,$$

tj.

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z, \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}) \equiv y^m \phi(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Prema tome,

$$\phi(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0 \ \text{ ili } \ y = 0.$$

Ako zadnja diferencijalna jednadžba ima opće rješenje $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$, iz $\frac{y'}{y} = z$, dobivamo opće rješenje polazne jednadžbe, u obliku

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}) dx}.$$

Funkcija $y = 0$ je partikularno rješenje, koje se dobiva iz općeg rješenja za $C_n = 0$.

e) Ako postoje brojevi k i m tako da je

$$F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \ldots, e^{(k-n)t} y^{(n)}) = e^{mt} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

onda se diferencijalna jednadžba (2.1) naziva *poopćena homogena.* Za $x > 0$, parametrizacijom

$$x = e^t, \ \ y = ue^{kt},$$

gdje je t nova nezavisno promjenljiva, a $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija, diferencijalna jednadžba (2.1) se transformira u diferencijalnu jednadžbu koja ne sadrži nezavisno promjenljivu, tj. u jednadžbu tipa **c).**

Ako je $k = 0$, dovoljno je primijeniti transformaciju samo nezavisno promjenljive $x = e^t$.

f) Ako je lijeva strana diferencijalne jednadžbe (2.1) totalni izvod neke funkcije $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, red diferencijalne jednadžbe se snižava za jedan, jer se iz

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

dobiva

$$\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1.$$

Ako diferencijalna jednadžba nije totalnog diferencijala, onda je u nekim slučajevima moguće odrediti funkciju $\mu(x, y, y', \dots, y^{(n)})-$ koja je *integracioni faktor* ove diferencijalne jednadžbe, pa se dobiva diferencijalna jednadžba totalnog diferencijala. Ona može imati rješenja $\mu = 0$, pa treba ispitati da li su to rješenja diferencijalne jednadžbe (2.1). Također, treba ispitati rješenja koja se dobivaju iz uvjeta prekidnosti funkcije μ.

Primjer 2.2.1. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu* $y'' = 6x$, *te odrediti partikularno rješenje za koje je* $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Rješenje. Integriranjem dva puta ove jednadžbe dobivamo da je

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + C_1 \\ y &= x^3 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

pa je $y = x^3 + C_1 x + C_2$ opće rješenje polazne jednadžbe. Iz $y'(0) = 1$ dobivamo da je $C_1 = 1$, a iz $y(0) = 0$, dobivamo da je $C_2 = 0$ pa je traženo partikularno rješenje dato sa $y = x^3 + x$. ♦

Primjer 2.2.2. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$e^{y''} + y'' = x.$$

Rješenje. Uvedimo parametar t stavljajući $y'' = t$ pa je $x = e^t + t$. Kako je $dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt$ to je

$$y' = \int t(e^t + 1)dt + C_1 = (t - 1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Dalje je

$$dy = y'dx = \left[(t - 1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)dt,$$

pa je

$$\begin{aligned} y &= \int \left[(t - 1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)dt + C_2 \\ y &= \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje je dato u parametarskom obliku sa

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \end{cases}$$

♦

Primjer 2.2.3. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$4y' + y''^2 = 4xy''.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $y' = z$. Tada jednadžba postaje $z = xz' - \dfrac{z'^2}{4}$. Ovo je Clairautova diferencijalna jednadžba čije je opće rješenje dato sa $z = xC_1 - \dfrac{C_1^2}{4}$, pa je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$y = \frac{C_1}{2} x \left(x - \frac{C_1}{2}\right) + C_2.$$

Jednostavno se vidi da ova Clairautova diferencijalna jednadžba ima i singularno rješenje dato sa $z = x^2$. Može se lako pokazati da je $y = \dfrac{x^3}{3} + C$ singularno rješenje polazne jednadžbe. ♦

Primjer 2.2.4. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $y' = z$, $(z = z(y))$. Tada je $y'' = \dfrac{dz}{dy} z$, pa polazna diferencijalna jednadžba postaje

$$(1 + y^2)y\frac{dz}{dy} z = (3y^2 - 1)z^2.$$

Pretpostavimo da je $z \neq 0$. Poslije skraćivanja sa z dobivamo jednadžbu

$$(1 + y^2)y\frac{dz}{dy} = (3y^2 - 1)z,$$

koja se svodi na jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2)y} dy.$$

Opći integral ove jednadžbe je:

$$\ln|z| = 2\ln(1 + y^2) - \ln|y| + \ln|C_1|$$

ili

$$\frac{zy}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Kako je $y' = z$ to se polazna jednadžba svodi na diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$\frac{y'y}{(1+y^2)^2} = C_1,$$

sa razdvojenim promjenljivim. Njeno opće rješenje je dato sa

$$\frac{1}{1+y^2} = -2C_1x + C_2.$$

Ako je $z = y' = 0$, tada je $y = C$, pa se lako vidi da je i to rješenje polazne jednadžbe gdje je C proizvoljna konstanta, koje se ne može dobiti ni za jednu vrijednost konstanti C_1 i C_2, pa je ono singularno rješenje. ⧫

Primjer 2.2.5. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

Rješenje. Ovo je homogena diferencijalna jednadžba po funkciji y i njenim izvodima. Uvedimo smjenu $y' = yz$. Tada je $y'' = y(z^2+z')$, pa polazna jednadžba postaje

$$xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Poslije kraćenja sa y^2 dobijemo Bernoullievu diferencijalnu jednadžbu

$$2xz^2 + xz' - z = 0,$$

čije je opće rješenje dato sa

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Zamijenjujući z sa $\dfrac{y'}{y}$ dobivamo jednadžbu sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1},$$

čije je opće rješenje dato sa

$$y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}.$$

Lako se vidi da je rješenje polazne jednadžbe i $y = C$ $(C \neq 0)$. Ovo rješenje nije sadržano u općem rješenju niti za jednu vrijednost konstanti C_1 i C_2, uključujući i $\pm\infty$, pa je ono singularno rješenje. ⧫

Primjer 2.2.6. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x^3y'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0.$$

Rješenje. Ispitajmo da li postoji konstanta k za koju je posmatrana jednadžba poopćena homogena diferencijalna jednadžba. Uzmimo da x, y, y' i y'' imaju stepene homogenosti redom 1, k, $k-1$ i $k-2$. Tada za k treba da vrijedi

$$3+(k-2)=1+k+(k-1)=2+2(k-1)=2k,$$

odakle slijedi da je $k=1$. Zato uvedimo smjenu $x=e^t, \quad y=ue^t$. Tada je

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}e^{-t}=\frac{du}{dt}+u, \quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}e^{-t}=\left(\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}\right)e^{-t}.$$

Sada polazna jednadžba postaje

$$e^{3t}(u''+u')e^{-t}+2e^tue^t(u'+u)-e^{2t}(u'+u)^2-u^2e^{2t}=0$$

ili

$$u''+u'-u'^2=0.$$

Stavimo da je $u'=z$, gdje je u nova nezavisna promjenljiva, tj. $z=z(u)$. Tada je $u''=z'z$ pa je $z'z+z-z^2=0$. Ako ovo skratimo sa z ($z\neq 0$) dobivamo

$$z'+1-z=0 \quad (z\neq 0).$$

Rješenje ove jednadžbe je $z=C_1e^u+1$. Kako je $u'=z$ to je $u'=C_1e^u+1$. Integriranjem dobivamo da je $C_2(C_1+e^{-u})=e^{-t}$, pa je

$$u=\ln\frac{C_2e^t}{1-C_1C_2e^t}.$$

Vraćajući promjenljive x i y dobivamo opće rješenje

$$y=x\ln\frac{C_2x}{1-C_1C_2x}.$$

Ako je $z=0$, tada imamo da je $y=Cx$, što nije rješenje polazne jednadžbe. ♦

Primjer 2.2.7. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{y'''}{y''}-\frac{3y'y''}{1+y'^2}=0.$$

Rješenje. Kako je

$$\frac{y'''}{y''}-\frac{3y'y''}{1+y'^2}=\frac{d}{dx}\left[\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln(1+y'^2)\right],$$

to je lijeva strana polazne jednadžbe totalni diferencijal. Polazna jednadžba se sad svodi na

$$\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln(1+y'^2)=\ln|C_1|,$$

ili

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} - C_1 = 0.$$

Kako je

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} - C_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1 x\right),$$

to prethodna jednadžba daje

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1 x = C_2.$$

Koristeći metod za rješavanje diferencijalnih jednadžbi prvog reda, koje su rješive po x, nije teško vidjeti da je rješenje ove jednadžbe dato sa

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad \left(a = -\frac{C_2}{C_1},\ b = \frac{C_3}{C_1},\ R = \frac{1}{C_1}\right)$$

♦

Primjer 2.2.8. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0.$$

Rješenje. Množenjem polazne jednadžbe sa integracionim faktorom $\mu = \dfrac{1}{yy'}$, $(yy' \neq 0)$, dobivamo

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0 \ (yy' = 0?)$$

ili

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x|\right] = 0,$$

pa dobijemo da je lijeva strana prethodne jednadžbe totalni diferencijal, zbog čega je

$$\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x| = \ln|C_1| \text{ ili } e^{y^2}yy' - C_1x^2 = 0.$$

Kako je

$$e^{y^2}yy' - C_1x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3\right),$$

dobivamo da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3 = C_2.$$

Ako je $yy' = 0$, tada je $y = C$. To je rješenje polazne jednadžbe sadržano u općem rješenju, tako da jednadžba nema singularnih rješenja. ♦

Primjer 2.2.9. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + f(x)y' + F(y)y'^2 = 0,$$

gdje su $f(x)$ i $F(y)$ zadane funkcije.

Rješenje. Pomnožimo polaznu diferencijalnu jednadžbu sa integracionim faktorom $\mu = \dfrac{1}{y'}$, $(y' \neq 0)$, dobivamo

$$\frac{y''}{y'} + f(x) + F(y)y' = 0$$

ili

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} F(t)dt\right] = 0.$$

Iz prethodnog slijedi da je

$$\ln|y'| + \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \int_{y_0}^{y} F(y)dy = \ln|C_1|,$$

tj.

$$y' = C_1 e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{y_0}^{y} F(y)dy}.$$

Integriranjem obje strane prethodne jednadžbe dobivamo da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$\int_{y_0}^{y} e^{\int_{y_0}^{y} F(y)dy} dy = C_1 \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)dx} dx + C_2.$$

(Za čitatelje: Razmotriti slučaj $y' = 0$.) ♦

2.3 Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti diferencijalnu jednadžbu za datu familiju krivih.

   (i) $(x+a)^2 + (y+b)^2 = 4$;

   (ii) $y = c_1 \sin x + c_2 x$;

   (iii) $\ln y = c_1 x^2 + c_2$.

2. Pokazati da date funkcije zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu:

   (i) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad y'' + y = 0$;

   (ii) $y = c_1 x + c_2 x \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x \sin x \cdot y'' - x \cos x \cdot y' + \cos x \cdot y = 0.$

3. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $x = \dfrac{y''}{\sqrt{1+y''^2}}$.

4. Riješiti jednadžbu $y'' = 2y^3, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$. (Ovo je tip $F(y, y'') = 0$, rješava se parametrizacijom $y' = p(y)$.)

5. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$, te ispitati postojanje singularnih rješenja.

6. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $x = e^{y''} + y''$.

7. Odrediti rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - xy''' + y''^2 = 0$ za početne uvjete $y(-1) = 1, \; y'(-1) = 1, \; y''(-1) = 0$.

   (Za $x \neq 0$ jednažba se može napisati u normalnom obliku $y''' = \dfrac{1}{x}(y'' + y''^2)$, desna strana zadovoljava uvjete Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, pa postoji jedinstveno rješenje Cauchyevog problema. (*Uputa:* Smjenom $y'' = p$ svodi se na Bernoullievu.).)

8. Ispitati postojanje singularnih rješenja kod diferencijalne jednadžbe $y' - xy'' = \sqrt{1 - y''^2}$. Odrediti ona rješenja koja prolaze tačkom $(0, 1)$ i u toj tački imaju tangentu $y = x + 1$. (*Uputa:* Smjenom $y' = p$ svodi se na Clairautovu diferencijalnu jednadžbu. Ispitati uvjete teorema o egzistenciji i jedinstvenosti)

9. Riješiti jednadžbe

   (i) $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$;

   (ii) $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$;

   (iii) $y'''y'' - \sqrt{1 + y''^2} = 0$.

10. Riješiti jednadžbu $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$.

11. Odrediti sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y'' \cos y + y'^2 \sin y - y' = 0$, koja zadovoljavaju uvjete: $y(-1) = \frac{\pi}{2}, y'(-1) = 0$; $y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2$; $y(-1) = \frac{\pi}{2}, y'(-1) = 1$.

12. Da li diferencijalna jednadžba $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ ima singularnih rješenja? Odrediti onu integralnu krivu koja u koordinatnom početku dodiruje pravu $x + y = 0$.

13. Odrediti jednadžbe krivih kod kojih je u proizvoljnoj tački M poluprečnik krivine proporcionalan odsječku normale između tačke M i tačke presjeka sa $x-$osom, ako je faktor proporcionalnosti: $k = -1$; $k = -2$; $k = 1 : k = -2$. (*Uputa:* Poluprečnik krivine u tački M je $R = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} / |y''|$).

14. Riješiti jednadžbu $x^4y'' - (2xy + x^3)y' + 4y^2 = 0$.

15. Riješiti jednadžbu $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$.

16. Riješiti jednadžbu $3x^2y''^2 - 2(3xy' + y)y'' + 4y'^2 = 0$.
17. Riješiti jednadžbu $xyy'' - 2xy'^2 + (y + 1)y' = 0$.
18. Riješiti jednadžbu $y'''(1 + y'^2) - 2y'y''^2 = 0$.
19. Riješiti jednadžbu $5y'''^2 - 3y''y^{iv} = 0$.
20. Riješiti jednadžbu $yy'' + 2y^2y'^2 + y'^2 - \dfrac{2yy'}{x} = 0$.
21. Riješiti jednadžbu $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.
22. Integrirati jednadžbu
$$x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2.$$
23. Naći opšte rješenje jednadžbe
$$(xy' - y)^2 + x^2yy'' = 0.$$

2.4 Linearne diferencijalne jednadžbe

Linearna diferencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija i njeni izvodi do n-tog reda javljaju u linearnoj vezi. Linerna diferencijalna jednadžba ima oblik

$$r_0(x)y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + r_n(x)y = g(x), \tag{2.6}$$

gdje su $r_0(x), r_1(x), \ldots, r_n(x)$ date funkcije definirane na intervalu (a, b). Tačka x_0 je singularna tačka ove diferencijalne jednadžbe ako je $r_0(x_0) = 0$. Ako je $r_0(x_0) \neq 0$, onda je tačka x_0 regularna. Ukoliko na intervalu ne postoji tačka x_0 za koju je $r_0(x_0) = 0$, onda linearnu diferencijalnu jednadžbu (2.6) možemo podijeliti sa $r_0(x)$ i dobiti sljedeću linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x), \tag{2.7}$$

gdje su $p_i(x) = \dfrac{r_i(x)}{r_0(x)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $f(x) = \dfrac{g(x)}{r_0(x)}$. Ako je $f(x) \equiv 0$, onda dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu koju zovemo *homogena linearna diferencijalna jednadžba*:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{2.8}$$

Nije teško vidjeti da linearna jednadžba (2.7) ostaje linearna ako se uvede smjena nezavisno promijenljive $x = \psi(t)$, gdje je $\psi(t)$ definirana i neprekidna funkcija sa svojim izvodima reda n uključno na intervalu (t_0, t_1), pri čemu je $a = \psi(t_0)$, $b = \psi(t_1)$, $\psi'(t) \neq 0$ na (t_0, t_1).

Također, linearna jednadžba ostaje linearna pri svakoj linearnoj smjeni tražene funkcije y. Naime, stavljajući $y = a(x)z + b(x)$, gdje je z nova tražena funkcija, a

$a(x)$ i $b(x)$ prizvoljne n puta neprekidno diferencijabilne funkcije varijable x, pri čemu je $a(x) \neq 0$ na (a, b), dobiva se ponovo linearna jednadžba po nepoznatoj funkciji z.

Primijetimo da ako u jednadžbu (2.8) uvrstimo smjenu

$$y = a(x)z,$$

onda dobivena jednadžba ponovo ostaje homogena i glasi

$$a(x)z^{(n)} + (na'(x) + p_1(x)a(x))z^{(n-1)} + \cdots = 0.$$

Ako sada izaberemo funkciju $a(x)$ tako da je $na'(x) + p_1(x)a(x) = 0$, tj. $a(x) = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)dx}$, onda dobivamo homogenu jednadžbu koja ne sadrži $z^{(n-1)}$. Dakle, smjenom

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)dx}$$

jednadžbu (2.8) svodimo na jednadžbu koja ne sadrži $z^{(n-1)}$ izvod.

Kad je u pitanju jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema za linearne diferencijalne jednadžbe vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.4.1. *Ako su funkcije $f(x), p_1(x), \ldots, p_n(x) \in C(a, b)$, onda za svako $x_0 \in (a, b)$ i proizvoljne realne brojeve $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ postoji jedinstveno rješenje $y(x)$ definirano na intervalu (a, b) koje zadovoljava početne uvjete*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Kad je u pitanju linearna diferencijalna jednadžba, onda je neprekidnost funkcija koje se pojavljuju u jednadžbi (2.7) dovoljan uvjet za egzistenciju i jedinstvenost rješenja Cauchyevog problema u nekoj okolini tačke $x_0 \in (a, b)$. Ovdje treba napomenuti da je dobiveno Cauchyevo rješenje definirano na intervalu (a, b), a ne samo u nekoj okolini tačke x_0. Dakle, ovaj Teorem je globalnog karaktera.

Također, smatrat ćemo da je rješenje definirano na intervalu na kome su definirani i koeficijenti linearne diferencijalne jednadžbe (2.7).

Da bismo proučili linearnu diferencijalnu jednadžbu (2.7) prvo ćemo posmatrati homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu (2.8).

2.4.1 Homogena linearna diferencijalna jednadžba

Sada ćemo posmatrati homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu (2.8). Primijetimo da ova jednadžba ima rješenje $y \equiv 0$. Ovo rješenje se zove *trivijalno*.

Također, ako neko rješenje $y = y(x)$ u tački x_0 zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$, onda je, zbog Teorema 2.4.1, to rješenje trivijalno.

Zbog kratkoće pisanja, stavimo

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y.$$

Operator $L : C^{(n)}(a,b) \to C(a,b)^2$, definiran prethodnim izrazom, zove se operator *diferenciranja reda* n ili *linearni diferencijalni operator reda* n.

Lako se provjeri da je operator diferenciranja linearan, tj. vrijedi

$$L(ay_1 + by_2) = aL(y_1) + bL(y_2).$$

Pomoću ovog operatora jednadžbe (2.7) i (2.8), možemo kraće pisati sa

$$L(y) = f(x) \text{ i } L(y) = 0.$$

Sada ćemo navesti nekoliko osobina rješenja homogene diferencijalne jednadžbe Ove osobine se jednostavno provjere.

(i) Ako su $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ rješenja jednadžbe (2.8) i ako su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne realne konstante, onda je $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ rješenje jednadžbe (2.8). Činjenica da je linearna kombinacija rješenja također rješenja je vrlo važna i često se zove *princip superpozicije.* Lako se vidi da su $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ i $y_3 = x^4$ rješenja jednadžbe $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 0$. Po ovom principu bilo koja kombinacija rješenja $C_1x + C_2x^2 + C_3x^4$ je rješenje, gdje su C_1, C_2 i C_3 proizvoljne konstante. Na primjer, linearna kombinacija $2x - 3x^2 + 6x^4$ je rješenje.

(ii) Ako jednadžba (2.8) ima kompleksno rješenje $y(x) = u(x) + iv(x)$, onda su $u(x)$ i $v(x)$ rješenja ove jednadžbe.

(iii) Ako je $y_1(x)$ rješenje jednadžbe (2.7) i ako je $y_2(x)$ rješenje jednadžbe (2.8), onda je $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ rješenje jednadžbe (2.7).

(iv) Ako je $y_i(x)$ rješenje jednadžbe $L(y) = f_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, k$ onda je $y(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(x)$ rješenje jednadžbe $L(y) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$.

(v) Ako jednadžba $L(y) = f_1(x) + if_2(x)$ ima kompleksno rješenje $y(x) = u(x) + iv(x)$, onda su $u(x)$ i $v(x)$ rješenja redom jednadžbi $L(y) = f_1(x)$ i $L(y) = f_2(x)$.

Iz osobine (i) vidimo da bilo koja linearna kombinacija rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe ponovo je rješenje te jednadžbe. Postavlja se pitanje kada će linearna kombinacija rješenja sadržavati svako drugo rješenje posmatrane homogene linearne diferencijalne jednadžbe. Da bismo odgovorili na to pitanje definirat ćemo pojam linearne nezavisnosti funkcija.

[2] $C^{(n)}(a,b)$ je skup $n-$ puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na (a,b), a $C(a,b)$ je skup neprekidnih funkcija na (a,b).

Definicija 2.4.1. *Funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, definirane na intervalu (a, b) su linearno nezavisne na tom intervalu, ako za $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ iz identiteta*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0, \;\; x \in (a, b),$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Inače su linearno zavisne na intervalu (a, b).

Ako je bar jedna od funkcija $y_i(x)$ identički jednaka nuli, onda funkcije $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ čine skup linearno zavisnih funkcija. Također, funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$, $x \in (a, b)$ su linearno zavisne na intervalu (a, b), ako je $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = const.$ sa svako $x \in (a, b)$. Inače, su linearno nezavisne.

Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.4.2. *Skup rješenja jednadžbe (2.8) čini linearan prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva.*

Dokaz. Neka je $V = \{y \in C^n(a, b) : L(y) \equiv 0\}$. Ako $y_1(x)$, $y_2(x) \in V$, onda zbog linearnosti operatora L je $L(ay_1 + by_2) = aL(y_1) + bL(y_2) \equiv 0$ za a, $b \in \mathbb{R}$. Dakle, imamo da $ay_1 + by_2 \in V$. □

Trivijalno rješenje je *nula-vektor* u ovom prostoru. Zbog osobina rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe (osobina (i)) vidimo da se svako rješenje može napisati kao linearna kombinacija baznih vektora linearnog prostora V. Dakle, rješavanje ove jednadžbe svodi se na određivanje baze i dimenzije prostora V.

Ispitivanje linearne nezavisnosti(zavisnosti) funkcija korištenjem definicije nije uvijek jednostavno. Zato definiramo pojam Wronskiana pomoću kojeg neće biti teško odgovoriti na pitanje linearne nezavisnosti(zavisnosti) funkcija.

Definicija 2.4.2. *Neka su funkcije $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ definirane na intervalu (a, b) i imaju izvode bar do $(n-1)-$tog reda. Tada se determinanta*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

naziva funkcionalna determinanta ili Wronskian funkcija $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kojeg označavamo sa $W(x)$ ili $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Tvrdnja 2.4.1. *Ako su funkcije $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x) \in C^{(n-1)}(a, b)$ linearno zavisne na intervalu (a, b), onda je $W(x) \equiv 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

Dokaz. Ako su funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno zavisne, onda postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ od kojih je bar jedna različita od nule, tako da vrijedi

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Uzmimo $x \in (a, b)$ i fiksirajmo ga. Diferenciranjem ove jednakosti $(n-1)-$puta dobivamo homogeni sistem linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) &= 0 \\
\alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \ldots + \alpha_n y_n'(x) &= 0 \\
&\vdots \\
\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0,
\end{aligned}$$

koji ima netrivijalno rješenje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pa mu determinanta mora biti nula, tj mora biti $W(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$. $\square$

Primjedba 2.4.1. *Obrnuta tvrdnja nije tačna, tj. iz uvjeta $W(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$ ne slijedi linearna zavisnost funkcija. Na primjer, posmatrajmo funkcije*

$$y_1(x) = \begin{cases} -x^3, & x \in [-1, 0] \\ 0, & x \in (0, 1], \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x^3, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Lako se vidi da je $W(x) = 0$ za $x \in [-1, 1]$. Iz relacije $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ na segmentu $[-1, 0]$ je $\alpha_1 = 0$, α_2 proizvoljno, a na segmentu $[0, 1]$ je α_1 proizvoljno, a $\alpha_2 = 0$. Dakle, na segmentu $[-1, 1]$ je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, pa su date funkcije linearno nezavisne

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja 2.4.2. *Ako je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$, onda su funkcije $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x) \in C^{(n-1)}(a, b)$ linearno nezavisne na (a, b).*

Primijetimo da funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ u tvrdnjama 2.4.1 i 2.4.2 nismo posmatrali kao rješenja posmatrane homogene linearne diferencijalne jednadžbe. Sada pretpostavimo da su funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \in C(a, b)$ rješenja diferencijalne jednadžbe (2.8), onda vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.4.3. *Neka su funkcije $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x) \in C^{(n)}(a, b)$ rješenja homogene diferencijalne jednadžbe (2.8) i neka $p_1 = p_1(x), p_2 = p_2(x), \ldots, p_n = p_n(x) \in C^{(n)}(a, b)$. Tada su rješenja $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ linearno nezavisna na intervalu (a, b) ako i samo ako je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

Dokaz. Ako je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$, onda po Tvrdnji 2.4.2 slijedi da su rješenja jednadžbe (2.8) linearno nezavisna na intervalu (a, b).

Neka su sada rješenja linearno nezavisna na intervalu (a, b) i neka je $W(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in (a, b)$. Onda sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) &= 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalno rješenje $(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{(n)}^{(0)})$. Po ranije navedenim osobinama, funkcija

$$y(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + \cdots + C_{(n)}^{(0)} y_n(x)$$

je rješenje jednažbe (2.8). Ovo rješenje zadovoljava trivijalne početne uvjete, jer

$$\begin{aligned} y(x_0) &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ y'(x_0) &= C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{aligned}$$

pa je to rješenje trivijalno, tj.

$$C_1^{(0)} y_1(x) + \cdots + C_n^{(0)} y_n(x) = 0, \quad x \in (a, b),$$

a $(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Dakle, rješenja su linearno zavisna. Ovo je suprotno polaznoj pretpostavci, zato mora biti $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$. $\square$

Iz dokazanog teorema i tvrdnji 2.4.1 i 2.4.2 slijedi, da bi n rješenja jednadžbe (2.8) bilo linearno nezavisno na intervalu (a, b) potrebno je i dovoljno da njihov Wronskian nije jednak nuli niti u jednoj tački intervala (a, b).

Osim toga, ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rješenja na intervalu (a, b), onda je $W(x) \neq 0$ na (a, b). Obratno, ako je $W(x) \neq 0$ na (a, b), onda su rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna na (a, b), jer bi u suprotnom slučaju $W(x)$ bio jednak nuli na (a, b).

Dakle, da bismo ustanovili linearnu nezavisnost n rješenja jednadžbe (2.8) dovoljno se uvjeriti da je samo u jednoj tački intervala (a, b), $W(x) \neq 0$. Ovo slijedi iz sljedeće dvije osobine Wronskiana za n rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n-$tog reda (2.8).

(i) Ako je Wronskian od n rješenja jednadžbe (2.8) jednak nuli u jednoj tački $x = x_0$ iz intervala (a, b), na kome su neprekidni svi koeficijenti jednadžbe (2.8), onda je Wronskian jednak nuli u svim tačkama intervala (a, b).

Naime, ako je $W(x_0) = 0$, onda po ranije dokazanom teoremu funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ su linearno zavisne na (a, b). Sada je prema tvrdnji 2.4.1, Wronskian identički jednak nuli na (a, b).

(ii) Ako je Wronskian od n rješenja jednadžbe (2.8) različit od nule u jednoj tački $x = x_0$ intervala (a, b), onda je on razločit od nule u svim tačkama tog intervala.

Naime, ako bi $W(x)$ bio jednak nuli u nekoj tački intervala (a, b), onda bi po prethodnoj osobini (i) on bio jednak nuli u svim tačkama intervala (a, b), pa dakle i u tački $x = x_0$,što je suprotno pretpostavci.

Dakle, možemo zaključiti sljedeće: *da bi n rješenja jednažbe (2.8) bilo linearno nezavisno na intervalu* (a, b), *na kome su neprekidni svi koeficijenti jednadžbe (2.8), potrebno je i dovoljno da je njihov Wronskian različit od nule samo u jednoj tački intervala* (a, b).

Odavde slijedi da ako su n rješenja jednadžbe (2.8) linearno nezavisna na intervalu (a, b), onda su ona linearno nezavisna na svakom intervalu (a_1, b_1) sadržanom u intervalu (a, b).

Navedene osobine Wronskiana rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2.8) veoma lako se mogu dobiti iz formule *Ostrogradski-Liouvullea* koja glasi

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$$

gdje je $x = x_0$ proizvoljna ali fiksna tačkla iz intervala (a, b).

Dokaz. Dokaz ove formule zasniva se na pravilu za diferenciranje determinante, a koje slijedi iz definicije determinante. Naime, ako sa $D_i(x)$ označimo determinantu koja u $i-$toj vrsti ima izvode članova, a sve ostale vrste su jednake odgovarajućim vrstama determinante $D(x)$, onda je $D'(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i(x)$. Diferenciranjem Wronskiana $W(x)$ dobiva se

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Množenjem elemenata prvih $n - 1$ vrsta sa $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_2(x)$ i njihovim dodavanjem posljednjoj vrsti, korištenjem pretpostvake da su funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rješenja jednadžbe (2.8) i korištenjem osobina determinanti, dobivamo

$$
W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \dots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x) W(x)
$$

ili

$$
W'(x) = -p_1(x) W(x).
$$

Budući da je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$, onda za proizvoljno $x_0 \in (a,b)$ ova diferencijalna jednadžba ima rješenje

$$
W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}, \quad x \in (a,b).
$$

$\square$

Posljedica 2.4.1. *Ako je $W(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in (a,b)$ onda je $W(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$; ako je $W(x_0) \neq 0$, onda je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$.*

Ako je $p_1(x) \equiv 0$, onda je $W(x) = const$.

Teorem 2.4.4. *Ako su funkcije $p_1 = p_1(x), p_2 = p_2(x), \dots, p_n = p_n(x)$ definirane i neprekidne na (a,b), onda jednadžba (2.8) ima n linearno nezavisnih rješenja.*

Dokaz. Uzmimo tačku $x_0 \in (a,b)$. Tada za proizvoljnu regularnu matricu reda n, $A = (a_{ij})_n$, na osnovu Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, postoje jedinstvena rješenja $y_i = y_i(x)$, $y_i \in C^{(n)}(a,b)$, $i = 1, 2, \dots, n$ jednadžbe (2.8), koja zadovoljavaju početne uvjete

$$
y_i(x_0) = a_{i1}, y_i'(x_0) = a_{i2}, \dots, y_i^{(n-1)}(x_0) = a_{in}.
$$

Budući da je $W(x_0) = \det A \neq 0$, onda prema Posljedici 2.4.1, ova rješenja su linearno nezavisna na intervalu (a,b). $\square$

Teorem 2.4.5. *Neka su $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x) \in C^{(n)}(a,b)$ linearno nezavisna rješenja jednadžbe (2.8) i neka je $y = y(x) \in C^{(n)}(a,b)$ proizvoljno netrivijalno rješenje ove jednadžbe. Onda postoje konstante $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ tako da je*

$$
y(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x).
$$

Dokaz. Za proizvoljno $x_0 \in (a,b)$ stavimo $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Budući da je $y(x)$ netrivijalno rješenje, onda je $(y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Zbog linearne nezavisnosti rješenja $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, determinanta nehomogenog sistema

$$\begin{aligned}
C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) &= y_0 \\
C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) &= y_0' \\
&\vdots \\
C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)},
\end{aligned}$$

je $W(x_0) \neq 0$, pa sistem ima jedinstveno rješenje $(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)})$. Funkcija

$$\varphi(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \cdots + C_n^{(0)} y_n(x)$$

je rješenje jednažbe (2.8). Budući da ovo rješenje zadovoljava iste početne uvjete, mora biti $y(x) \equiv \varphi(x)$.
Dakle, proizvoljno rješenje je linearna kombinacija linearno nezavisnih rješenja.
□

Posljedica 2.4.2. *Svakih $n+1$ rješenja diferencijalne jednadžbe (2.8) čini skup linearno zavisnih rješenja.*

Naime, ako je prvih n rješenja linearno zavisno, onda je pogotovo $n+1$ rješenja linearno zavisno. Ako je prvih n rješenja linearno nezavisno, onda na osnovu Teorema 2.4.5 postoje konstante $C_1, C_2, \dots, C_n$ tako da je $y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$, pa su $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), y_n = y_{n+1}(x)$ linearno zavisna rješenja. Dakle, dimenzija prostora V je jednaka redu diferencijalne jednadžbe (2.8), a bazu prostora čini bilo koji skup od n linearno nezavisnih rješenja.

Definicija 2.4.3. *Skup od n linearno nezavisnih rješenja jednadžbe (2.8), definiranih na intervalu (a,b) naziva se fundamentalan skup rješenja te jednadžbe.*

Opće rješenje je dato sa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),\ x \in (a,b),$$

gdje rješenja $y_1, y_2 \dots, y_n$ čine *fundamentalan* skup rješenja.

Dakle, jednadžbu (2.8) smo riješili ako smo odredili bilo koji fundamentalan skup njenih rješenja. Može se pokazati da takvih skupova ima beskonačno mnogo. Dovoljno je odrediti linearno nezavisna rješenja pomoću neke druge regularne matrice.

Partikularno rješenje dobiva se iz općeg rješenja kad se konstantama daju tačno određene vrijednosti.

Primjer 2.4.1. *Posmatrajmo linearne diferencijalne jednadžbe*

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y &= 0, \\ y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y &= 0, \end{aligned}$$

gdje su funkcije $p_i(x)$ i $q_i(x)$ definirane i neprekidne na (a,b). Ako date jednadžbe imaju isti fundamentalni skup rješenja onda mora biti $p_i(x) \equiv q_i(x)$ za $i = 1,..,n$.

Rješenje. Neka $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ čini fundamentalni skup rješenja datih jednadžbi. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $i, 1 \leq i \leq n$ takav da je $p_k(x) \equiv q_k(x), \quad 1 \leq k \leq i-1$ i $p_i(x) \not\equiv q_i(x)$ na (a,b). Kako $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ čini fundamentalni skup rješenja to je

$$\begin{aligned} y_i^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_i(x)y_i^{(i)} + p_{i-1}(x)y_i^{(i-1)} + \ldots + p_n(x)y_i &= 0, \\ y_i^{(n)} + q_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + q_i(x)y_i^{(i)} + q_{i-1}(x)y_i^{(i-1)} + \ldots + q_n(x)y_i &= 0. \end{aligned}$$

Oduzimanjem ove dvije jednadžbe dobivamo da je

$$(p_i(x) - q_i(x))y_1^{(n-i)} + \ldots + (p_n(x) - q_n(x))y_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Kako je za $i = 1, ..., n$ ovo homogena diferencijalna jednadžba $(n-i)$-tog reda a ima n linearno nezavisnih rješenja, to imamo kontradikciju sa Teoremom 2.4.4. Dakle, $p_i(x) \equiv q_i(x)$ za $i = 1,..,n$. ⧫

Do sada smo vidjeli da jednadžba (2.8) čiji su koeficijenti neprekidne funkcije na intervalu (a,b) ima tačno n linearno nezavisnih rješenja na (a,b). Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratno, tj. da za svaki skup različitih neprekidno-diferencijabilnih i linearno nezavisnih na intervalu (a,b) funkcija $y_1, y_2, \ldots, y_n$ čiji Wronskian niti u jednoj tački intervala (a,b) nije jednak nuli, postoji jedna i samo jedna homogena linearna diferencijalna jednadžba $n-$tog reda oblika (2.8) za koju je upravo ovaj skup funkcija fundamentalni skup rješenja na intervalu $(a.b)$.

Primjer 2.4.2. *Odrediti homogenu diferencijalnu jednadžbu ako je poznat njen fundamentalni skup rješenja.*

Rješenje. Jednadžba koju želimo odrediti glasi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0.$$

Nepoznati koeficijenti $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ ove jednadžbe zadovoljavaju sljedeći sistem

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 &= 0 \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 &= 0 \\ &\vdots \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n &= 0 \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}W(x) \neq 0$,[3] što povlači da sistem ima jedinstveno rješenje po $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$.

Traženu jednadžbu možemo odrediti i na sljedeći način. Ako skupu linearno nezavisnih funkcija $y_1, y_2, \ldots, y_n$ koje zadovoljavaju prethodni sistem, dodamo proizvoljnu funkciju y za koju je $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$, onda je taj skup funkcija linearno zavisan i njegov Wronskian je jednak nuli na intervalu (a, b), tj.

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \ldots & y_n \\ y' & y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-2)} & y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Ako ovu determinantu razvijemo po prvoj koloni dobit ćemo traženu jednadžbu.
♦

Ako znamo fundamentalan skup rješenja diferencijalne jednadžbe (2.8), onda možemo naći opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (2.7). Naime vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.4.6. *Opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (2.7) je suma općeg rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2.8) i bilo kojeg partikularnog rješenja nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (2.7).*

Dokaz. Neka funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ čine fundamentalan skup rješenja jednadžbe (2.8) i neka je $\varphi(x)$ neko partikularno rješenje jednadžbe (2.7), a $\psi(x)$ proizvoljno rješenje jednadžbe (2.7). Budući da je $L(\varphi) \equiv f(x)$, $L(\psi) \equiv f(x)$, onda je $L(\varphi - \psi) = L(\varphi) - L(\psi) \equiv 0$, pa je $\varphi - \psi$ rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe (2.8). Vidjeli smo da se ovo rješenje može predstaviti kao linearna kombinacija fundamentalnog skupa rješenja, tj.

$$\psi(x) = \varphi(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n, \;\; x \in (a, b).$$

Kako je rješenje $\varphi(x)$ proizvoljno ovom formulom su opisana sva rješenja jednadžbe (2.7), tj. ovom formulom dato je opće rješenje. □

2.4.2 Zadaci za samostalan rad

1. Izračunati Wronskian za sljedeće skupove funkcija:

   (i) $1,\ x,\ x^2$;

   (ii) $\sin x^2,\ \cos x^2$;

   (iii) $\ln x,\ e^x$;

   (iv) $x^2,\ x^{3/2}$;

[3] $[x]$ je funkcija *cijeli dio*

(v) $e^{3x},\ e^{2x}$;

(vi) $x^2,\ x^2 \ln x$;

(vii) $e^{7x},\ xe^{7x}$;

(viii) $x^{\lambda_1 x},\ x^{\lambda_2 x};\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

2. U sljedećim zadacima pokazati da navedene funkcije čine fundamentalni skup rješenja navedenih diferencijalnih jednadžbi:

   (i) $\sin 3x,\ \cos 3x;\ y'' + 9y = 0$;

   (ii) $e^{2x},\ e^{2x};\ y'' - 4y = 0$;

   (ii) $\sin 3x,\ \cos 3x;\ y'' + 9y = 0$;

   (iv) $e^{3x},\ e^{x};\ y'' - 4y' + 3y = 0$;

   (v) $e^{-2x},\ xe^{-2x};\ y'' + 4y' + 4y = 0$;

   (vi) $e^{x}\cos 2x,\ e^{x}\sin 2x;\ y'' - 2y' + 5y = 0$;

   (vii) $\cos x + \sin x,\ \cos x - \sin x;\ y'' + y = 0$;

   (viii) $\dfrac{1}{x}\cos(\ln x),\ \dfrac{1}{x}\sin(\ln x);\ x^2y'' + 3xy' + 2y = 0,\ x > 0$;

   (ix) $1,\ \cos x,\ \sin x;\ y''' + y' = 0$.

3. Data je diferencijalna jednadžba $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, pri čemu su funkcije $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne na $[a, b]$. Neka su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rješenja date diferencijalne jednadžbe definirana na $[a, b]$

   (i) Dokazati da ako postoji tačka $x_0 \in [a, b]$ tako da je $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ onda $y_1(x)$ i $y_2(x)$ ne mogu formirati fundamentalni skup rješenja na $[a, b]$.

   (ii) Dokazati da ako $y_1(x)$ i $y_2(x)$ u istoj tački dostižu svoj maksimum ili minimum na $[a, b]$, onda ne mogu formirati fundamentalni skup rješenja na $[a, b]$.

   (iii) Dokazati da ako $y_1(x)$ i $y_2(x)$ čine fundamentalni skup rješenja na onda oni ne mogu imati istu prevojnu tačku na $[a, b]$ osim ako su funkcije $p(x)$ i $q(x)$ u toj tački jednake nuli.

   (iii) Ako su funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno nezavisne, pokazati da između uzastopnih nula funkcije $y_1(x)$ ima jedna i samo jedna nula funkcije $y_2(x)$.

2.4.3 Linearne diferencijalne jednadžbe sa konstantnim koeficijentima

U ovoj sekciji se nećemo baviti detaljnim proučavanjem linearnih diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima, tj. nećemo govoriti o asimptotskom ponašanju rješenja, oscilatornom karakteru niti o stabilnosti rješenja, nego ćemo isključivo govoriti o načinu njihovog rješavanja.

Najprije posmatrajmo homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu sa konstantnim koeficijentima

$$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{2.9}$$

Po Teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, za proizvoljne početne vrijednosti postoji jedinstveno rješenje definirano za svako $x \in \mathbb{R}$. Ovo rješenje tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$, gdje je λ u općem slučaju kompleksni parametar. Ovaj metod je poznat kao Eulerov metod. Uvrstimo ovo rješenje u jednadžbu (2.9), dobivamo

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n).$$

Polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$$

se naziva *karakteristični polinom*, a jednadžba

$$P(\lambda) = 0$$

karakteristična jednadžba pridružena jednadžbi (2.9). Iz $L(e^{\lambda x}) \equiv 0$ slijedi da je funkcija $y = e^{\lambda x}$ rješenje jednadžbe (2.9) ako i samo ako je λ korijen karakteristične jednadžbe. Dakle, da bismo riješili diferencijalnu jednadžbu (2.9) treba znati riješiti njenu karakterističnu jednadžbu.

Razlikovat ćemo nekoliko slučajeva u ovisnosti od prirode korijena karakteristične jednadžbe.

2.4.3.1 Korijeni karakteristične jednadžbe su prosti

Ovdje ćemo prvo razmotriti situaciju ako su korijeni realni i prosti(različiti). Naime, neka jednadžba ima n realnih i prostih[4] korijena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, onda su funkcije $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ linearno nezavisna rješenja[5] diferencijalne jednadžbe (2.9).

Ako karakteristična jednadžba ima prost kompleksan korijen $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, onda ta jednadžba ima i konjugirano kompleksan korijen $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, jer su koeficijenti karakteristične jednadžbe realni brojevi. Rješenja jednadžbe (2.7) su kompleksne funkcije $e^{(\alpha+i\beta)}$ i $e^{-(\alpha+i\beta)}$, ali isto tako njena rješenja su i linearne kombinacije ovih funkcija,

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)} + e^{-(\alpha+i\beta)}\right),$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)} - e^{-(\alpha+i\beta)}\right).$$

Do ovog zaključka se moglo doći i koristeći ranije osobine rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe. Naime, budući da je funkcija $e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$, rješenje, onda su njen realni i imaginarni dio također, rješenja.

Lako se provjeri da su rješenja $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ linearno nezavisna.

[4]višestrukosti 1

[5]Wronskian ovih rješenja $W(x) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$

Primjer 2.4.3. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$. Funkcije

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{3x}$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

♦

Primjer 2.4.4. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe* $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 2$. Sljedeće funkcije

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^x,\ y_3 = e^{2x}$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

♦

Primjer 2.4.5. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ i $\lambda_3 = 2 - 3i$. Sljedeće funkcije

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{2x}\sin 3x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x.$$

♦

Primjer 2.4.6. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^4 + 4 = 0,$$

čija su rješenja data sa

$$\lambda_k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right),$$

za $k = 0, 1, 2, 3$. Na osnovu ovoga imam da je

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i \\
\lambda_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i \\
\lambda_3 &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i \\
\lambda_4 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i
\end{aligned}$$

Sljedeće funkcije

$$y_1 = e^x\cos x,\ y_2 = e^x\sin x,\ y_3 = e^{-x}\cos x,\ y_4 = e^{-x}\sin x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^x\cos x + C_2 e^x\sin x + C_3 e^{-x}\cos x + C_4 e^{-x}\sin x.$$

♦

Primjer 2.4.7. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y''' - y'' + 4y' - 4 = 0.$$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2i$ i $\lambda_3 = -2i$. Sljedeće funkcije

$$y_1 = e^x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$$

♦

2.4.3.2 Korijeni karakteristične jednadžbe su višestruki

Ovdje ćemo prvo dokazati sljedeću Tvrdnju.

Tvrdnja 2.4.3. *Ako je λ_1 korijen karakteristčne jednadžbe višestrukosti m, onda su funkcije $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$ linearno nezavisna rješenja jednadžbe (2.7).*

Dokaz. Budući da je $P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m Q_{n-m}(\lambda)$, gdje je polinom $Q_{n-m}(\lambda)$ stepena $n-m$, onda je

$$P_n(\lambda_1) = 0, P'_n(\lambda_1) = 0, \dots, P_n^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, P_n^{(m)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Sada treba dokazati da je $L(x^k e^{\lambda x}) = 0$. Da bismo to dokazali primijenimo *Leibnitzeovu formulu*[6] na proizvod $x^k e^{\lambda x}$, gdje je k cijeli nenegativan broj. Imamo

$$L(x^k e^{\lambda x}) \equiv \left(x^k e^{\lambda x}\right)^{(n)} + p_1 \left(x^k e^{\lambda x}\right)^{(n-1)} + \dots + p_n x^k e^{\lambda x} \equiv$$

$$\equiv P_n(\lambda) x^k e^{\lambda x} + \binom{k}{1} P'_n(\lambda) x^{k-1} e^{\lambda x} + \binom{k}{2} P''_n(\lambda) x^{k-2} e^{\lambda x} + \dots + P_n^{(k)}(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Odavde imamo da je $L(x^k e^{\lambda x}) \equiv 0$ ako i samo ako je $\lambda = \lambda_1$ i $0 \le k \le m-1$. Dakle, funkcije $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$ su rješenja jednadžbe (2.7). Može se lako pokazati da su ove funkcije linearno nezavisne. □

Treba primijetiti da je ova Tvrdnja iskazana za proizvoljne korijene, realne ili kompleksne. Ako je kompleksan korijen $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ višestrukosti m, onda karakteristična jednadžba ima i konjugirano kompleksan korijen $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ višestrukosti m.

Sada imamo $2m$ realnih na intervalu linearno nezavisnih rješenja $(-\infty, +\infty)$ oblika

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \; xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \; xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Dakle, svakom paru konjugirano kompleksnih rješenja $\alpha \pm i\beta$ višestrukosti m odgovara $2m$ realnih linearno nezavisnih rješenja navedenog oblika.

Linearna kombinacija nađenih n linearno nezavisnih rješenja s proizvoljnim konstantama je opće rješenje. Pri čemu realnom korijenu λ višestrukosti m u izrazu općeg rješenja odgovara član $P_{m-1}(x)e^{\lambda x}$, a paru konjugirano kompleksnih korjena $\alpha \pm i\beta$ višestrukosti m odgovara član $e^{\alpha x}(P_{m-1}(x) \cos \beta x + Q_{m-1}(x) \sin \beta x)$, gdje su $P_{m-1}(x)$ i $Q_{m-1}(x)$ polinomi stepena $m-1$ s proizvoljnim koeficijentima.

Primjer 2.4.8. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

[6] $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Sljedeće funkcije

$$y_1 = e^x, \; y_2 = xe^x, \; y_3 = x^2 e^x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

♦

Primjer 2.4.9. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Sljedeće funkcije

$$y_1 = e^{3x}, \; y_2 = e^{2x}, \; y_3 = xe^{2x}$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} = C_1 e^{3x} + e^{2x}(C_2 + C_3 x)$$

♦

Primjer 2.4.10. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Rješenje. Rješenja tražimo u obliku $y = e^{\lambda x}$. Nakon uvrštavanja u diferencijlanu jendadžbu dobivamo sljedeću karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = i$ i $\lambda_4 = -i$. Sljedeće funkcije

$$y_1 = e^{2x}, \; y_2 = xe^{2x}, \; y_3 = \cos x, \; y_4 = \sin x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

♦

Primjer 2.4.11. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Rješenje. Rješenja karakteristične jednadžbe

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

su: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 - i$. Sljedeće funkcije

$$e^x \cos x,\ e^x \sin x,\ xe^x \cos x,\ xe^x \sin x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = e^x \left[(C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4) \sin x\right]$$

♦

Primjer 2.4.12. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

Rješenje. Rješenja karakteristične jednadžbe

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0$$

su: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -2i$. Sljedeće funkcije

$$e^x,\ \cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x,\ x \sin 2x$$

čine fundamentalni skup rješenja, pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x$$

♦

2.4.4 Linearna nehomogena diferencijalna jednadžba sa konstantnim koeficijentima

Sada ćemo posmatrati linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sa konstantnim koeficijentima

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{2.10}$$

gdje smo kao i u slučaju homogene jednadžbe pretpostavili da su $p_1, \ldots, p_n$ realni brojevi. Za funkciju $f(x)$ pretpostavljamo da je neprekidna na nekom intervalu (a, b). Vidjeli smo da je opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe jednako sumi općeg rješenja odgovarajuće homogene jednadžbe i bilo kojeg partikularnog rješenja posmatrane nehomogene jendndažbe, vidi Teorem 2.4.6.

Pokazali smo na koji način možemo dobiti fundamentalni skup rješenja odgovarajuće homogene linearne diferencijalne jednadžbe. Da bismo našli opće rješenje nehomogene ostalo je još da pronađemo jedan partikularni integral(rješenje) posmatrane nehomogene jednadžbe.

Prije nego pokažemo univerzalni metod za nalaženje partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe (2.10), posmatraćemo jedan specijalan slučaj funkcije $f(x)$ kod kojeg ćemo metodom neodređenih koeficijenata moći pronaći jedno partikularno rješenje.

2.4.4.1 Nalaženje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata kad funkcija $f(x)$ ima specijalan oblik

Pretpostavimo da je $f(x) = P_m(x)e^{\mu x}$, tj. da jednadžba (2.10) glasi

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = P_m(x)e^{\mu x}, \tag{2.11}$$

gdje je $P_m(x) = a_0x^m + \cdots + a_{m-1}x + a_m, \quad m \geq 0$ polinom sa realnim ili kompleksnim koeficijentima(može biti i konstanta), a μ realan ili kompleksan broj(može biti i nula).

Pri formiranju partikularnog rješenja posmatrat ćemo sljedeća dva slučaja.

Slučaj 2.4.1. *Pretpostavimo da μ nije korijen karakteristične jednadžbe koja je pridružena odgovarajućoj homogenoj jednadžbi. U ovom slučaju partikularno rješenje $y_p(x)$ tražimo u obliku*

$$y_p(x) = Q_m(x)e^{\mu x},$$

gdje je $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ polinom $m-$tog stepena sa neodređenim koeficijentima.

Koeficijente polinoma $Q_m(x)$ nalazimo iz uvjeta

$$L(Q_m(x)e^{\mu x}) = P_m(x)e^{\mu x}.$$

Odavde izjednačavenjem koeficijenata uz iste stepene x, i korištenjem pretpostavke da μ nije korijen karakteristične jednadžbe, dobivamo koeficijente $b_0, b_1, \ldots, b_m$ određene jedinstveno.

Sada ćemo posmatrati drugi slučaj.

Slučaj 2.4.2. *Pretpostavimo da je μ korijen višestrukosti $r \geq 1$ karakteristične jednadžbe pridružene odgovarajućoj homogenoj jednadžbi, tj. da je*

$$P(\mu) = P'(\mu) = \ldots = P^{(r-1)}(\mu) = 0, \quad P^{(r)}(\mu) \neq 0$$

gdje smo sa $P(\lambda)$ označili karakteristični polinom. U ovom slučaju partikularno rješenje ne možemo tražiti u obliku $y_p(x) = Q_m(x)e^{\mu x}$, jer je $P(\mu) = 0$. Zato partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r Q_m(x)e^{\mu x},$$

gdje je $Q_m(x)$ polinom oblika kao u prvom slučaju.

Koeficijente polinoma $Q_m(x)$ nalazimo iz uvjeta

$$L(x^r Q_m(x)e^{\mu x}) = P_m(x)e^{\mu x}.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene x, i korištenjem činjenice da je $P^{(r)}(x) \neq 0$, dobivamo koeficijente polinoma $Q_m(x)$ određene jedinstveno.

Primjedba 2.4.2. *Opisani postupak može se koristiti za rješavanje diferencijalne jednadžbe oblika*

$$L(y) = \sum_{k=1}^{s} P_{m_k}(x) e^{\mu_k x},$$

gdje su $P_{m_k}(x)$ polinomi stepena m_k. U tom slučaju treba odrediti partikularna rješenja $y_k(x)$ jednadžbi $L(y) = P_{m_k}(x)e^{\mu_k}x$, $1 \leq k \leq s$, a onda primijeniti ranije osobine rješenja, tj. partikularno rješenje će biti $y(x) = \sum_{k=1}^{s} y_k(x)$.

Metod neodređenih koeficijenata može se koristiti za traženje partikularnog rješenja diferencijalne jednadžbe (2.10) kod koje je

$$f(x) = [P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \tag{2.12}$$

gdje su $P_m^{(1)}(x)$ i $P_m^{(2)}(x)$ dati polinomi stepena manjeg ili jednakog m. Ako primijenimo Eulerove formule

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

onda izraz (2.12) možemo napisati u sljedećem obliku

$$f(x) = \tilde{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{2.13}$$

gdje su $\tilde{P}_m^{(1)}(x)$ i $\tilde{P}_m^{(2)}(x)$ polinomi stepena m. Primijetimo da je sad desna strana oblika koji smo prethodno razmatrali. Zato je potrebno posmatrati sljedeća dva slučaja.

Slučaj 2.4.3. *Pretpostavimo da broj $\alpha+i\beta$ nije korijen karakteristične jednadžbe. Tada se partikularno rješenje traži u sljedećem obliku*

$$y_p = \tilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}$$

gdje su $\tilde{Q}_m^{(1)}(x)$ i $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ polinomi stepena m sa neodređenim koeficijentima. Odnosno

$$y_p = e^{\alpha x}(Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x)$$

u realnom obliku, gdje su $Q_m^{(1)}(x)$ i $Q_m^{(2)}(x)$ polinomi $m-$tog stepena sa neodređenim koeficijentima.

Slučaj 2.4.4. *Neka je sada $\alpha+i\beta$ korijen karakteristične jednadžbe višestrukosti $r \geq 1$. Tada partikularno rješenje tražimo u sljedećem obliku*

$$y_p = x^r\left(\tilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}\right).$$

Odnosno

$$y_p = x^r e^{\alpha x}(Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x)$$

u realnom obliku, gdje su $Q_m^{(1)}(x)$ i $Q_m^{(2)}(x)$ polinomi $m-$tog stepena sa neodređenim koeficijentima.

Primjedba 2.4.3. *Ako u izrazu* (2.12) *polinomi na desnoj strani imaju različit stepen, npr.* m_1 *i* m_2*, redom, onda se u partikulanom rješenju za stepen* m *polinoma* $Q_m^{(1)}(x)$ *i* $Q_m^{(2)}(x)$ *uzima* $m = \max(m_1, m_2)$.

Primjer 2.4.13. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2.$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Kako $\mu = 0$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Uvrstimo y_p u polaznu jednadžbu. Tada je:

$$\begin{array}{rcl} 6 & \cdot/ & y_p = Ax^2 + Bx + C \\ (-5) & \cdot/ & y_p' = 2Ax + B \\ 1 & \cdot/ & y_p'' = 2A \\ \hline & & 6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2, \end{array}$$

odakle dobivamo sistem

$$6A = 6,\ 6B - 10A = -10,\ 6C - 5B + 2A = 2$$

čije je rješenje $A = 1$, $B = 0$ i $C = 0$. Dakle, opće rješenje je dato sa

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2.$$

♦

Primjer 2.4.14. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x.$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' - 5y' = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 5$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1 + C_2 e^{5x}$. Kako je $\mu = 0$ rješenje karakteristične jednadžbe višestrukosti 1, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Uvrštavanjem y_p u polaznu jednadžbu i sređivanjem kao u prethodnom primjeru dobijemo da je $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$ i $C = 0$. Dakle, opće rješenje je dato sa

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{1}{3}x^3.$$

♦

Primjer 2.4.15. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - y' = 6e^{2x}.$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' - y' = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Kako $\mu = 2$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = Ae^{2x}.$$

Uvrstimo y_p u polaznu jednadžbu. Tada imamo:

$$\begin{array}{rll} (-1) & \cdot/ & y_p = Ae^{2x} \\ 0 & \cdot/ & y_p' = 2Ae^{2x} \\ 1 & \cdot/ & y_p'' = 4Ae^{2x} \\ \hline & & 3Ae^{2x} = 6e^{2x}, \end{array}$$

odakle slijedi da je $A = 2$. Opće rješenje je dato sa

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2e^{2x}.$$

♦

Primjer 2.4.16. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}.$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' - 4y' + 4y = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Kako je $\mu = 2$ rješenje karakteristične jednadžbe višestrukosti 2, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = Ax^2e^{2x}.$$

Uvrštavanjem y_p u polaznu jednadžbu i sređivanjem kao u prethodnim primjerima dobivamo da je $A = 1$, pa je opće rješenje dato sa

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x}.$$

♦

Primjer 2.4.17. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2.$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' - 6y' + 5y = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 5$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$. Odredimo sad partikularna rješenja svake od sljedećih jednadžbi:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = -3e^x, \\ y'' - 6y' + 5y = 5x^2, \end{cases}$$

Za prvu jednadžbu je $\mu = 1$ rješenje karakteristične jednadžbe pa partikularno rješenje je oblika $y_1 = Axe^x$. Jednostavno se dobiva da je $A = \frac{3}{4}$ pa je $y_1 = \frac{3}{4}xe^x$ partikularno rješenje.

Za drugu jednadžbu $\mu = 0$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješnje tražimo u obliku $y_2 = Ax^2 + Bx + C$. Slično kao i u prethodnim primjerima dobivamo da je $A = 1$, $B = \frac{12}{5}$ i $C = \frac{62}{25}$, pa je $y_2 = x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$ partikularno rješenje druge jednadžbe.

Sabiranjem ova dva partikularna rješenja, dobivamo partikularno rješenje polazne jednadžbe, tj.

$$y_p = y_1 + y_2 = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}.$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}.$$

♦

Primjer 2.4.18. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x).$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' + y' - 2y = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Kako $\mu = 1 + i$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Uvrstimo y_p u polaznu jednadžbu. Tada je:

$$\begin{array}{rl} (-2) \;\cdot/ & y_p = e^x(A\cos x + B\sin x) \\ 1 \;\cdot/ & y_p' = e^x\left[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right] \\ 1 \;\cdot/ & y_p'' = e^x(2B\cos x - 2A\sin x) \\ \hline & e^x\left[(3B-A)\cos x - (B+3A)\sin x\right] = e^x(\cos x - 7\sin x), \end{array}$$

odakle dobivamo sistem

$$3B - A = 1, \ -B - 3A = -7,$$

čije je rješenje $A = 2$ i $B = 1$. Dakle, partikularno rješenje je $y_p = e^x(2\cos x + \sin x)$, pa je opće rješenje dato sa

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x).$$

♦

Primjer 2.4.19. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + y' + y = -13\sin 2x.$$

Rješenje. Posmatrajmo homogenu jednadžbu pridruženu polaznoj jednadžbi: $y'' + y' + 4y = 0$. Karakteristična jednadžba $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Njeno opće rješenje je dato sa

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Kako $\mu = 2i$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Uvrštavanjem y_p u polaznu jednadžbu i sređivanjem dobivamo da je $A = 2$ i $B = 3$, pa je opće rješenje dato sa

$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + 2\cos 2x + 3\sin 2x.$$

♦

Primjer 2.4.20. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + y = 2\sin x.$$

Rješenje. Karakteristična jednadžba homogene diferencijalne jednadžbe $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$. Njeno opće rješenje je dato sa $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Kako je $\mu = i$ rješenje karakteristične jednadžbe višestrukosti 1, partikularno rješenje se traži u obliku

$$y_p = x(A\cos x + B\sin x),$$

odakle dobivamo da je $A = -1$ i $B = 0$, pa je $y_p = -x\cos x$. Opće rješenje je dato sa

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x.$$

♦

2.4.5 Zadaci za samostalan rad

1. Naći opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

   (i) $y'' - 6y' + 8y = 0;$

   (ii) $y''' - 13y' - 12y = 0;$

   (iii) $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0;$

   (iv) $y'' + 2y' + 2y = 0;$

   (v) $y^{(4)} + y = 0;$

   (vi) $y''' + y'' = 0;$

   (vii) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0;$

   (viii) $y'' + 2y' + 2y = 0;$

   (ix) $y^{(4)} + y = 0;$

   (x) $y''' + y'' = 0.$

2. Metodom neodređenih koeficijenata naći opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

   (i) $y'' - y = -x + 1;$

   (ii) $y'' + y = 4e^x;$

   (iii) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3;$

   (iv) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x;$

   (v) $y^{(4)} - y = 4e^x;$

   (vi) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2x} - 4\sin 2x;$

   (vii) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin x;$

   (viii) $y'' + 4y = x^2 \sin^2 x;$

   (ix) $y''' + 2y'' + y' = (2x + 1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x.$

2.4.6 Linearne diferencijalne jednadžbe sa nekonstantnim koeficijentima

Vidjeli smo da se homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima uvijek mogu riješiti tako što se nađu korijeni pridružene karakteristične jednadžbe. Zato je potpuno prirodno pitanje o mogućnosti prevođenja linearne homogene jednadžbe sa nekonstantnim koeficijentima u jednadžbu sa konstantnim keoficijentima.

U onome šta slijedi pokazat ćemo transformaciju nezavisno promjenljive pomoću koje se može linearna diferencijalna jednadžba $n-$tog reda sa nekonstantnim koeficijentima transformirati u jednadžbu sa konstantnim koeficijentima. Također, pokazat ćemo i neke transformacije(smjene) pomoću kojih se može sniziti red posmatrane jednadžbe, kao i univerzalni metod traženja partikularnog rješenja nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe.

2.4.6.1 Transformacija nezavisne varijable

Posmatrajmo linearnu nehomogenu jednadžbu $n-$tog reda sa nekonstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_{n-1}(x)y = 0 \tag{2.14}$$

Cilj ovog metoda je da se pronađu smjene nezavisno promjenljive pomoću kojih će se jednadžba (2.14) svesti na jednadžbu sa konstantnim koeficijentima.

Stavimo

$$t = \varphi(x) \tag{2.15}$$

gdje je funkcija φ diferencijabilna potreban broj puta na svom domenu. Sada imamo,

$$\begin{array}{rcl} y'(x) & = & y'_t t'(x) = y'_t \varphi'(x), \\ y''(x) & = & y''_{t^2}(\varphi'(x))^2 + y'_t \varphi''(x), \ldots, \\ y^{(n)}(x) & = & y^{(n)}_{t^n}(\varphi'(x))^n + \cdots + y'_t \varphi^{(n)}(x). \end{array}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (2.14) dobivamo sljedeću jednadžbu

$$y^{(n)}_{t^n}(\varphi'(x))^n + \cdots + y'_t \varphi^{(n)}(x) + \cdots + p_n(x)y = 0.$$

Nakon dijeljenja sa $(\varphi'(x))^n$ dobivamo

$$y^{(n)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{(\varphi'(x))^n} y = 0 \tag{2.16}$$

Iz (2.16) vidimo da je funkciju $\varphi(x)$ potrebno odabrati tako da koeficijent uz y bude jednak konstanti. Stavimo

$$\frac{p_n(x)}{(\varphi'(x))^n} = \frac{1}{c^n}.$$

Odavde dobivamo

$$\varphi(x) = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx.$$

Jedna od poznatih jednadžbi koja se može riješiti na ovaj način je *Eulerova* linearna diferencijalna jednadžba koja ima oblik

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = 0,$$

gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_n, a, b$ realne konstante. Ova jednažba se lako svodi na jednadžbu

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

pa ćemo posmatrati ovu zadnju napisanu. Koeficijenti ove jednadžbe zadovoljavaju uvjete Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja pa su sva Cauchyeva rješenja definirana na intervalu $(-\infty, 0)$ ili $(0, \infty)$, a tačka $x = 0$ je singularna.

U našem slučaju $p_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$. Sada smjena nezavisno promjenljive x glasi

$$t = c \int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}} dx.$$

Uzmimo $c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$. Uvrštavanjem u prethodnu smjenu i integriranjem dobivamo da se Eulerova jednadžba može svesti na jednadžbu sa konstantnim koeficijentima smjenom

$$t = \ln x,\ x > 0 \text{ ili } x = e^t,$$
$$t = \ln(-x),\ x < 0 \text{ ili } x = -e^t.$$

Primijetimo da jednadžba sa konstantnim koeficijentima na koju se svodi Eulerova jednadžba ima partikularna rješenja oblika $e^{\lambda t}$ i $t^m e^{\lambda t}$. Tada Eulerova jednadžba ima partikularna rješenja oblika x^λ i $(\ln x)^m x^\lambda$. Zato se rješenje Eulerove jednadžbe može tražiti i u obliku

$$y = x^\lambda,\ x > 0 \text{ ili } y = (-x)^\lambda,\ x < 0,$$

gdje parametar λ treba odrediti. Nakon uvrštavnja ove smjene jednadžba postaje

$$[\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + p_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+2) + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n]x^\lambda = 0.$$

Odavde, vidimo da je funkcija x^λ rješenje Eulerove jednadžbe ako i samo ako je λ korijen jednadžbe

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + p_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+2) + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0,$$

koja se naziva *karakteristična jednadžba* Eulerove jednadžbe. U odnosu na prirodu korijena, razlikuju se sljedeći slučajevi:

(i) Ako je λ realan korijen, rješenje je x^λ.

(ii) Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ prost kompleksan korijen, onda Eulerova jednadžba ima linearno nezavisna rješenja

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x) \text{ i } x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

(iii) Ako je λ realan korijen reda m, onda diferencijalna jednažba ima linearno nezavisna rješenja $x^\lambda, x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{m-1} x$.

(iv) Ako je λ kompleksan broj reda m, onda su linearno nezavisna rješenja data sa:

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \ldots, x^\alpha \ln^{m-1} x \cos(\beta \ln x),$$
$$x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \ldots, x^\alpha \ln^{m-1} x \sin(\beta \ln x).$$

Kao što smo radili u slučaju nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe sa konstantnim koeficijentima, tako i ovdje određujemo partikularno rješenje.

Primjer 2.4.21. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \text{ za } x > 0.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $x = e^t$. Tada je

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t e^{-t},$$

$$y''_x = (y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = e^{-2t}(y''_t - y'_t).$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo da je

$$e^{2t}(y''_t - y'_t)e^{-2t} - 2e^t y'_t e^{-t} + 2y = 0 \text{ ili}$$

$$y''_t - 3y'_t + 2y = 0.$$

Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$ pa je opće rješenje dato sa

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Kako je $x = e^t$, to je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa $y = C_1 x + C_2 x^2$. ♦

Primjer 2.4.22. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0 \textit{ za } x > 0.$$

Rješenje. Potražimo rješenje u obliku $y = x^\lambda$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo da je $[\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 5]\, x^\lambda = 0$. Rješenja jednadžbe $\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 5 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ su $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, pa je opće rješenje dato sa

$$y = x^2(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x).$$

♦

Primjer 2.4.23. *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$(1 - x^2)y'' - xy' - k^2 y = 0$$

smjenom $t'_x = u(x)$.

Rješenje. Imamo da je

$$\begin{aligned} y'_x =& y'_t \cdot t'_x = y'_t u \\ y''_x =& \frac{d}{dx}(y'_t u) = \frac{dy'_t}{dx} u(x) + \frac{du}{dx} y'_t = \\ =& \frac{dy'_t}{dt}\frac{dt}{dx} u + \frac{du}{dx} y'_t = \\ =& y''_t u^2 + u'_x y'_t \end{aligned}$$

Uvrštavanjem, polazna jednadžba se svodi na

$$(1 - x^2)u^2 y''_t + \left[(1 - x^2)u'_x - ux\right] y'_t - k^2 y = 0.$$

Odaberimo $u(x)$ tako da je koeficijent uz y'_t nula, tj. $(1-x^2)u'_x - ux = 0$. Rješenje ove jednadžbe je

$$u(x) = \frac{C}{\sqrt{|1-x^2|}},$$

pa je $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{C}{\sqrt{|1-x^2|}}$. Jednostavno se vidi da je

$$t(x) = \begin{cases} \int \frac{C dx}{\sqrt{1-x^2}} = C \arcsin x, & |x| < 1; \\ \int \frac{C dx}{\sqrt{x^2-1}} = C \ln \left|2x + 2\sqrt{x^2-1}\right|, & |x| > 1. \end{cases}$$

Datom smjenom za $C = 1$ polazna jednadžba se svodi na jednadžbu

$$\begin{aligned} y''_t - k^2 y &= 0 \quad |x| < 1; \\ y''_t + k^2 y &= 0 \quad |x| > 1, \end{aligned}$$

čija su rješenja data sa

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}, \ x = \sin t, \qquad |x| < 1 \\ y &= C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \ x = e^{-t} + \frac{e^t}{4}, \qquad |x| > 1 \end{aligned}$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{k \arcsin x} + C_2 e^{-k \arcsin x}, & |x| < 1; \\ C_1 \cos \left(k \ln \left|2x + 2\sqrt{x^2-1}\right|\right) + C_2 \sin \left(k \ln \left|2x + 2\sqrt{x^2-1}\right|\right), & |x| > 1. \end{cases}$$

♦

Primjer 2.4.24. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$2xy'' + y' - 2y = 0.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $x = \varphi(t)$, gdje ćemo $\varphi(t)$ pogodno odabrati. Tada je

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{\varphi'(t)} \\ y''_x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(y'_t \cdot t'_x\right) = \frac{d}{dx}\left(y'_t\right) t'_x + y'_t \frac{d}{dx}\left(t'_x\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(y'_t\right) \cdot t'_x \cdot t'_x + y'_t \cdot t''_x = \\ &= y''_t \cdot t'^2 + y'_t t''_x = \frac{y''_t}{\varphi^2(t)} - y'_t \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} = \frac{\varphi'(t) y''_t - \varphi''(t) y'_t}{\varphi'^3(t)}, \end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned} t'_x =& \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)} \\ t''_x =& \frac{d}{dx}(t_x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\right) t'_x = -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \end{aligned}$$

Uvrštavajući y_x i y''_x u polaznu jednadžbu dobivamo

$$\begin{gathered} 2\varphi\left[\frac{\varphi'(t)y''_t - \varphi''(t)y'_t}{\varphi'^3(t)}\right] + \frac{y'_t}{\varphi'(t)} - 2y = 0 \text{ ili} \\ 2\varphi(t)\varphi'(t)y''_t - \left[2\varphi(t)\varphi''(t) - \varphi'^2(t)\right] y'_t - 2y\varphi'^3(t) = 0. \end{gathered}$$

Odaberimo funkciju $\varphi(t)$ tako da je koeficijent uz y'_t nula. Tada je

$$2\varphi(t)\varphi''(t) - \varphi'^2(t) = 0.$$

Da bismo riješili ovu jednadžbu uvedimo smjenu $\varphi'(t) = u$. Tada je

$$\varphi''(t) = \frac{d\varphi'(t)}{dt} = \frac{d\varphi'(t)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{d\varphi} \cdot u.$$

Tada se posljednja jednadžba svodi na

$$2\varphi \cdot \frac{du}{d\varphi} \cdot u - u^2 = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je $u^2 = |C|\varphi$. Uzmimo da je $C = 1$. Kako je $u = \varphi'$, to je $\varphi'_t = \sqrt{\varphi}$. Opće rješenje ove jednadžbe je

$$2\sqrt{\varphi} = t + D.$$

Odaberimo da je $D = 0$ i stavimo da je $|x| = \varphi(t) = \dfrac{t^2}{4}$. Ako je $x \geq 0$, poslije ove smjene polazna jednadžba se svodi na

$$\begin{gathered} 2 \cdot \frac{t^2}{4} \cdot \frac{2t}{4} \cdot y'' - 2y\left(\frac{2t}{4}\right)^3 = 0 \text{ ili} \\ y'' - y = 0. \end{gathered}$$

Opće rješenje ove jednadžbe je $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Ako je $x \leq 0$, ovom smjenom polazna jednadžba se svodi na

$$\begin{gathered} 2 \cdot \frac{t^2}{4} \cdot \frac{2t}{4} \cdot y'' + 2y\left(\frac{2t}{4}\right)^3 = 0 \text{ ili} \\ y'' + y = 0. \end{gathered}$$

Opće rješenje ove jednadžbe je $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}, & x \geq 0; \\ C_1 \cos\left(2\sqrt{-x}\right) + C_2 \sin\left(2\sqrt{-x}\right), & x \leq 0. \end{cases}$$

♦

2.4.6.2 Transformacija nepoznate funkcije (snižavanje reda)

Ovdje ćemo pokazati da ukoliko znamo neka linearno nezavisna rješenja jednadžbe (2.8), onda pomoću tih rješenja možemo sniziti red te jednadžbe. Neka su funkcije $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ neprekidne na (a, b) i neka je $y_1(x)$ partikularno rješenje za koje je $y_1(x)$ nije identički jednak nuli na (a, b). Uvedimo novu funkciju $u(x)$ na sljedeći način

$$y(x) = y_1(x) \int u(x)dx, \quad \text{tj. } u(x) = \left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)'.$$

Odavde imamo,

$$\begin{aligned} y' &= y_1'(x) \int u(x)dx + y_1 u, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} \int udx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} u + \cdots + y_1 u^{(n-1)}, \end{aligned}$$

sada je

$$L(y) = L(y_1) \int udx + y_1(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-2}(x)u' + a_{n-1}(x)u.$$

Kako je $L(y_1) = 0$, onda je funkcija $y(x)$ je rješenje jednadžbe (2.8) ako i samo ako je funkcija $u(x)$ rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe $(n-1)-$tog reda

$$y_1(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-2}(x)u' + a_{n-1}(x)u = 0$$

odnosno jednadžbe

$$u^{(n-1)} + b_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-2}(x)u' + b_{n-1}u = 0 \tag{2.17}$$

gdje su $b_i(x) = \frac{a_i(x)}{y_1(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$ neprekidne funkcije na (a, b), osim eventualno u tačkama u kojima je $y_1(x)$ jednak nuli.

Sada ćemo vidjeti kakva je veza između fundamentalnih skupova rješenja jednadžbi (2.8) i (2.17).

Tvrdnja 2.4.4. *Ako su funkcije $u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x)$ fundamentalni skup rješenja jednadžbe (2.17), onda su funkcije*

$$y_1(x), y_1(x) \int u_2(x)dx, \ldots, y_1(x) \int u_n(x)dx$$

fundamentalni skup rješenja jednadžbe (2.8).

Dokaz. Funkcije

$$y_1(x), y_1(x)\int u_2(x)dx, \ldots, y_1(x)\int u_n(x)dx$$

su rješenja jednadžbe (2.8). Pokažimo da su ta rješenja linearno nezavisna. U tom cilju pretpostavimo suprotno, tj. da su funkcije $y_1(x), y_1(x)\int u_2(x)dx, \ldots$ $\ldots, y_1(x)\int u_n(x)dx$ linearno zavisne. Onda imamo

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_1(x)\int u_2(x)dx + \cdots + \alpha_n y_1(x)\int u_n(x)dx \equiv 0,$$

pri čemu $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, jer bi u protivnom moralo biti $\alpha_1 = 0$, jer $y_1(x)$ nije identički jednako nuli na (a, b). Zadnji identitet podijelimo sa $y_1(x)$ zatim diferenciramo tako dobiveni identitet, imamo

$$\alpha_2 u_2(x) + \cdots + \alpha_n(x) u_n(x) \equiv 0,$$

a ovo je suprotno polaznoj pretpostavci o linearnoj nezavisnosti funkcija $u_2(x)$, $\ldots, u_n(x)$. Dakle, funkcije

$$y_1(x), y_1(x)\int u_2(x)dx, \ldots, y_1(x)\int u_n(x)dx$$

moraju biti linearno nezavisne, zato čine fundamentalni skup rješenja jednadžbe (2.17). □

Sljedeća Tvrdnja govori o načinu snižavanja reda jednadžbe (2.8) ako je poznato k linearno nezavisnih partikularnih rješenja ove jednadžbe.

Tvrdnja 2.4.5. *Ako znamo k linearno nezavisnih rješenja $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x) \in C^{(n)}(a, b)$ diferencijalne jednadžbe (2.8), onda se red jednadžbe može sniziti za k, pri čemu je dobivena diferencijalna jednadžba $(n-k)-$tog reda i ostaje homogena i linearna.*

Dokaz. Smjenom $y(x) = y_1(x)\int u(x)dx$ jednadžba (2.8) se transformira u diferencijalnu jednadžbu (2.17) koja je $(n-1)-$reda i po prethodnoj Tvrdnji ima $(k-1)$ poznatih rješenja

$$u_2(x) = \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)', \ldots, u_k(x) = \left(\frac{y_k(x)}{y_1(x)}\right)'.$$

Ova rješenja su linearno nezavisna. Naime, ako nisu onda iz

$$\alpha_2 u_2(x) + \cdots + \alpha_k u_k(x) \equiv 0, \;\; (\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0),$$

integracijom, dobivamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 \frac{y_2(x)}{y_1(x)} + \cdots + \alpha_k \frac{y_k(x)}{y_1(x)} \equiv 0,$$

tj.

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_k y_k(x) \equiv 0,$$

a ovo je nemoguće zbog linearne nezavisnosti rješenja $y_1(x), \ldots, y_k(x)$. Budući da je $u_2(x) = \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{W(y_2, y_1)}{y_1^2} \neq 0$ na (a, b), novom smjenom $u(x) = u_2(x) \int v(x)dx$, diferencijalna jednadžba (2.17) se transformira u homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu $(n-2)-$og reda sa poznatih $(k-2)-$ linearno nezavisnih rješenja

$$v_3(x) = \left(\frac{u_3(x)}{u_2(x)}\right)', \ldots, v_k(x) = \left(\frac{u_k(x)}{u_2(x)}\right)'.$$

Nastavljajući ovako dalje, poslije k koraka dolazimo do homogene linearne diferencijalne jednadžbe $(n-k)-$tog reda. □

2.4.6.3 Homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda

Ovdje ćemo pokazati neke tehnike za rješavanje diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Prvo ćemo posmatrati slučaj svođenja na jednadžbu koja ne sadrži prvi izvod.

Slučaj 2.4.5. *Posmatrajmo homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda*

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x) = 0.$$

Smjenom $y = \alpha(x)z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija, ova jednažba se svodi na

$$\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z'' + p(x)\left[\alpha'(x)z + \alpha(x)z'\right] + q(x)\alpha(x)z = 0 \quad \textit{ili}$$

$$z'' + \left[\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x)\right] z' + \left[\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x)\right] z = 0.$$

Odaberimo $\alpha(x)$ tako da koeficijent uz z' bude nula:

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je $\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}$. Kako je

$$\alpha'(x) = -\frac{p(x)}{2}e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}, \quad \alpha''(x) = \left[-\frac{p(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{2}\right] e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx},$$

dobivamo jednadžbu

$$z'' + \left[-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p^2(x)}{2} + q(x)\right] z = 0.$$

Dakle, smjenom

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z$$

linearna homogena diferencijalna jednadžba se svodi na jednadžbu

$$z'' + I(x)z = 0$$

gdje je

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x).$$

Ovim postupkom smo linearnu jednadžbu drugog reda sveli na jednadžbu drugog reda u kojoj nema prvog izvoda. Funkcija $I(x)$ naziva se invarijantom jednadžbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Jasno je da ako možemo integrirati jednadžbu $z'' + I(x)z = 0$, onda možemo integrirati i polaznu jednadžbu. Ako je $I(x) = const.$ ili $I(x) = \dfrac{C}{(x-a)^2}$ onda se jednadžba $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ može svesti na linearnu diferencijalnu jednadžbu sa konstantnim koeficijentima ili Eulerovu diferencijalnu jednadžbu.

Sad ćemo vidjeti kako možemo naći opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda ako je poznat jedan njen partikularni integral(rješenje)

Slučaj 2.4.6. *Posmatrajmo homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda*

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Neka je poznato jedno partikularno rješenje $y_1(x)$. Smjenom $y = y_1 \int u dx$, gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija, ova jednažba se svodi na

$$L(y) = \int u dx + [2y' + p(x)y_1]\, u + y_1 u' = 0.$$

Kako je $L(y_1) = 0$ dobivamo da je

$$[2y' + p(x)y_1]\, u + y_1 u' = 0 \qquad \textit{ili}$$

$$u' + \left[\frac{2y'}{y_1} + p(x)\right] u = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$u(x) = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Uzmimo da je $C = 1$, tada dobivamo da je drugo partikularno rješnje dato sa

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

Čitatelju se ostavlja da dokaže da su y_1 *i* y_2 *linearno nezavisna rješenja, tj. da čine fundamentalni skup rješenja, što se jednostavno dokazuje sa* $W(y_1, y_2) \neq 0$ *za svako* $x \in (a, b)$. *Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa*

$$y = y_1 \left[C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx \right].$$

Primjer 2.4.25. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Rješenje. Jednostavno se vidi da je $y_1 = x$ jedno partikularno rješenje polazne jednadžbe. Kako je $p(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$, to je drugo partikularno rješenje

$$y_2 = x \int \frac{e^{\frac{2xdx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{(1 - x^2)x^2} = x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right).$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je

$$y = x \left[C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) \right].$$

♦

Primjer 2.4.26. *Naći opće rješenje diferencijalne jednažbe*

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 3)y = 0.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z = e^{2 \int x dx} z = z e^{x^2}, \; z = z(x).$$

Tada se jednadžba svodi na

$$z'' - z = 0,$$

čije je opće rješenje dato sa $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, pa je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$y = C_1 e^{x^2 + x} + C_2 e^{x^2 - x}.$$

♦

Primjer 2.4.27. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(x - 1)y'' - (x + 1)y' + 2y = 0,$$

ako se zna da ima partikularno rješenje u obliku polinoma.

Rješenje. Pretpostavimo da je $y_p = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Tada je

$$\begin{aligned} y_p' &= nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \\ y_p'' &= n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobijemo

$$(x-1)\left[n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}\right] -$$
$$(x+1)\left[nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right] + 2\left[x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right] = 0.$$

Grupisanjem, dobivamo da je koeficijent uz najveći stepen jednak $-n+2$, odakle slijedi da je $n = 2$. Ako potražimo partikularno rješenje u obliku $y_1 = x^2 + a_1x + a_2$, dobivamo da je $a_1 = 0$ i $a_2 = 1$, pa je jedno partikularno rješnje $y_1 = x^2 + 1$. Drugo partikularno rješenje je dato sa

$$\begin{aligned} y_2 &= \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = (x^2+1) \int \frac{e^{\frac{x+1}{x-1}}}{(x^2+1)^2} dx \\ &= (x^2+1) \int \frac{e^{x+\ln(x-1)^2}}{(x^2+1)^2} dx = (x^2+1) \int \left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)' dx = e^x. \end{aligned}$$

Opće rješenje je dato sa

$$y = C_1(x^2+1) + C_2e^x.$$

♦

Primjer 2.4.28. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

ako se zna da ima dva linearno nezavisna partikularna rješenja u obliku polinoma.

Rješenje. Stavimo da je $y_p = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Tada je

$$\begin{aligned} y_p' &= nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \\ y_p'' &= n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}. \\ y_p''' &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_1(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + \cdots + a_{n-3}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$(x^2-2x+2)\left[n(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_1(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + \cdots + a_{n-3}\right]$$
$$-x^2\left[n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}\right]$$
$$+2x\left[nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right] - 2\left[x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right] = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenta uz najveći stepen, imamo da je $-n^2 + 3n - 2 = 0 \Leftrightarrow n_1 = 1,\ n_2 = 2$. Pa su partikularna rješenja oblika

$$y_1 = x + a_1, \quad y_2 = x^2 + b_1x + b_2.$$

Uvrštavanjem ovih funkcija u polaznu jednadžbu nije teško vidjeti da je $a_1 = 1$ i $b_1 = b_2 = 0$, pa je $y_1 = x, \quad y_2 = x^2$. Uvedimo sada smjenu $y = y_1 u = xu, \quad u = u(x)$. Tada je

$$y' = u + u'x, \quad y'' = 2u' + xu'', \quad y''' = 3u'' + xu'''.$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu, imamo

$$u'''(x^3 - 2x^2 + 2x) + u''(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6) = 0 \text{ ili}$$

$$\frac{du''}{u''} = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx.$$

Integriranjem obje strane dobivamo da je

$$\ln u'' = \int \left(1 + \frac{-x^2 + 4x - 6}{x^3 - 2x^2 + 2x}\right) dx = x + \ln \frac{|C||x^2 - 2x + 2|}{|x^3|}$$

ili

$$u'' = \frac{|C||x^2 - 2x + 2|}{|x^3|} e^x = \frac{|C|(x^2 - 2x + 2)}{x^2|x|} e^x.$$

Ponovnim integriranjem obje strane dobivamo da je

$$u' = \operatorname{sgn}(x)|C| \int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} e^x dx + C_2 = C_1 \frac{(x-1)e^x}{x^2} + C_2.$$

Na osnovu ovoga imamo da je

$$u = \int \left(C_1 \frac{(x-1)e^x}{x^2} + C_2\right) dx + C_3 = C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 x + C_3.$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2 + C_3 x.$$

♦

Sada ćemo vidjeti kako se svakoj linearnoj homogenoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda sa neprekidnim koeficijentima na (a, b) pridružuje *autoadjungirana* jednadžba.

Slučaj 2.4.7. *Jednadžba oblika*

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$$

ili

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne funkcije naziva se autoadjungirana(autokonjugirana) jednadžba drugog reda. Ove jednadžbe javljaju se u teoriji rubnih problema.

U tom cilju posmatrajmo jednadžbu

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

sa neprekidnim koeficijentima na (a, b), *pri čemu je* $p_0(x) \neq 0$ *na* (a, b). *Pomnožimo ovu jednadžbu sa funkcijom* $\mu(x)$. *Imamo*

$$p_0(x)\mu(x)y'' + p_1(x)\mu(x)y' + p_2(x)\mu(x)y = 0.$$

Izaberimo $\mu(x)$ *tako da je*

$$p_1(x)\mu(x) = (p_0(x)\mu(x))'.$$

Diferenciranjem desne strane dobivamo

$$p_0(x)\mu'(x) + (p_0'(x) - p_1(x))\mu(x) = 0.$$

Odavde dobivamo

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}} dx.$$

Dakle, ako polaznu jednadžbu pomnožimo sa dobivenom funkcijom $\mu(x)$ *dobivamo jednadžbu u obliku*

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$

gdje su

$$p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}}, \quad q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}},$$

gdje su $p(x)$ *i* $q(x)$ *neprekidne funkcije na* (a, b) *i* $p(x) > 0$.

Da bismo dobili opće rješenje nehomogene jednadžbe trebamo, pored općeg rješenja homogene, znati jedan partikularni integral nehomogene diferencijalne jednadžbe. U nekim slučajevima može se partikularno rješenje odrediti iz oblika nehomogene diferencijalne jednadžbe. Međutim, postoje dva opća načina za nalaženje partikularnog rješenja nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe. Prvi način je poznat kao *Lagrangeov metod varijacije konstanti*, a drugi način je *Metod Cauchyeve funkcije*.

Ono što je zajedničko za oba načina je da se polazi od općeg rješenja homogene diferencijalne jednažbe. Dakle, prvo treba naći fundamentalni skup rješenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednadžbe.

Pretpostavimo da funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ čine fundamenatalni skup rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n-$tog reda i da je opće rješenje

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \tag{2.18}$$

Prvo ćemo opisati Lagrangeov metod varijacije konstanti.

2.4.6.4 Lagrangeov metod varijacije konstanti

Prvo se u općem rješenju (2.18) konstante C_i zamijene diferencijabilnim funkcijama $C_i(x)$ i to tako da funkcija

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x). \tag{2.19}$$

bude partikularno rješenje jednadžbe $L(y) = f(x)$. Budući da postoji samo jedan uvjet između nepoznatih funkcija $C_i(x)$ izražen ovom diferencijalnom jednadžbom treba nam još $n-1$ uvjeta da bi se riješio postavljeni problem.

Diferenciranjem relacije (2.19), imamo

$$\begin{aligned} y' &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x) + \\ &+ C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x), \end{aligned} \tag{2.20}$$

Prvi uvjet dobivamo tako da u prethodnoj relaciji izjednačimo sa nulom sumu svih sabiraka koji u sebi sadrže $C_i'(x)$ (što bi inače bilo nula da su $C_i(x)$ konstante):

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Sada relacija (2.20) postaje

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)$$

i njenim ponovnim diferenciranjem dobivamo

$$\begin{aligned} y'' &= C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x) + \\ &+ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x), \end{aligned}$$

Drugi uvjet dobivamo tako što ponovo u prethodnoj relaciji izjednačimo s nulom sumu sabiraka koji u sebi sadrže $C_i'(x)$:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sada se vratimo u y'', ponovo diferenciramo i na isti način dobijemo treći uvjet:

$$C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) = 0.$$

Nastavljajući ovako dalje, imamo

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + \\ &+ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x). \end{aligned}$$

Postupajući na isti način, dobivamo $(n-1)-$i uvjet:

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Ponovnim diferenciranjem izraza koji je preostao i relaciji za $y^{(n-1)}$ dobivamo

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + \\ &+ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Sada izraze za y', y'', $\ldots, y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ uvrstimo u jednadžbu

$$L(y) = f(x).$$

Koristeći to što su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ partikularna rješenja homogene jednadžbe, tj. $L(y_1) = L(y_2) = \cdots = L(y_n) = 0$, dobivamo $n-$ti uvjet:

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Na opisani način dobivamo sistem od n diferencijalnih jednadžbi prvog reda po $C_i'(x)$ koji glasi

$$\begin{array}{ll} C_1'(x) & y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x) & y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ C_1'(x) & y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) = 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x) & y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x) & y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{array} \tag{2.21}$$

Determinanta sistema je upravo Wronskian fundamentalnog skupa rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pa je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$, pa sistem ima jedinstveno rješenje po $C_i'(x)$. Rješavajući dobiveni sistem po $C_i'(x)$,imamo

$$C_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \tag{2.22}$$

gdje je

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & f(x) & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

Funkcija na desnoj strani jednakosti (2.22) je neprekidna na (a, b). Sada iz (2.22) dobivamo

$$C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + C_i, \quad i = 1, ..., n,$$

gdje su C_i proizvoljne konstante a x_0 bilo koja tačka iz intervala (a, b). Ako dobivene funkcije $C_i(x)$ uvrstimo u (2.19), imamo

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + C_i \right) y_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_i(x)}{W(x)} dx \right) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ako u (2.23) stavimo da je da je $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ dobivamo partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_i(x)}{W(x)} dx \right) y_i(x).$$

Prema tome rješenje (2.23) je upravo opće rješenje polazne nehomogene jednadžbe definirano u oblasti $a < x < b$, $|y| < \infty$, $|y'| < \infty, ..., |y^{(n-1)}| < \infty$.

Primjer 2.4.29. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2$$

ako je $y_1 = x^2$ partikularno rješnje odgovarajuće homogene jednadžbe.

Rješenje. Drugo partikularno rješenje pripadne homogene jednadžbe je dato sa

$$\begin{aligned} y_2 =& x^2 \int \frac{e^{\int \frac{2x-1}{x(x-1)} dx}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{e^{\ln|x(x-1)|}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{|x(x-1)|}{x^4} dx = \\ =& \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty); \\ x - \frac{1}{2}, & x \in (0, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Podijelimo obje strane polazne jednadžbe sa $x(x-1) \neq 0$ imamo

$$y'' - \frac{2x-1}{x(x-1)} y' + \frac{2}{x(x-1)} y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x(x-1)}.$$

Opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe je dato sa

$$y_h(x) = C_1 x^2 + C_2 \left(-x + \frac{1}{2} \right).$$

Metodom varijacije konstanti potražimo opće rješenje u obliku

$$y(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)\left(-x+\frac{1}{2}\right),$$

gdje su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ funkcije koje ćemo odrediti tako da je zadovoljen sljedeći sistem

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{2x^3-3x^2}{x(x-1)}, \end{aligned}$$

gdje je $y_1 = x^2$ i $y_2 = -x+\frac{1}{2}$. Ovaj sistem se svodi na

$$\begin{aligned} C_1'x^2 + C_2'\left(-x+\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ 2C_1'x - C_2' &= \frac{2x^3-3x^2}{x(x-1)}, \end{aligned}$$

Izračunajmo determinante ovog sistema:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} x^2 & -x+\frac{1}{2} \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = x^2 - x \\ W_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & -x+\frac{1}{2} \\ \frac{2x^3-3x^2}{x(x-1)} & -1 \end{vmatrix} = \frac{x(2x-3)(2x-1)}{2(x-1)}. \\ W_2(x) &= \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{2x^3-3x^2}{x(x-1)} \end{vmatrix} = \frac{x^3(2x-3)}{x-1}. \end{aligned}$$

Tada je

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = 2 - \frac{1}{2(x-1)^2}, \quad C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 2x - \frac{1}{(x-1)^2} + 1.$$

Integriranjem dobivamo da je

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int\left(2 - \frac{1}{2(x-1)^2}\right)dx = 2x + \frac{1}{2(x-1)} + A_1 \\ C_2(x) &= \int\left(2x - \frac{1}{(x-1)^2} + 1\right)dx = x^2 + x + \frac{1}{x-1} + A_2 \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga, imamo da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$\begin{aligned} y(x) =& C_1(x)x^2 + C_2(x)\left(-x+\frac{1}{2}\right) = \\ =& \left[2x + \frac{1}{2(x-1)} + A_1\right]x^2 + \left[x^2 + x + \frac{1}{x-1} + A_2\right]\left(-x+\frac{1}{2}\right) = \\ =& A_1x^2 + A_2\left(-x+\frac{1}{2}\right) + x^3 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♦

Primjer 2.4.30. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$(x^2-2)y'''-2xy''-(x^2-2)y'+2xy=2x-\frac{4}{x}.$$

Rješenje. Potražimo prvo opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

$$(x^2-2)y'''-2xy''-(x^2-2)y'+2xy=0. \tag{2.24}$$

Zbog simetrije uvedimo novu varijablu $v=y''-y$. Tada jednadžba postaje $(x^2-2)v'-2xv=0$. To je diferencijalna jednadžba kod koje se promjenljive mogu razdvojiti, pa je možemo napisati u obliku

$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{x^2-2}, \quad x^2-2\neq 0.$$

Integriranjem obje strane ove jednadžbe dobivamo

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{2xdx}{x^2-2}\Rightarrow \ln|v|=\ln|x^2-2|+\ln|B_1| \quad (B_1\neq 0)\Rightarrow |v|=B_1|x^2-2|.$$

Dakle, njeno opće rješnje je dato sa

$$v=B_2(x^2-2),$$

gdje je B_2 proizvoljna konstanta. Korištenjem smjene $y''-y=v$ imamo da je

$$y''-y=B_2(x^2-2).$$

Odgovarajuća homogena jednadžba je $y''-y=0$. Njena karakteristična jednadžba je $\lambda^2-1=0$, odakle slijedi da je $\lambda_{1,2}=\pm 1$, pa je njeno opće rješenje dato sa $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Da bismo našli opće rješenje potražimo jedno partikularno rješenje nehomogene jednadžbe u obliku $y_1=Dx^2+Ex+F$. Uvrštavanjem ove funkcije u jednadžbu $y''-y=B_2(x^2-2)$, te izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobiva se da je $D=-B_2$ i $E=F=0$, pa je partikularno rješenje $y_1=-B_2x^2$. Zamijenjujući B_2 sa $(-C_3)$ dobivamo da je opće rješenje jednadžbe (2.24) dato sa

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3x^2.$$

U ovom slučaju funkcije $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ i $y_3=x^2$ čine fundamentalan skup rješenja. Podijelimo obje strane polazne jednadžbe sa x^2-2, dobivamo jednadžbu

$$y'''-\frac{2x}{x^2-2}y''-y'+\frac{2x}{x^2-2}y=\frac{2}{x}.$$

Potražimo opće rješenje polazne nehomogene jednadžbe metodom varijacije konstanti. Opće rješenje ćemo potražiti u obliku

$$y(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x}+C_3(x)x^2,$$

gdje su $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ nepoznate funkcije koje zadovoljavaju sistem

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' &= 0 \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'x^2 &= 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + 2C_3'x &= 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} + 2C_3' &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Izračunajmo determinante ovog sistema:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & x^2 \\ e^x & -e^{-x} & 2x \\ e^x & e^{-x} & 2 \end{vmatrix} = e^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & x^2 \\ 1 & -1 & 2x \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x^2-2) \\ W_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & x^2 \\ 0 & -e^{-x} & 2x \\ \frac{2}{x} & e^{-x} & 2 \end{vmatrix} = 2(x+2)e^{-x}. \\ W_2(x) &= \begin{vmatrix} e^x & 0 & x^2 \\ e^x & 0 & 2x \\ e^x & \frac{2}{x} & 2 \end{vmatrix} = 2(x-2)e^{x}. \\ W_3(x) &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = -\frac{4}{x}. \end{aligned}$$

Tada je

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{(x+2)e^{-x}}{x^2-2}, \quad C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{(x-2)e^{x}}{x^2-2}, \quad C_3' = \frac{W_3(x)}{W(x)} = -\frac{2}{x(x^2-2)}$$

Integriranjem, dobivamo da je

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{(x+2)e^{-x}}{x^2-2}dx + A_1 \\ C_2(x) &= \int \frac{(x-2)e^{x}}{x^2-2}dx + A_2 \\ C_3(x) &= -\int \frac{2}{x(x^2-2)}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2| + A_3 \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga imamo da je opće rješenje polazne jednadžbe dato sa

$$\begin{aligned}
y(x) =& C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)x^2 = \\
=& \left[\int \frac{(x+2)e^{-x}}{x^2-2}dx + A_1\right]e^x + \left[\int \frac{(x-2)e^x}{x^2-2}dx + A_2\right]e^{-x} \\
&+ \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2| + A_3\right]x^2 = \\
=& A_1e^x + A_2e^{-x} + A_3x^2 + \int \frac{(x+2)e^{-x}}{x^2-2}dx + \int \frac{(x-2)e^x}{x^2-2}dx \\
&+ \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2|.
\end{aligned}$$

♦

2.4.6.5 Cauchyev metod

Sada ćemo vidjeti drugi način nalaženja partikularnog rješenja nehomogene diferencijalne jednadžbe (2.7) u slučaju kad je poznat fundamentalni skup rješenja pridružene homogene diferencijalne jednadžbe. U tom smislu neka je $y_1, y_2, ..., y_n$ dat fundamentalni skup rješenja homogene diferencijalne jednadžbe (2.8). Opće rješenje jednadžbe (2.8) je dato sa

$$y(x) = y_1(x)C_1 + y_2(x)C_2 + ... + y_n(x)C_n.$$

Sada ćemo naći rješenje diferencijalne jednadžbe (2.8) koje za zadovoljava početne uvjete

$$y(x) = 0, y'(x) = 0, \dots, y^{(n-2)}(x) = 0, y^{(n-1)}(x) = 1 \text{ za } x = \alpha, \tag{2.25}$$

gdje je $x = \alpha$ bilo koja zadana tačka iz intervala (a, b), tj. iz intervala neprekidnosti koeficijenata i desne strane jednadžbe (2.7). Ovo rješenje zavisi od α pa ćemo ga označiti sa $y = \varphi(x, \alpha)$. Funkcija $\varphi(x, \alpha)$ je funkcija nezavisno promjenljive x i parametra α, definirana i neprekidna na $a < x < b$ i $a < \alpha < b$ i ima neprekidne parcijalne izvode po x do n-tog reda uključno. Kako je funkcija $y = \varphi(x, \alpha)$, posmatrana kao funkcija od x, rješenje jednadžbe $L(y) = 0$ za svako $\alpha \in (a, b)$, onda vrijedi $L(\varphi(x, \alpha)) \equiv 0$, $a < x < b$, $a < \alpha < b$. Osim toga, zbog početnih uvjeta (2.25), funkcija $\varphi(x, \alpha)$ kao funkcija od x zadovoljava sljedeće uvjete:

$$\varphi(\alpha, \alpha) = 0, \varphi'(\alpha, \alpha) = 0, \dots, \varphi^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0, \varphi^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = 1. \tag{2.26}$$

Ovdje je

$$\varphi^{(k)}(\alpha, \alpha) = \left[\frac{d^k\varphi(x, \alpha)}{dx^k}\right]_{x=\alpha}.$$

U nastavku ćemo uvjete (2.26) pisati u obliku

$$\varphi(x, x) = 0, \varphi'(x, x) = 0, \dots, \varphi^{(n-2)}(x, x) = 0, \varphi^{(n-1)}(x, x) = 1, \tag{2.27}$$

gdje je

$$\varphi^{(k)}(x,x) = \left[\frac{d^k\varphi(x,\alpha)}{dx^k}\right]_{\alpha=x}.$$

Posmatrajmo funkciju

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha, \tag{2.28}$$

gdje je x_0 proizvoljan fiksan broj između brojeva a i b. Pokazat ćemo da je funkcija (2.28) partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (2.7) koje zadovoljava početne uvjete

$$\psi(x) = 0, \psi'(x) = 0, \ldots, \psi^{(n-2)}(x) = 0, \psi^{(n-1)}(x) = 0, \quad \text{za } x = x_0. \tag{2.29}$$

Korištenjem formule

$$\frac{d}{dy}\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right] = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)f[\beta(y),y] - \alpha'(y)f[\alpha(y),y]$$

nakon diferenciranja funkcije (2.28), imamo da je

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha)d\alpha\right] = \int_{x_0}^{x} \varphi'_x(x,y)d\alpha + \varphi(x,x). \tag{2.30}$$

Korištenjem uvjeta (2.27) imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dx} &= \int_{x_0}^{x} \varphi'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + \varphi(x,x)f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\
\frac{d^2\psi}{dx^2} &= \int_{x_0}^{x} \varphi''(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + \varphi'(x,x)f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi''(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\
&\vdots \\
\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}} &= \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + \varphi^{(n-1)}(x,x)f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha \\
\frac{d^{n}\psi}{dx^{n}} &= \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + \varphi^{(n)}(x,x)f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + f(x).
\end{aligned}$$

Sada funkciju ψ zajedno sa prethodno izračunatim izvodima uvrstimo u lijevu stranu jednadžbe (2.7), imamo

$$\begin{aligned}
L(\psi) = \int_{x_0}^{x} \varphi^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + f(x) + p_1(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + \cdots + \\
p_{n-1}(x)\int_{x_0}^{x} \varphi'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha + p_n(x)\int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,
\end{aligned}$$

odnosno

$$L(\psi) = \int_{x_0}^{x} \left[\varphi^{(n)}(x,\alpha) + p_1(x)\varphi^{(n-1)}(x,\alpha) + \cdots + p_{n-1}(x)\varphi'(x,\alpha) + p_n(x)\varphi(x,\alpha)\right] f(\alpha)d\alpha$$

ili

$$L(\psi) = \int_{x_0}^{x} L[\varphi(x,\alpha)]f(\alpha)d\alpha + f(x)$$

S obzirom da je $L[\varphi(x,\alpha)]f(\alpha) \equiv 0$, imamo $L(\psi) = f(x)$ $(a < x < b)$. Znači da je funkcija ψ definirana sa (2.28) partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (2.7) koje zadovoljava početne uvjete (2.29). Formula (2.28) se naziva *Cauchyeva formula* za homogenu diferencijalnu jednadžbu. Koristeći partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe (2.7), dato Cauchyevom formulom, možemo napisati opće rješenje jednadžbe (2.7) u obliku

$$y(x) = y_h(x) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,$$

gdje je y_h opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe (2.8).

Primjer 2.4.31. *Koristeći Cauchyev metod, naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$x^2(x^2-1)x'' - x(x^2-2)y' + (x^2-2)y = x^3$$

za $|x| < 1$.

Rješenje. Jednostavno se vidi da je jedno partikularno rješenje pridružene homogene jednadžbe dato sa $y_1(x) = x$. Partikularno rješenje, linearno nezavisno u odnosu na rješenje $y_1(x)$, je dato sa

$$y_2(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{x^2-2}{x(x^2-1)}dx} dx = x \arcsin x.$$

Prema tome, opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe je

$$y = C_1 x + C_2 x \arcsin x.$$

Odredimo ono rješenje homogene jednadžbe koje zadovoljava početne uvjete

$$y(\alpha) = 0 \ \text{ i } y'(\alpha) = 1.$$

Imamo

$$\begin{aligned} y(\alpha) = C_1\alpha + C_2\alpha \arcsin\alpha &= 0 \\ y'(\alpha) = C_1 + C_2\left(\arcsin\alpha + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Odavde je

$$C_1 = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha},$$

pa je Cauchyeva funkcija

$$\varphi(x,\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}(-x\arcsin\alpha + x\arcsin x).$$

Prema (2.28), partikularno rješenje je

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha) f(\alpha) d\alpha = \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}(-x \arcsin \alpha + x \arcsin x) d\alpha.$$

Pošto je funkcije pod integralom definirana za $x_0 = 0$, odgovarajuće rješenje je

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}(\arcsin x)^2,$$

pa je opće rješenje

$$y = C_1 x + C_2 x \arcsin x - \frac{1}{2}(\arcsin x)^2, \quad |x| < 1.$$

♦

2.4.7 Zadaci za samostalan rad

1. Naći opće rješenje sljedećih Eulerovih diferencijalnih jednadžbi:
   - (i) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$;
   - (ii) $(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$;
   - (iii) $x^2y'' - xy' + y = 6x \ln x$;
   - (iv) $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$;
   - (v) $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$.
2. Pogodnom smjenom funkcije y naći opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:
   - (i) $x^4y'' + 2x^2y' + n^2y = 0$;
   - (ii) $2xy'' + y' - 2y = 0$;
   - (iii) $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$;
   - (iv) $y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
   - (v) $x^4y'' + 2x^3y' - 4y = 1\frac{1}{x}$.
3. Naći opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:
   - (i) $x^2 + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$;
   - (ii) $xy'' + 2y' - xy = e^x$;
   - (iii) $x^4y'' + k^2y = 0$;
   - (iv) $xy'' - y' - 4x^2y = 0$;
   - (v) $(1+x^2)y'' + xy' + y = 0$.

4. Metodom varijacije konstanti naći opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

   (i) $y'' + 4y = 1/\cos 2x$;

   (ii) $y'' + y = \tan x$;

   (iii) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

   (iv) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x$;

   (v) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

5. Naći opće rješenje sljedećih linearnih diferencijalnih jednadžbi ako je poznato jedno partikularno rješenje:

   (i) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0;\ y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$;

   (ii) $(1 - x^2)y'' - xy' + \dfrac{1}{4}y = 0;\ y_1 = \sqrt{1 + x}$;

   (iii) $(\sin x - \cos x)y'' - 2\sin xy' + (\cos x + \sin x)y = 0;\ y_1 = e^x$.

6. Pogodnom smjenom naći opće rješenje sljedećih linearnih diferencijalnih jednadžbi:

   (i) $y'' + 2xy' - 2y = 0$;

   (ii) $(x - 1)y'' - (x + 1)y' + 2y = 0$;

   (iii) $(x^2 - 3x)y'' + (6 - x^2)y' + (3x - 6)y = 0$;

   (iv) $(x^2 - 1)y'' = 6y$;

   (v) $x^2y''' + xy'' - y' = 3x^2$;

   (iv) $y'' + 2xy' + 2y = 2x$;

   (v) $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

7. Riješiti Cauchyev problem

$$y'' - y' + e^{2x}y = e^{2x};$$

$$y(\ln \pi) = 0, \quad y'(\ln \pi) = 0.$$

8. Data je diferencijalna jednadžba

$$y'''(2x - x^2) + y''(x^2 - 2x) + 2y' - 2y = 0.$$

   i) Pokazati da je ona izvod neke jednadžbe nižeg reda.

   ii) Naći njen opći integral.

9. Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(x^3 - 3x^2 + 1)y'' - (x^3 - 6x + 1)y' + (3x^2 - 6x)y = 0.$$

10. Riješiti jednadžbu

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2 + 1),$$

ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_1 = x$ odgovarajuće homogene jednažbe.

11. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0,$$

a potom ispitati da li postoji rješenje Cauchyevog problema

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

2.5 Metod stepenih redova

U ovom poglavlju bavit ćemo se metodom *stepenih redova* za rješavanje linearne homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda sa varijabilnim koeficijentima oblika

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0. \tag{2.31}$$

Funkcije $p(x), q(x)$ i $r(x)$ će biti uglavnom polinomi, iako se ovaj metod može primijeniti i na širu klasu jednadžbi, tj. kod onih jednadžbi oblika (2.31) u kojima su funkcije $p(x), q(x)$ i $r(x)$ analitičke, vidjeti Definiciju 2.5.2.

Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda najviše se pojavljuju u primijenjenoj matematici, posebno prilikom rješavanja nekih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi matematičke fizike drugog reda. Navedimo samo neke od značajnih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

$y'' - xy = 0$ Airyova jednadžba,

$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ Besselova jednadžba,

$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ Chebyshevljeva jednadžba,

$x(1 - x)y'' + [c - (1 + b + 1)x]y' - aby = 0$ Gaussova hipergeometrijska jednadžba,

$y'' - 2xy' + 2py = 0$ Hermiteova jednadžba,

$xy'' + (1 - x)y' + py = 0$ Laguerreova jednadžba,

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ Legendreova jednadžba.

Svaka od navedenih jednadžbi, osim Airyove, u sebi uključuje parametre koji su povezani sa problemima koji su modelirani ovim jednadžbama. Svaka od navedenih jednadžbi može se riješiti metodom stepenih redova.

Zbog jasnoće izlaganja, podsjetimo se nekih osnovnih pojmova iz teorije stepenih redova.

Definicija 2.5.1. *Stepeni red je red oblika*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

gdje su realan broj x_0 i niz realnih brojeva a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ zadani. Za koeficijente a_n, $n = 0, 1, 2 \ldots,$ kažemo da su koeficijenti reda. Nadalje kažemo da je ovo red oko tačke x_0.

Navedimo sada neka svojstva stepenih redova.

(i) Stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *konvergira* u tački x ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Jasno je da red konvergira u tački x_0. Red može konvergirati za svako x, ili može konvergirati za neke vrijednosti x a za druge ne.

(ii) Stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergira *apsolutno* u tački x ako red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ konvergira. Ako red konvergira apsolutno, onda i konvergira oko tačke x_0. Međutim, obratno općenito ne vrijedi.

(iii) Ako red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergira apsolutno za $|x-x_0| < R$ i divergira za $|x-x_0| > R$, onda se R zove *radijus konvergencije.* U slučaju kada red konvergira samo u tački x_0, onda je $R = 0$. U slučaju da red konvergira svuda, tj. za svako x, onda je $R = +\infty$. Radijus konvergencije R se nalazi po formuli

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ili po formuli

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

(iv) Interval $|x-x_0| < R$ zove se *interval konvergencije* stepenog reda. Na ovom intervalu sve operacije, koju budu neophodne za nalaženje rješenja jednadžbe, su dozvoljene. Na krajevima intervala konvergencije, red može i ne mora konvergirati. Da bi se ispitala konvergencija u krajnjim tačkama intervala, uvrsti se direktno $x = -R + x_0$ u red i ispita se konvergencija tako dobivenog reda. Isti postupak se primijeni i za tačku $x = R + x_0$.

(v) Ako je R radijus konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, onda za svako x iz intervala konvergencije $|x-x_0|<R$ suma stepenog reda postoji i sa njom je definirana funkcija

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{za} \quad |x-x_0|<R.$$

Ova funkcija je neprekidna i ima izvode bilo kojeg reda. Izvodi $f'(x), f''(x), \ldots$ se mogu naći diferenciranjem reda na desnoj strani član po član, tj. $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \quad f''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}, \ldots.$ Ovako dobiveni redovi imaju isti radijus konvergencije kao i polazni red.

(vi) U postupku nalaženja rješenja linearnih diferencijalnih jednadžbi metodom stepenih redova, pored diferenciranja stepenog reda, trebat će sabirati, oduzimati, množiti i izjednačavati dva ili više stepenih redova. Sve pobrojane operacije se slično izvode kao i kod polinoma, s tim što se moraju izvoditi na zajedničkom intervalu konvergenicije redova koji učestvuju u tim operacijama. Navedimo kako se izvode te operacije, pod pretpostavkom da se sve radi na zajedničkom intervalu konvergencije redova koji u njima učestvuju.

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n.$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(x-x_0)^n.$$

(c) $$a(x-x_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} aa_n(x-x_0)^{n+k}.$$

(d) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}(x-x_0)^n.$$

(e) Ako je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ za svako x iz intervala $|x-x_0|<R$, onda je $a_n=b_n$ za svako $n=0,1,2\ldots.$ Specijalno, ako je red identički jednak nuli, onda svi njegovi koeficijenti moraju biti jednaki nuli. Operacije u $(a), (b)$ i (e) su izvedene u jednom koraku, jer su opći članovi istog stepena, što nije uvijek slučaj u praksi. Naime, često se moraju kombinirati redovi čiji opći članovi nisu istog stepena. U takvim slučajevima izvrši se promjena indeksa sumiranja u cilju svođenja općih članova na isti stepen. Osnovna ideja promjene indeksa

sumiranja leži u sljedećem identitetu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k}(x-x_0)^{n-k},$$

koji vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Analitičke funkcija definira se na sljedeći način.

Definicija 2.5.2. *Za funkciju $f(x)$ se kaže da je analitička u tački $x = x_0$ ako se može razviti u stepeni red po stepenima $(x - x_0)$ u nekom intervalu $|x - x_0| < R$, gdje je $R > 0$, tj. ako je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \tag{2.32}$$

U intervalu konvergencije red (2.32) se može diferencirati član po član. Izračunavajući $f'(x), f''(x), \ldots$ u tački x_0, dobiva se $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$, $f''(x_0) = 2a_2, \ldots$ i općenito $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dakle, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, pa je zapravo stepeni red (2.32) *Taylorov red*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2.33}$$

funkcije f u tački x_0. Dakle, funkcija f je analitička u tački x_0 ako njen Taylorov red (2.33) oko tačke x_0 postoji i ima pozitivan radijus konvergencije.

2.5.1 Regularne i singularne tačke

Kao što smo istaknuli na početku ovog poglavlja, posmatrat ćemo linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda sa varijabilnim koeficijentima oblika

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0. \tag{2.34}$$

Pretpostavit ćemo da su $p(x), q(x)$ i $r(x)$ analitičke funkcije.

Tražimo rješenje diferencijalne jednadžbe (2.34) u obliku stepenog reda po stepenima $(x - x_0)$, gdje je x_0 realni broj. Oblik rješenja će značajno zavisiti o vrsti tačke x_0 u odnosu na datu diferencijalnu jednadžbu (2.34). U tom smislu, važno je definirati pojmove *regularne* i *singularne* tačke.

Definicija 2.5.3. *Tačka x_0 je* **regularna (obična)** *tačka diferencijalne jednadžbe (2.34) ako su funkcije*

$$\frac{q(x)}{p(x)} \quad \text{i} \quad \frac{r(x)}{p(x)}$$

analitičke u tački x_0. Ako tačka x_0 nije regularna, onda je x_0 **singularna tačka***.*

Kod velikog broja diferencijalnih jednadžbi oblika (2.34) koje se pojavljuju u primjenama koeficijenti $p(x), q(x)$ i $r(x)$ su polinomi. Nakon skraćivanja eventualnih zajedničkih faktora, funkcije $\frac{q(x)}{p(x)}$ i $\frac{r(x)}{p(x)}$ su analitičke u svim tačkama, osim onih u kojima je nazivnik jednak nuli. Tačke u kojima je nazivnik jednak nuli su singularne tačke diferencijalne jednadžbe (2.34), dok su sve ostale tačke regularne.

Singularne tačke se klasificiraju na sljedeći način.

Definicija 2.5.4. *Tačka x_0 je* **regularna singularna tačka** *diferencijalne jednadžbe (2.34) ako je x_0 singularna tačka i ako su funkcije*

$$(x-x_0)\frac{q(x)}{p(x)} \quad \text{i} \quad (x-x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)} \tag{2.35}$$

analitičke u tački x_0. Ako bar jedna od prethodnih funkcija nije analitička u tački x_0, onda je x_0 **iregularna singularna tačka** *diferencijalne jednadžbe (2.34).*

Primjer 2.5.1. *Za datu diferencijalnu jedandžbu*

$$(x^4-x^2)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0 \tag{2.36}$$

odrediti singularne tačke i ispitati njihovu prirodu.

Rješenje. Ovdje je $p(x) = x^4 - x^2$, $q(x) = 2x+1$, $r(x) = x^2(x+1)$, pa je

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x-1)(x+1)}, \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{1}{x-1}. \tag{2.37}$$

Iz izraza (2.37) slijedi da je svaka tačka osim $0, 1$i -1 obična tačka diferencijalne jednadžbe (2.36). Da bismo vidjeli koja je od tačaka $0, 1$ i -1 regularna singularna tačka, a koja je iregularna singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.36), treba ispitati dvije funkcije u izrazu (2.35).

Za $x_0 = 0$, funkcije iz (2.35) postaju

$$x\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)} \quad \text{i} \quad x^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{x^2}{x-1}$$

Prvi od ovih izraza nije analitički u $x = 0$, pa zaključujemo da je tačka $x_0 = 0$ iregularna singularna tačka diferencijalne jedandžbe (2.36). Za $x_0 = 1$, funkcije iz (2.35) postaju

$$(x-1)\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x(x+1)} \quad \text{i} \quad (x-1)^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = x^2$$

Kako su oba ova izraza analitički u $x = 1$, zaključujemo da je tačka $x_0 = 1$ regularna singularna tačka za diferencijalnu jednadžbu (2.36). Na kraju, za $x_0 = -1$, funkcije iz (2.35) postaju

$$(x+1)\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x(x-1)} \quad \text{i} \quad (x+1)^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{(x+1)^2}{x-1}.$$

Kako su obje funkcije analitičke u $x = -1$ (nazivnici su različiti od nule u $x = -1$), zaključujmo da je $x_0 = -1$ regularna singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.36). ♦

2.5.2 Zadaci za samostalan rad

1. Za sljedeće diferencijalne jednadžbe locirati regularne tačke, regularne singularne tačke i iregularne singularne tačke.

   (a) $(x-1)y'' + 2(x-1)^2y' + 3(x^2-1)y = 0$;

   (b) $y'' - xy = 0$ (Airyova jednadžba);

   (c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ (Besselova jednadžba);

   (d) $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ (jednadžba Chebysheva).

2. Locirati i klasificirati singularne tačke sljedećih diferencijalnih jedandžbi.

   (a) $(x^3 + x^2)y'' + (x^2 - 2x)y' + 4y = 0$;

   (b) $(x^5 - x^4 - 6x^3)y'' + x^2y' + (x-2) = 0$;

   (c) $(x^3 + x^2)y'' + (x^2 - 2x)y' + 4y = 0$;

   (d) $(1-x^2)y'' + \dfrac{1}{\sin(x+1)}y' + y = 0.$

2.5.3 Rješenja u okolini regularnih tačaka

U onome što slijedi cilj nam je da nađemo rješenje posmatrane diferencijalne jednadžbe (2.34) u okolini regularnih tačaka i regularnih singularnih tačaka, dok traženje rješenja u okolini iregularnih singularnih tačaka je veoma zahtjevno i prevazilazi sadržaj ove knjige.

Dakle, sada ćemo pokazati kako se rješava bilo koja linearna diferencijalna jednadžba drugog reda sa varijabilnim koeficijentima oblika

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.38}$$

u nekom intervalu oko regularne tačke x_0. Tačka x_0 je obično određena nekim specifičnim problemom koji zahtijeva da nađemo rješenje diferencijalne jednadžbe (2.38) a koje zadovoljava sljedeće početne uvjete

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{i} \quad y'(x_0) = y_1. \tag{2.39}$$

Podsjetimo se da ako su koeficijenti $p(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ polinomi po x, onda je x_0 regularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.38) ako je $p(x) \neq 0$. Općenito, x_0 je regularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.38) ako se funkcije $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ i $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ mogu razviti u obliku stepenih redova oblika

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n \quad \text{za} \quad |x - x_0| < R_1 \tag{2.40}$$

i

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x-x_0)^n \quad \text{za} \quad |x-x_0| < R_2 \tag{2.41}$$

gdje su R_1 i R_2 radijusi konvergencije. Primijetimo da su funkcije (2.40) i (2.41) neprekidne na intervalu $|x-x_0| < R$, gdje je $R = \min(R_1, R_2)$. Sada, na osnovu teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyevog problema, zaključujemo da početni problem (2.38)-(2.39) ima jedinstveno rješenje na intervalu $|x-x_0| < R$. Naš je cilj da nađemo to jedinstveno rješenje. Sljedeći teorem opisuje oblik bilo kojeg rješenja diferencijalne jednadžbe (2.38) i, specijalno, oblik jedinstvnog rješenja problema (2.38)-(2.39).

Teorem 2.5.1. *Ako je x_0 regularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.38), onda se opće rješenje u okolini tačke x_0 imože razviti u stepeni red*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{2.42}$$

sa pozitivnim radijusom konvergencije. Preciznije, ako su R_1 i R_2 radijusi konvergencije redova (2.40) i (2.41), redom, onda radijus konvergencije reda (2.42) je jednak bar minimumu radijusa R_1 i R_2. Koeficijenti a_n, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$ reda (2.42) mogu se izraziti preko a_0 i a_1 direktnom zamijenom reda (2.42) u diferencijalnu jednadžbu (2.38) uz izjednačavanje koeficijenta uz iste stepene. Na kraju, ako je (2.42) rješenje početnog problema (2.38)-(2.39), onda je $a_0 = y_0$ i $a_1 = y_1$.

Dokaz. Najprije primijetimo da možemo pretpostaviti da je $x_0 = 0$. Naime, smjenom nezavisne varijable $x = t + x_0$ dobivamo da je $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2y}{d^2t}$, $p(x) = p(t+x_0) = \bar{p}(t)$, $q(x) = q(t+x_0) = \bar{q}(t)$ i $r(x) = r(t+x_0) = \bar{r}(t)$, onda se diferencijalna jednadžba (2.38) svodi na diferencijalnu jednadžbu

$$\bar{p}(t)y'' + \bar{q}(t)y' + \bar{r}(t)y = 0. \tag{2.43}$$

Osim toga, posmatrana transformacija pomjera svaku tačku za $-x_0$, pa ako je x_0 regularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.38), onda je $t = 0$ regularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.43).

S obzirom na prethodno rečeno, neka je

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \ \frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n, \ |x| < R \tag{2.44}$$

i

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.45}$$

gdje je $a_0 = y_0$ i $a_1 = y_1$. Sada je

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

i

$$\frac{q(x)}{p(x)}y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}A_{n-k}\right)x^n,$$

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_nB_{n-k}\right).$$

Uvrštavanjem ovih izraza u diferencijalnu jednadžbu (2.38), dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}A_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}a_kB_{n-k}\right]x^n = 0.$$

Dakle, $y(x)$ je rješenje diferencijalne jednadžbe (2.38) ako i samo ako konstante a_n zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}\{(k+1)a_{k+1}A_{n-k} + a_kB_{n-k}\}\right],\ n \geq 0$$

što je isto kao i

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\{(k+1)a_{k+1}A_{n-k-2} + a_kB_{n-k-2}\}\right],\ n \geq 2. \qquad (2.46)$$

Ovom relacijom $a_2, a_3, \ldots$ mogu se odrediti kao linearne kombinacije od a_0 i a_1.

Sada ćemo pokazati da redovi sa ovim koeficijentima konvergiraju za $|x| < R$. Budući da redovi u relaciji (2.44) konvergiraju za $|x| < R$, za svaki $|x| = R_0 < R$ postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$|A_j|R_0^j \leq M \quad \text{i} \quad |B_j|R_0^j \leq M, \quad j = 0, 1, \ldots \qquad (2.47)$$

Koristeći izraz za a_n i relaciju (2.47), imamo

$$|a_n| \leq \frac{M}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left\{\frac{(k+1)|a_{k+1}|}{R_0^{n-k-2}} + \frac{|a_k|}{R_0^{n-k-2}}\right\}\right] + \frac{M|a_{n-1}|R_0|}{n(n-1)},\ n \geq 2. \qquad (2.48)$$

Ovdje je član $\frac{M|a_{n-1}|R_0}{n(n-1)}$ uključen, i njegovu svrhu ćemo vidjeti u onome što slijedi.

Sada ćemo definirati pozitivne konstante C_n, stavljajući $C_0 = |a_0|,\ C_1 = |a_1|$ i

$$C_n = \frac{M}{n(n-1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left\{\frac{(k+1)C_{k+1}}{R_0^{n-k-2}} + \frac{C_k}{R_0^{n-k-2}}\right\}\right] + \frac{MC_{n-1}R_0}{n(n-1)},\ n \geq 2. \quad (2.49)$$

Iz relacija (2.48) i (2.49) je jasno da vrijedi $|a_n| \leq C_n,\ n = 0, 1, \ldots$

Sada zamjenom n sa $n+1$ u relaciji (2.49), imamo

$$C_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{(k+1)C_{k+1}}{R_0^{n-k-1}} + \frac{C_k}{R_0^{n-k-1}}\right\}\right] + \frac{MC_nR_0}{n(n+1)}$$

pa je

$$R_0C_{n+1} = \frac{MR_0}{n(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\left\{\frac{(k+1)C_{k+1}}{R_0^{n-k-1}} + \frac{C_k}{R_0^{n-k-1}}\right\}\right] + \frac{MR_0}{n(n+1)}[nC_n + C_{n-1}] + \frac{MC_nR_0^2}{n(n+1)}. \tag{2.50}$$

Kombinirajući relacije (2.49) i (2.50), dobivamo

$$R_0C_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)}\left[\frac{n(n-1)}{M}C_n - R_0C_{n-1}\right] + \frac{MR_0}{n(n+1)}[nC_n + C_{n-1}] + \frac{MC_nR_0^2}{n(n+1)}, \tag{2.51}$$

Nakon sređivanja relacije (2.51) dobivamo

$$R_0C_{n+1} = \frac{(n-1)}{(n+1)}C_n + \frac{nMR_0C_n}{n(n+1)} + \frac{MC_nR_0^2}{n(n+1)}. \tag{2.52}$$

Dakle, dodavanjem člana $\dfrac{M|a_{n-1}|R_0}{n(n-1)}$ u relaciju (2.48), dovelo nas je do rekurzivne relacije (2.52) iz koje možemo lahko dobiti odnos $(n+1)$-og i $n-$tog člana:

$$\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_nx^n}\right| = \frac{n(n-1) + nMR_0 + MR_0^2}{R_0 n(n+1)}|x|.$$

Dakle

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_nx^n}\right| = \frac{|x|}{R_0}.$$

Korištenjem D'Alembertovog kriterija lahko se vidi da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_nx^n$ konvergira za $|x| < R_0$, a na osnovu kriterija upoređivanja slijedi da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ konvergira apsolutno za $|x| < R_0$. Kako je $R_0 \in (0, R)$ proizvoljno, onda red konvergira apsolutno na intervalu $|x| < R$.

Dakle, pokazali smo da funkcija koja je analitička u $x = x_0$ jeste rješenje posmatranog početnog problema ako i samo ako koeficijenti njenog stepenog reda zadovoljavaju relaciju (2.46). Također, iz jedinstvenosti rješenja posmatranog početnog problema, slijedi da će ovo biti i jedino rješenje. $\square$

Primjer 2.5.2. *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 \tag{2.53}$$

u okolini regularne tačke $x_0 = 1$.

Rješenje. Na osnovu Teorema 2.5.1 opće rješenje jednadžbe (2.53) ima razvoj u stepeni red u okolini tačke $x_0 = 1$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \tag{2.54}$$

sa pozitivnim radijusom konvergencije. Da bismo odredili donju granicu za radijus konvergencije reda (2.54), potrebni su nam radijusi konvergencije R_1 i R_2 stepenih redova razvoja funkcija

$$\frac{q(x)}{p(x)} \quad \text{and} \quad \frac{r(x)}{p(x)}.$$

Ovdje je $p(x) = 1, q(x) = -2(x-1)$, i $r(x) = 2$. Dakle,

$$\frac{q(x)}{p(x)} = -2(x-1) \quad \text{i} \quad \frac{r(x)}{p(x)} = 2,$$

pa je $R_1 = R_2 = \infty$. Prema tome, radijus konvergencije reda (2.54) je $R = \infty$ i rješenje (2.54) će konvergirati za svako x. Koeficijente reda (2.54) ćemo odrediti zamjenom reda u diferencijalnu jednadžbu. Kako je (2.54) opće rješenje diferencijalne jednadžbe (2.53) drugog reda, ono treba da sadrži dvije konstante. Ustvari, koeficijenti a_0 i a_1 će ostati neodređeni, dok će svi ostali koeficijenti $a_2, a_3, ...$ biti određeni preko a_0 i a_1. Diferenciranjem reda (2.54) član po član, dobivamo

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

i

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}.$$

Zamjenimo y, y' i y'' u diferencijalnu jednadžbu (2.53). Kao što vidimo iz jednadžbe (2.53), y' je potrebno pomnožiti sa $-2(x-1)$ a y sa 2, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} \\ -2(x-1)y' &= -2(x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n (x-1)^n \\ 2y &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n (x-1)^n. \end{aligned}$$

Suma lijevih strana je nula jer je y rješenje diferencijalne jednadžbe (2.53) pa i suma desnih strana mora biti nula. Te redove možemo napisati u ekvivalentnoj formi:

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n \\ &= 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n \\ -2(x-1)y' &= \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n \\ 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n = 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(x-1)^n \end{aligned}$$

Sabirajući lijeve i desne strane ove tri jednadžbe dobivamo

$$0 = (2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n](x-1)^n.$$

Desna strana ove jednakosti je stepeni red koji je identički jednak nuli, pa mu svi koeficijenti moraju biti jednaki nula. Dakle,

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \tag{2.55}$$

i

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n = 0 \quad \text{za} \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.56}$$

Na osnovu (2.55) imamo da je

$$a_2 = -a_0 \tag{2.57}$$

a iz (2.56) dobivamo

$$a_{n+2} = \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad \text{za} \quad n = 1, 2, ..., \tag{2.58}$$

pa je

$$\begin{aligned} a_3 = 0, &\qquad a_4 = \frac{2}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{2}{4\cdot 3}a_0 = -\frac{2^2}{4!}a_0 \\ a_5 = 0, &\qquad a_6 = \frac{2\cdot 3}{6\cdot 5}a_2 = -\frac{2^2\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}a_0 = -\frac{2^3\cdot 3}{6!}a_0 \\ a_7 = 0, &\qquad a_8 = \frac{2\cdot 5}{8\cdot 7}a_2 = -\frac{2^3\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}a_0 = -\frac{2^4\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8!}a_0 \end{aligned}$$

....

Prema tome,

$$a_{2n+1} = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

i

$$a_{2n} = -\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n)!}a_0, \qquad n = 2, 3, ...$$

Dakle, opće rješenje diferencijalne jednadžbe (2.53) je

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_4(x-1)^4 + a_6(x-1)^6 + \dots \\ &= a_1(x-1) + a_0[1-(x-1)^2 - \frac{2^2}{4!}(x-1)^4 - \frac{2^3 3}{6!}(x-1)^6 - \dots]. \end{aligned}$$

♦

Primjedba 2.5.1. *Kao što smo i očekivali, opće rješenje sadrži dvije konstante a_1 i a_0. Dakle, funkcije $x-1$ i $1-(x-1)^2 - \frac{22}{4!}(x-1)^4 \cdots$ su dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe* (2.53).

2.5.4 Zadaci za samostalan rad

Metodom stepenih redova riješiti sljedeće probleme početnih vrijednosti:

1. $y'' - 2xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,$
2. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,$
3. $y'' - 2(x+2)y' + 4y = 0, \quad y(-2) = 1, y'(-2) = 0,$
4. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1,$
5. $(x^2+4x+3)y'' + 2(x+2)y' - 2y = 0, \quad y(-2) = 0, y'(-2) = -1,$
6. $y'' - xy = 0, \quad y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ (Airyova jednadžba),
7. $x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0, \quad y(1) = a_0, y'(1) = a_1$ (Besselova jednadžba),
8. $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0, \quad y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ (Chebyshevljeva jednadžba).

2.5.5 Rješenja u okolini regularnih singularnih tačaka

U ovom dijelu ćemo vidjeti kako se rješava bilo koja linearna diferencijalna jednadžba sa varijabilnim koeficijentima oblika

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.59}$$

na intervalu bez centra oko regularne singularne tačke x_0, pri čemu ćemo pod intervalom bez centra oko tačke x_0 smatrati skup oblika $0 < |x-x_0| < R, \quad R > 0$ kada iz njega izbacimo njegov centar x_0. Podsjetimo se da je tačka x_0 regularna singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.59) ako se funkcije

$$(x-x_0)\frac{q(x)}{p(x)}, \ (x-x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)}$$

mogu razviti u stepene redove oblika

$$(x - x_0)\frac{q(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n \quad \text{za} \quad |x - x_0| < R_1 \tag{2.60}$$

i

$$(x - x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x - x_0)^n \quad \text{za} \quad |x - x_0| < R_2 \tag{2.61}$$

gdje su R_1 i R_2 radijusi konvergencije. Kako je tačka x_0 regularna singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.59), onda njena rješenja, općenito, nisu definirana u tački x_0. Međutim, diferencijalna jednadžba (2.59) ima dva linearno nezavisna rješenja na intervalu bez centra $0 < |x - x_0| < R$, $R = \min(R_1, R_2)$, pa je zadatak da se odrede (ili bar aproksimativno) ova dva rješenja u blizini svake regularne singularne tačke. Prije nego navedemo teorem u kojem će biti opisan oblik ovih rješenja, trebat će nam sljedeća definicija.

Definicija 2.5.5. *Neka je x_0 regularna singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.59), i neka vrijede razvoji u stepene redove (2.60) i (2.61). Karakteristična jednadžba pridružena diferencijalnoj jednadžbi (2.59) u tački x_0 ima oblik*

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0 \tag{2.62}$$

(Formula (2.62) *se može i direktno izvesti (vidjeti* (2.66)*)).*

Kao i u slučaju dokaza teorema koji se odnosi na regularne tačke i ovdje ćemo pretpostaviti da je $x_0 = 0$.

Prvo ćemo pokazati da diferencijalna jednadžba (2.59) ima bar jedno rješenje u obliku

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)x^n, \quad a_0 \neq 0. \tag{2.63}$$

Primjedba 2.5.2. *Svaka linearna diferencijalna jednadžba drugog reda oblika (2.59), pri čemu je posmatramo u okolini regularne singularne tačke $x_0 = 0$, ima bar jedno rješenje u obliku reda* (2.63) *za $x > 0$. Za $x < 0$, u slučaju kada je λ cijeli broj rješenje i dalje ima oblik* (2.63)*. Ako λ nije cijeli broj, onda se rješenje jednadžbe (2.59) može dobiti analitičkim produženjem u kompleksnoj ravni. Jedan od načina je da se x^λ zamijeni sa $|x|^\lambda$ u* (2.63) *jer za $x < 0$ vrijedi*

$$x^\lambda = e^{\lambda \ln x} = e^{\lambda[\ln |x| + i\pi]} = |x|^\lambda e^{i\pi\lambda}$$

pri čemu se faktor $e^{i\pi\lambda}$ može apsorbirati u ukupnu proizvoljnu konstantu. Kao što ćemo i vidjeti, kad je jedno rješenje $y(x)$ dato sa (2.63)*, onda u nekim slučajevima drugo linearno nezavisno rješenje ima oblik $y(x)\ln x + w(x)$, gdje je $w(x)$ drugi Frobeniusov red. Za $x < 0$, može se $\ln x$ zamijeniti sa $\ln |x|$ jer za $x < 0$ imamo $\ln x = \ln |x| + i\pi$, u kom slučaju je $y(x)\ln x + w(x) = y(x)\ln |x| + i\pi y(x) + w(x)$.*

Kako je $y(x)$ prvo rješenje diferencijalne jednadžbe, imamo da ako su $y(x)$ i $y(x)\ln x + w(x)$ linearno nezavisna rješenje, tada su i $y(x)$ i $y(x)\ln|x| + w(x)$ također linearno nezavisna rješenja. Prednosti ovoga su u tome što je rezultirajući red realan za bilo koju vrijednost x. U nastavku ćemo tražiti rješenja za $x > 0$. Da bi se dobilo rješenje za $x < 0$ čitaocu ostavljamo da zamjeni x^λ sa $|x|^\lambda$ i $\ln x$ sa $\ln|x|$ na odgovarajućim mjestima da bi se dobilo rješenje i za $x < 0$.

U skladu sa Primjedbom 2.5.2, dovoljno je posmatrati slučaj $x > 0$. Kako su funkcije $x\dfrac{q(x)}{p(x)}$ i $x^2\dfrac{r(x)}{p(x)}$ analitičke u tački $x_0 = 0$, onda se mogu razviti u stepeni red po x, tj.

$$x\frac{q(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad \text{i} \quad x^2\frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \tag{2.64}$$

Uvrštavajući (2.63) i (2.64) u diferencijalnu jednadžbu (2.59), dobivamo

$$\begin{aligned} x^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n(\lambda)x^n \quad &+ \quad \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \left(x^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n(\lambda)x^n\right) \\ &+ \quad \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \left(x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)x^n\right) = 0, \end{aligned}$$

što je isto kao i

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n}[(k+\lambda)A_{n-k} + B_{n-k}]a_k(\lambda)\right\}x^{n+\lambda-2} = 0. \tag{2.65}$$

Koeficijent uz $x^{\lambda-2}$ u (2.65) nije rekurzivna relacija, ali daje

$$a_0F(\lambda) \equiv a_0[\lambda(\lambda-1) + A_0\lambda + B_0] = 0. \tag{2.66}$$

Koeficijenti uz ostale stepene zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju

$$(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n}[(k+\lambda)A_{n-k} + B_{n-k}]a_k(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, , \ldots$$

koja se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} F(\lambda+n)a_n(\lambda) \quad &\equiv \quad [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)A_0 + B_0]a_n(\lambda) \\ &\equiv \quad -\sum_{k=0}^{n-1}[(k+\lambda)A_{n-k} + B_{n-k}]a_k(\lambda),\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.67}$$

Kako je $a_0 \neq 0$, onda iz (2.66) slijedi da je $F(\lambda) = 0$, što je karakteristična jednadžba pridružena diferencijalnoj jednadžbi (2.59). Korijeni λ_1 i λ_2 karakteristične jednadžbe $F(\lambda) = 0$ zovu se *eksponenti* regularne singularne tačke $x = 0$.

Za fiksno λ, relacija (2.67) u potpunosti određuje koeficijente a_n. Dakle, za dva eksponenta λ_1 i λ_2 moguće je konstruisati dva rješenja diferencijalne jednadžbe (2.59). Međutim, ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, onda ovaj metod daje jedno formalno rješenje. Osim toga, ako za neko n vrijedi $F(\lambda + n) = 0$, onda je očito da se ova metod ne može primijeniti za konstrukciju rješenja. Jednostavnim računom se može pokazati da je

$$F(\lambda + n) \equiv F(\lambda) + n(2\lambda + A_0 + n - 1) = 0. \tag{2.68}$$

Iz relacije (2.66), imamo $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - A_0$. Dakle, ako je $\lambda = \lambda_1$ ili λ_2, tada iz relacije (2.68) dobivamo $n = \pm(\lambda_2 - \lambda_1)$. Prema tome, $F(\lambda + n)$ jednako je nula ako i samo ako se eksponenti razlikuju za cijeli broj i λ je izabran da bude manji eksponent. Ako je λ uzet da bude veći eksponent, onda se može konstruisati jedno formalno rješenje.

Na kraju se može zaključiti sljedeće: Diferencijalna jednadžba (2.59) uvijek ima bar jedno rješenje oblika (2.63), a koeficijenti a_n, $n \geq 1$ se mogu dobiti supstitucijom (2.63) u jednadžbu. Da bismo našli drugo rješenje primijent ćemo *Frobeniusov metod.*

Teorem 2.5.2. *Neka je $x_0 = 0$ regularna singulara tačka diferencijalne jednadžbe i neka vrijede razvoji (2.60) i (2.61). Neka su λ_1 i λ_2 dva korijena karakteristične jednadžbe*

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0. \tag{2.69}$$

indeksirani tako da je $Re(\lambda_1) \geq Re(\lambda_2)$. Onda, jedno od rješenja diferencijalne jednadžbe (2.59) ima oblik

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.70}$$

gdje je $a_0 = 1$ i razvoj vrijedi na intervalu bez centra $0 < |x| < R$, gdje je $R = \min(R_1, R_2)$. Drugo linearno nezavisno rješenje $y_2(x)$ diferencijalne jednadžbe (2.59) na intervalu bez centra nalazi se na sljedeći način.

(i) *Ako $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$, onda je*

$$y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{2.71}$$

gdje je $b_0 = 1$.

(ii) *Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, onda je*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{2.72}$$

gdje je $b_0 = 1$.

(iii) *Ako je* $\lambda_1 = \lambda_2 +$ prirodan broj, *onda je*

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{2.73}$$

gdje je $c_0 = 1$. *Konstanta* C *je nekad jednaka nuli.*

Koeficijenti a_n, b_n, c_n *i konstanta* C *mogu se odrediti zamjenom reda za* $y(x)$ *u jednadžbu (2.59).*

Dokaz. (**i**) Lijevu stranu karakteristične jednadžbe (2.69) označimo sa $F(\lambda)$, tj.

$$F(\lambda) = \lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0.$$

Kako su λ_1 i λ_2 korijeni karakteristične jednadžbe (2.69), onda je

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + A_0\lambda + B_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Na osnovu (2.68) imamo da je $F(\lambda_1 + n) = n(n + \lambda_1 - \lambda_2)$, odakle slijedi

$$|F(\lambda_1 + n)| \geq n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|). \tag{2.74}$$

Također, kao i u Teoremu 2.5.1, za $|x| = R_0 < R$ postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|A_j|R_0^j \leq M$ i $|B_j|R_0^j \leq M$, $j = 0, 1, \cdots$. Dakle, koristeći ove nejednakosti, na osnovu (2.67) imamo da je

$$n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|)|a_n| \leq M\sum_{k=0}^{n-1}(k + |\lambda_1| + 1)R_0^{-n+k}|a_k|, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Odaberimo m tako da je $m-1 \leq |\lambda_1 - \lambda_2| < m$, i definirajmo pozitivne konstante C_j na sljedeći način:

$$\begin{aligned} C_1 &= |a_j|, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1, \\ j(j - |\lambda_1 - \lambda_2|)C_j &= M\sum_{k=0}^{j-1}(k + |\lambda_1| + 1)R_0^{-n+k}C_k, \quad j = m, m+1, \cdots . \end{aligned} \tag{2.75}$$

Indukcijom se lahko pokaže da je $|a_n| \leq C_n$, $n = 0, 1, \cdots$. Koristeći jednadžbu (2.75) za $j = n$ i $j = n - 1$ dobijemo

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{(n-1)(n-1-|\lambda_1 - \lambda_2|) + M(n + \lambda_1|)}{R_0 n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|)}$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n x^n}{C_{n-1}x^{n-1}}\right| = \frac{|x|}{R_0}.$$

Na osnovu D'Alembertovog kriterija red $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ konvergira za $|x| < R_0$, odakle slijedi da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira apsulutno za $|x| < R_0$. Kako je R_0 proizvoljan broj takav da je $R_0 < R$, imamo da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira apsulutno za $|x| < R$. Dakle, vidimo da je $|x|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rješenje jednadžbe (2.59) koje je analitičko za $0 < |x| < R$.

Ako zamijenimo λ_1 i λ_2 u prethodnim razmatranjima dobivamo da je $|x|^{\lambda_2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ drugo rješenje jednadžbe (2.59) koje je analitičko za $0 < |x| < R$.

(**ii**) Kako je $\lambda_1 = \lambda_2$ korijen jednadžbe $F(\lambda) = 0$ višestrukosti dva, to je $F(\lambda_1) = (\partial F/\partial \lambda)_{\lambda=\lambda_1} = 0$ i postoji rješenje oblika $y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ u intervalu $0 < x < R$. Sad pretpostavimo da u (2.65) λ nije rješenje karakteristične jednadžbe $F(\lambda) = 0$. Ako stavimo da je

$$\mathcal{L}_2[y] = y'' + \frac{q(x)}{p(x)} y' + \frac{r(x)}{p(x)},$$

tada je

$$\mathcal{L}_2[y(x)] = a_0 x^{\lambda-2} F(\lambda), \tag{2.76}$$

gdje je $y(x) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Na osnovu (2.76) imamo da je

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}_2[y(x)] = \mathcal{L}_2 \left[\frac{\partial y(x)}{\partial \lambda} \right] = a_0 x^{\lambda-2} \left[\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} + F(\lambda) \ln x \right],$$

pa je $\mathcal{L}_2 \left[\left(\frac{\partial a_n}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1} \right] = 0$, te je $\left(\frac{\partial a_n}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1}$ drugo rješenje. Kako je

$$\frac{\partial y(x)}{\partial \lambda} = x^{\lambda} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \lambda} x^n,$$

to je drugo rješenje dato sa

$$y_2(x) = \left(\frac{\partial y(x)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1} = x^{\lambda_1} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

gdje je

$$b_n = \left(\frac{\partial a_n}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1}, \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.77}$$

Pošto a_0 ne zavisi od λ, to je $b_0 = 0$. Napomenimo da se slučaj $-R < x < 0$ može slično riješiti. Pored toga, kako je red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniformno i apsolutno konvergentan za $|x| \leq R_0 < R$, imamo da je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ uniformno i apsolutno konvergentan za $|x| \leq R_0 < R$; ovo opravdava diferenciranje reda član po član po λ. Prema tome, rješenje $y_2(x)$ je analitičko za $0 < |x| < R$.

(**iii**) Kako su λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe $F(\lambda) = 0$ takva da je $\lambda_1 - \lambda_2 = m \in \mathbb{N}$, onda je prvo rješenje $y_1(x)$ koje odgovara eksponentu λ_1 je dato sa

$$y_1(x) = |x|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^n.$$

Pored toga, $y_1(x)$ je analitička funkcija za $0 < |x| < R$. Za razliku od slučaja (i), u ovom slučaju postoji problem kod određivanja drugog linearno nezavisnog rješenja kada je $\lambda_1 - \lambda_2 = m \in \mathbb{N}$, jer je koeficijent uz a_m u jednadžbi (2.67), jednak $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$. Kako je $a_0(\lambda_2) \neq 0$, ništa nam ne garantira da će desna strana u (2.67) biti jednaka nuli. Jedina alternativa je pretpostaviti da je $a_0(\lambda_2) = 0$. Iz tog neposredno slijedi

$$a_0(\lambda_2) = a_1(\lambda_2) = \cdots = a_{m-1}(\lambda_2) = 0. \tag{2.78}$$

Napomenimo da $a_m(\lambda_2)$ može biti različito od nule jer je $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$. Jednadžba (2.67) daje

$$\begin{aligned} F(\lambda_2 + m + n) a_{n+m}(\lambda_2) &= -\sum_{k=m}^{m+n-1} [(k + \lambda_2) A_{n+m-k} + B_{n+m-k}] a_k(\lambda_2) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} [(k + m + \lambda_2) A_{n-k} + B_{n-k}] a_{k+m}(\lambda_2). \end{aligned}$$

Koristeći $\lambda_1 = \lambda_2 + m$, imamo

$$F(\lambda_1 + n) a_{n+m}(\lambda_2) = -\sum_{k=0}^{n-1} [(k + \lambda_1) A_{n-k} + B_{n-k}] a_{k+m}(\lambda_2), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Poređenjem sa (2.67) zaključujemo da je

$$a_{n+m}(\lambda_2) = a_n(\lambda_1), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.79}$$

za $a_m(\lambda_2) = a_0(\lambda_1)$. Koristeći (2.78) i (2.79) dobijemo

$$y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=m}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^n = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(\lambda_2) x^{n+m} = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^n = y_1(x). \tag{2.80}$$

Vidimo da je potreban neki drugi način da se odredi drugo linearno nezavisno rješenje. Pomnožimo (2.76) sa $\lambda - \lambda_2$ i definirajmo

$$z(x) \equiv (\lambda - \lambda_2) y(x), \quad G(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2. \tag{2.81}$$

Tada je

$$\mathcal{L}_2[z(x)] = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 x^{\lambda-2} = a_0 G(\lambda) x^{\lambda-2}. \tag{2.82}$$

Kao i u slučaju (*ii*) zaključujemo da je

$$y_2(x) = \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_2}$$

rješenje jednadžbe (2.59) i može se koristiti kao drugo linearno nezavisno rješenje u ovom slučaju. Dakle,

$$y_2(x) = x^{\lambda_2} \ln x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

gdje je

$$b_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) a_n(\lambda), \quad b_n \equiv \lim_{\lambda \to \lambda_2} b_n(\lambda), \quad c_n \equiv \left(\frac{\partial b_n}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Prilikom određivanja b_n treba biti pažljiv, u smislu da je potrebno koristiti limes. Zaista, kako je

$$b_n(\lambda) = \frac{-1}{F(\lambda + n)} \sum_{k=0}^{n-1} [(k + \lambda) A_{n-k} + B_{n-k}] b_k(\lambda),$$

gdje je $b_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) a_0(\lambda)$, uzimajući limes dobivamo

$$b_n(\lambda_2) = 0, \qquad \text{za } n = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Ali za $n = m$ imamo da je $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$, pa ne možemo zaključiti da je $b_m(\lambda_2) = 0$. Potrebno je koristiti L'Hospitalovo pravilo da se odredi $b_m(\lambda_2)$. Neka je

$$b_m(\lambda_2) = \lim_{\lambda \to \lambda_2} b_m(\lambda) \equiv C a_0,$$

gde je C neka konstanta. Kako je

$$b_{m+n}(\lambda_2) = \frac{-1}{F(\lambda_2 + m + n)} \sum_{l=0}^{m+n-1} [(l + \lambda_2) A_{m+n-l} + B_{m+n-l}] b_l(\lambda_2),$$

stavljajući $l = k + m$ i koristeći $\lambda_1 = \lambda_2 + m$, imamo

$$F(\lambda_1 + n) b_{m+n}(\lambda_2) = -\sum_{k=0}^{n-1} [(k + \lambda_1) A_{n-l} + B_{n-l}] b_{k+m}(\lambda_2).$$

Poredeći ovo sa (2.67) zaključujemo da je

$$b_{m+n}(\lambda_2) = C a_n(\lambda_1), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Na osnovu svega navedenog imamo

$$\begin{aligned} x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_2)x^n &= x^{\lambda_2}\sum_{n=m}^{\infty} b_n(\lambda_2)x^n = x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_{m+n}(\lambda_2)x^{m+n} \\ &= Cx^{\lambda_2+m}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)x^n = Cx^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)x^n \\ &= Cy_1(x), \end{aligned}$$

pa je

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln x + x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n \equiv \left(\frac{\partial b_n}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_2} \quad \text{za } n = 0, 1, \ldots .$$

□

Kao i u slučaju regularnih tačaka, koeficijenti reda mogu se dobiti direktnim uvrštavanjem rješenja u diferencijalnu jednadžbu i izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene. Dakle, prvo izračunamo rješenje (2.70). Red oblika (2.70) zove se *Frobeniusov red*, a metod nalaženja takvih rješenja diferencijalnih jednadžbi zove se *Frobeniusov metod.* Drugo rješenje može se također izračunati iz (2.71), (2.72) ili (2.73).

Primjer 2.5.3. *Odrediti opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$2x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0 \tag{2.83}$$

u blizini tačke $x_0 = 0$.

Rješenje. Imamo da je $p(x) = 2x^2$, $q(x) = x - x^2$, i $r(x) = -1$. Kako je $p(0) = 0$, to je tačka $x_0 = 0$ singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.83). Kako su

$$(x - x_0)\frac{q(x)}{p(x)} = x\frac{x - x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

i

$$(x - x_0)\frac{r(x)}{p(x)} = x^2\frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

analitičke funkcije (sa radijusom ∞), to je tačka $x_0 = 0$ regularna singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.83). Ovdje je $A_0 = \frac{1}{2}$ i $B_0 = -\frac{1}{2}$, pa je karakteristična jednadžba pridružena jednadžbi (2.83) u regularnoj singularnoj tački $x_0 = 0$ data sa $\lambda^2 + (\frac{1}{2} - 1)\lambda - \frac{1}{2} = 0$, odnosno $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Korijeni ove jednadžbe su

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Na osnovu Teorema 2.69, jedno rješenje jednadžbe (2.83) je dato u obliku

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.84}$$

pri tome je $a_0 = 1$. Kako je $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{3}{2}$, to je drugo linearno nezavisno rješenje $y_2(x)$ dato sa

$$y_2(x) = |x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{2.85}$$

pri tome je $b_0 = 1$. Iz $R_1 = R_2 = \infty$, slijedi da je stepeni red (2.84) konvergentan za svako x. Međutim, rješenje (2.85) nije definisano u tački $x = 0$. Ono je definisano (na osnovu Teorema 2.69) u intervalu bez centra $0 < |x| < \infty$, tj. za $x < 0$ ili $x > 0$. Odredimo sad koeficijente rješenja (2.84) i (2.85) direktnim uvrštavanjem u jednadžbu (2.83) i izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od x. Imamo

$$y(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n \quad \text{i} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1)a_n x^{n+1}\\
xy' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1}\\
-x^2y' &= \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} -na_{n-1}x^{n+1}\\
-y &= \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+1}
\end{aligned}$$

....

$$0 = (a_0 - a_0)x + \sum_{n=1}^{\infty}[2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n]x^{n-1}$$

Izjednačavajući koeficijente sa nulom dobivamo

$$a_n = \frac{na_{n-1}}{2n(n+1)+(n+1)-1} = \frac{1}{2n+3}a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Uzmimo $a_0 = 1$. Tada je

$$a_n = \frac{1}{5\cdot 7\cdots(2n+3)} \quad \text{za } n = 1, 2, \ldots$$

Dakle, jedno rješenje diferencijalne jednadžbe (2.83) u blizini $x_0 = 0$ je

$$y_1(x) = x\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{x^n}{5\cdot 7\cdots(2n+3)} + \cdots\right)$$

ili

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right]. \tag{2.86}$$

Odredimo sada koeficijente b_n rješenja (2.85). Ovo rješenje je definisano na intervalu bez centra $0 < |x|$, tj. za $x > 0$ ili $x < 0$. Prvo pretpostavimo da je $x > 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-(1/2)}\\
y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) b_n x^{n-(3/2)}\\
y_2''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) b_n x^{n-(5/2)}.\\
\Rightarrow 2x^2 y_2''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) b_n x^{n-(1/2)}\\
x y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) b_n x^{n-(1/2)}\\
-x^2 y_2'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -(n-\frac{1}{2}) b_n x^{n+(1/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} -(n-\frac{3}{2}) b_{n-1} x^{n-(1/2)}\\
-y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -b_n x^{n-(1/2)}
\end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned}
0 &= (2\cdot\frac{3}{4}b_0 - \frac{1}{2}b_0 - b_0)x^{b-1/2}\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})b_n + (n-\frac{1}{2})b_n\right.\\
&\left.-(n-\frac{3}{2})b_{n-1} - b_n\right] x^{n-(1/2)}.
\end{aligned}$$

Izjednačavajući koeficijente ovog reda sa nulom dobivamo rekurzivnu relaciju

$$2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})b_n + (n-\frac{1}{2})b_n - (n-\frac{3}{2})b_{n-1} - b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

odnosno

$$b_n = \frac{(n-\frac{3}{2})b_{n-1}}{2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})+(n-\frac{1}{2})-1} = \frac{1}{2n}b_{n-1}, \quad n=1,2,\ldots$$

Uzmimo da je $b_0 = 1$. Tada je

$$b_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Dakle,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\cdots+\frac{x^n}{2^n\cdot n!}\cdot+\cdots\right) \\ &= x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!} = x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!} \end{aligned}$$

ili

$$y_2(x) = x^{-1/2}e^{x/2} \tag{2.87}$$

Sada ćemo odrediti rješenje (2.85) za $x < 0$. Zbog toga ćemo uvesti smjenu $x = -t$ u diferencijalnoj jednadžbi (2.83). Na osnovu lančanog pravila, koristeći tačku za oznaku izvoda po t, dobivamo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\dot{y}$$

i

$$y'' = \frac{d}{dt}(-\dot{y})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}.$$

Na osnovu ovoga, jednadžba (2.83) postaje

$$2t^2\ddot{y} - (-t-t^2)\dot{y} - y = 0. \tag{2.88}$$

Kako je $x < 0$ u jednadžbi (2.83), imamo da je $t > 0$ u jednadžbi (2.88). Karakteristična jednadžba jednadžbe (2.88) je ista kao za jednadžbu (2.83). Njeni korijeni su

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{i} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Jedino moramo naći rješenje za $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, jer za $\lambda_1 = 1$ rješenje smo već odredili. Kao i prije, tražimo rješenje u obliku

$$y_2(t) = |t|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Kako je $t > 0$, to je

$$y_2(t) = t^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Direktnom zamjenom $y_2(t)$u jednadžbi (2.88), dobivamo

$$y_2(t) = t^{-1/2}e^{-t/2}, \quad t > 0.$$

Iz $t = -x$, imamo

$$y_2(-x) = (-x)^{-1/2}e^{x/2}, \quad x < 0. \tag{2.89}$$

Kombinirajući (2.87) i (2.89), vidimo da za $x > 0$ ili $x < 0$, imamo

$$y_2(x) = |x|^{-1/2}e^{x/2}. \tag{2.90}$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (2.83) je

$$y(x) = C_1 x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)}\right] + C_2|x|^{-1/2}e^{x/2},$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. ♦

Primjer 2.5.4. *Odrediti opće rješenje diferencijlne jednadžbe*

$$(x-1)^2y'' - (x^2 - x)y' + y = 0 \tag{2.91}$$

u blizini tačke $x_0 = 1$.

Rješenje. Radi jednostavnijeg računa uvedimo smjenu $t = x - 1$ i potražimo rješenje u okolini tačke 0. Kako je $t = x - 1$, imamo da je $x = t + 1$, $y' = \dot{y}$, i $y' = \ddot{y}$. Dakle, jednadžba (2.91) postaje

$$t^2\ddot{y} - t(t+1)\dot{y} + y = 0. \tag{2.92}$$

Lahko se vidi da je $t_0 = 0$ regularna singularna tačka jednadžbe (2.92). Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima korijene $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, pa jedno rješenje jednadžbe (2.91) ima oblik

$$y_1(x) = t\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{2.93}$$

gdje je $a_0 = 1$. Kako je $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, drugo linearno nezavisno rješenje tražimo u obliku

$$y_2(x) = y_1(t)\ln|t| + |t|\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n. \tag{2.94}$$

Prvo ćemo odrediti koeficijente a_n, rješenja (2.93). Direktnom zamjenom (2.93) u (2.92) i izjednačavanjem koeficijenata, dobivamo

$$a_n = \frac{1}{n!}a_0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Prema tome, uzimajući $a_0 = 1$, imamo

$$y_1(t) = t\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right) = t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} \tag{2.95}$$

odnosno

$$y_1(t) = te^t. \tag{2.96}$$

Sada odredimo koeficijente b_n rješenja (2.94). U jednadžbu (2.94) ubacimo $y_1(t)$ iz (2.96) i za $t > 0$ dobijemo

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\ln t + t\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1} \\
\dot{y}_2(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^n\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n t^n \\
\ddot{y}_2(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n!}t^{n-1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n-1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n t^{n-1} \\
\Rightarrow t^2\ddot{y}_2(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n!}t^{n+1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n t^{n+1} \\
-t^2\dot{y}_2(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n+1}{n!}t^{n+2}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n!}t^{n+2} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)b_n t^{n+2} \\
-t\dot{y}_2(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n+1}{n!}t^{n+1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n!}t^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)b_n t^{n+1} \\
y_2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n+1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1}.
\end{aligned}$$

Poslije uvrštavanja u polaznu jednadžbu, jednostavno se može vidjeti da je izraz uz $\ln t$ jednak nuli. Pored toga, suma svih članova koji odgovaraju $n = 0$ je nula. Izjednačavanjem koeficijenata koji stoje uz stepene od t sa nulom dobivamo

$$\frac{n+1}{n!} + \frac{n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + (n+1)nb_n - nb_{n-1} - (n+1)b_n + b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

što je ekvivalentno sa

$$b_n = \frac{1}{n} b_{n-1} - \frac{1}{n \cdot n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Za $b_0 = 1$, imamo

$$b_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 1!} = 0, \qquad b_2 = -\frac{1}{2 \cdot 2!} = -\frac{1}{4}$$
$$b_3 = \frac{1}{3} b_2 - \frac{1}{3 \cdot 3!} = -\frac{5}{36}, \qquad b_4 = \frac{1}{4} b_3 - \frac{1}{4 \cdot 4!} = -\frac{13}{288},$$

itd. Dakle,

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \left(t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) \ln t + t \left(1 - \frac{t^2}{4} - \frac{5t^3}{36} - \frac{13t^4}{288} + \cdots \right) \\ &= te^t \ln t + t - \frac{t^3}{4} - \frac{5t^4}{36} - \frac{13t^5}{288} + \cdots . \end{aligned} \tag{2.97}$$

Jednadžbe (2.96) i (2.97) daju dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe (2.92) za $t > 0$. Vraćajući smjenu $t = x - 1$ u ova rješenja, dobijemo dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe (2.91) u okolini $x_0 = 1$. Opće rješenje jednadžbe (2.97) je (koristeći Primjedbu 2.5.2)

$$y(x) = C_1 (x-1) e^{x-1} + C_2 \left[(x-1) e^{x-1} \ln |x-1| + (x-1) - \frac{(x-1)^3}{4} - \cdots \right].$$

♦

Primjer 2.5.5. *Odrediti dva linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe*

$$x^2 y'' - (x+2) y = 0 \tag{2.98}$$

u okolini tačke $x_0 = 0$.

Rješenje. Imamo da je $p(x) = x^2$, $q(x) = 0$, i $r(x) = -(x+2)$. Tačka $x_0 = 0$ je singularna tačka diferencijalne jednadžbe (2.98), jer je $p(0) = 0$. Kako je

$$(x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)} = 0$$

i

$$(x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} = x^2 \frac{-(x+2)}{x^2} = -2 - x,$$

tačka $x_0 = 0$ je regularna singularna tačka. Karakteristična jednadžba je ($A_0 = 0$ i $B_0 = -2$) $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Njeni korijeni su

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 1.$$

Na osnovu Teorema 2.5.2, jedno rješenje jednadžbe (2.98) je oblika

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.99}$$

gdje je $a_0 = 1$. Kako je $\lambda_1 - \lambda_2 = +3$, drugo linearno nezavisno rješenje $y_2(x)$ tražimo u obliku

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln|x| x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2.100}$$

gdje je $c_0 = 1$. Prvo odredimo koeficijente a_n rješenja (2.99). Imamo da je

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
y_1'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+1} \text{ i } y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n \\
x^2 y_1''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} \\
-x y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} -a_{n-1} x^{n+2} \\
-2y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -2a_n x^{n+2}
\end{aligned}$$

....

$$0 = (2a_0 - 2a_0)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_n - a_{n-1} - 2a - n] x^{n+2}.$$

Izjednačavanjem koeficijenata sa nulom dobivamo

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1) - 2} = \frac{1}{n(n+3)} a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Uzmimo da je $a_0 = 1$. Tada je $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{40}, \ldots$ Prema tome,

$$y_1(x) = x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots .$$

Sada odredimo koeficijente c_n rješenja (2.100). To ćemo uraditi za $x > 0$. Zamjenjujući y_1 u (2.100), dobivamo

$$y_2(x) = C\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots\right)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

$$y_2'(x) = C\left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \cdots\right)\ln x$$
$$+ C\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{40} + \cdots\right) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n-1)x^{n-2}$$

$$y_2''(x) = C\left(2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}x^2 + \cdots\right)\ln x + C\left(2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots\right)$$
$$+ C\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{10}x^2 + \cdots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$$

$$x^2 y_2''(x) = C\left(2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \cdots\right)\ln x + C\left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \cdots\right)$$
$$+ \left(2c_0\frac{1}{x} + 2c_3x^2 + \cdots\right)$$

$$-xy_2(x) = C\left(-x^3 - \frac{x^4}{4} - \cdots\right)\ln x + (-c_0 - c_1x - c_2x^2 - \cdots)$$

$$-2y_2(x) = C\left(-2x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \cdots\right)\ln x$$
$$+ \left(-2c_0\frac{1}{x} - 2c_1 - 2c_2 - 2c_2x - 2c_3x^2 - \cdots\right)$$

....

$$0 = C\left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \cdots\right)$$
$$+ [(-c_0 - 2c_1) + (-c_1 - 2c_2)x - c_2x^2 - \cdots]$$

ili

$$(-c_0 - 2c_1) + (-c_1 - 2c_2)x(3C - c_2)x^2 + \cdots = 0.$$

Stavljajući $C_0 = 1$ i izjednačavajući koeficijente sa nulom, dobivamo

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{47}, C = \frac{1}{12}, \cdots$$

Prema tome,

$$y_2(x) = \frac{1}{12}\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \cdots\right)\ln|x| + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \cdots\right).$$

♦

2.5.6 Zadaci za samostalan rad

1. Naći linearno nezavisna rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi u okolini tačke $x_0 = 0$:

   a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$;

   b) $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$;

   c) $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$;

   d) $x(1-x)y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$;

   d) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

2. Za svako od jednadžbi $(a)-(e)$ naći dva linearno nezavisna rješenja u okolini njihovih regularnih singularnih tačaka za razne vrijednosti parametara.

   (a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ (Besselova jednadžba),

   (b) $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ (Chebyshevljeva jednadžba),

   (c) $x(1-x)y''+[c-(1+b+1)x]y'-aby = 0$ (Gaussova hipergeometrijska jednadžba),

   (d) $xy'' + (1-x)y' + py = 0$ (Laguerreova jednadžba),

   (e) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ (Legendreova jednadžba).

3. Naći rekurzivnu formulu za koeficijente Frobeniusovog reda u okolini tačke x_0 za sljedeće diferencijalne jednadžbe:

   (a) $(x+1)^2y'' - (x+3)y = 0$, $x_0 = -1$,

   (b) $(x-1)^2y'' - (x+1)y = 0$, $x_0 = 1$,

   (c) $x^2y'' - (x^2+x)y' + y = 0$, $x_0 = 0$,

   (d) $2(x+3)^2y'' - (x^2+5x+6)y' - y = 0$, $x_0 = -3$.

Poglavlje 3

Sistemi diferencijalnih jednadžbi

3.1 Normalni sistemi diferencijalnih jednadžbi i rješenje

U ovom poglavlju sa Ω ćemo označiti oblast, tj. otvoren i povezan skup. Sa $C(\Omega)$ ćemo označiti skup svih neprekidnih funkcija definiranih na Ω, dok ćemo sa $C^k(\Omega)$ označiti skup neprekidnih funkcija definiranih na Ω sa neprekidnim parcijalnim izvodima do $k-$tog reda uključno.

Sada ćemo definirati sistem diferencijalnih jednadžbi.

Definicija 3.1.1. *Neka su* $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$, *gdje je* $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Sistem diferencijalnih jednadžbi reda* m *ima oblik:*

$$y_i^{(m_i)} = f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_n, \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \tag{3.1}$$

gdje su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *nepoznate funkcije nezavisno promjenljive* x.

Opći oblik sistema diferencijalnih jednadžbi glasi

$$\mathbf{F}_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0, \tag{3.2}$$

gdje su $\mathbf{F}_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$ date funkcije.

Specijalno, ako je $n = 1$, $m_1 = m$, sistem (3.1) se svodi na običnu diferencijalnu jednadžbu u normalnom obliku reda m,

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}), \tag{3.3}$$

a sistem (3.2) na diferencijalnu jednadžbu reda m u općem obliku, $F(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$.

Ako je $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, sistem (3.1) je sistem *običnih diferencijalnih jednadžbi u normalnom obliku* ili *normalni sistem* i glasi:

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Važno je istaći da se svaki sistem (3.1) može svesti na normalni oblik. Naime, ako stavimo

$$\begin{aligned}
u_1 &= y_1, u_2 = y_1', \ldots, u_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}, \\
u_{m_1+1} &= y_2, u_{m_1+2} = y_2' \ldots, u_{m_1+m_2} = y_2^{(m_2-1)}, \\
&\vdots \\
u_{m_1+m_2+m_{n-1}+1} &= y_n, u_{m_1+m_2+m_{n-1}+1} = y_n', \ldots, u_m = y_n^{(m_n-1)},
\end{aligned}$$

sistem (3.1) se transformira u sistem diferencijalnih jednadžbi u normalnom obliku

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_2 \\
u_2' &= u_3 \\
&\vdots \\
u_{m_1}' &= f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_m) \\
u_{m_1+1} &= u_{m_1+2} \\
&\vdots \\
u_m' &= f_n(x, u_1, u_2, \ldots, u_m).
\end{aligned}$$

Sistem (3.1) i dobiveni sistem u normalnom obliku su ekvivalentni u smislu rješivosti: Ako su funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rješenje sistema (3.1), onda su funkcije $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}$ rješenje prethodnog sistema, i obrnuto.

Ako je $n = 1$ i $m_1 = m$, tada se sistem (3.3) svodi na normalni oblik istom smjenom.

Dakle, za proučavanje sistema (3.1) dovoljno je proučavati normalne sisteme diferencijalnih jednadžbi (3.4)

Sada ćemo definirati rješenje sistema (3.4).

Definicija 3.1.2. *Neka je Ω oblast definiranosti sistema* (3.4). *Skup funkcija $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ definiranih i neprekidno diferencijabilnih na intervalu (a, b) naziva se rješenje sistema* (3.4) *na tom intervalu ako za svako $x \in (a, b)$ vrijedi:*

(i) *postoji* $\varphi_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in \Omega$;

(iii) $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$

3.1.1 Geometrijsko značenje normalnih sistema

Diferencijalna jednadžba prvog reda riješena po y' zadaje u ravni xy neko polje pravaca. Koeficijent pravca tangente u svakoj tački integralne krive poklapa sa pravcem polja u toj tački. Analogno tumačenje možemo dati i za normalne sisteme (3.4).

Neka su $x, y_1, ..., y_n$ koordinate tačke $(x, y_1, ..., y_n)$ u $(n+1)$-dimenzionalnom prostoru. Tada rješenju $y_1 = \varphi(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ odgovara neka kriva u datom prostoru koja se zove *integralna kriva* sistema (3.4).

Neka su u oblasti definiranosti Ω sistema (3.4) (ili u dijelu oblasti) funkcije $f_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$ konačne. Neka je $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \; x \in (a, b)$ neko rješenje ovog sistema čija integralna kriva pripada oblasti Ω. U svakoj tački $(x_0, \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0))$ integralne krive ovog rješenja vektor tangentne ravni je $(1, \varphi_1'(x_0), \ldots, \varphi_n'(x_0))$ odnosno, na osnovu (3.4)

$$(1, f_1(x_0, \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)), \ldots, f_n(x_0, \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0))).$$

Na ovaj način dobivamo *vektorsko polje* sistema (3.4) kao skup tačaka $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$ i odgovarajućih vektora tangentnih ravni u tim tačkama, tj.

$$\{(x, y_1, ..., y_n); (1, f_1(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \ldots, f_n(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)))\}.$$

Svaka integralna kriva sistema (3.4) ima osobinu da se u svakoj njenoj tački vektor tangentne ravni poklapa sa vektorom vektorskog polja u toj tački. Vrijedi i obrnuto: Ako neprekidno diferencijabilna kriva koja pripada oblasti Ω ima osobinu da se u svakoj njenoj tački vektor tangentne ravni poklapa sa vektorom vektorskog polja u toj tački, onda je ta kriva integralna kriva sistema (3.4).

Ako u tački $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ desne strane sistema (3.4) ili neke od njih postaju oblika $\dfrac{0}{0}$, onda kažemo da u toj tački polje nije definirano. Smatrat ćemo da takvom tačkom ne prolazi niti jedna integralna kriva sistema (3.4). Ako se integralna kriva odlikuje svojstvom da

$$\varphi_1(x) \to y_1^{(0)}, ..., \varphi_n(x) \to y_n^{(0)} \;\text{ kada } x \to x_0,$$

onda kažemo da se integralna kriva približava tački $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

3.1.2 Cauchyev problem početnih vrijednosti

Za sistem (3.4) *Cauchyev problem početnih vrijednosti* formulira se na sljedeći način:

Definicija 3.1.3. *Između svih rješenja sistema* (3.4) *naći ono rješenje*

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$$

u kojem funkcije $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *primaju unaprijed zadane vrijednosti* $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ *pri zadanoj početnoj vrijednosti* x_0 *nezavisno promjenljive* x *:*

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)},$$

tj. rješenje zadovoljava uvjet

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)}, \quad za\ x = x_0. \tag{3.5}$$

Brojevi $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ *se nazivaju početnim vrijednostima funkcija, a broj* x_0 *početna vrijednost nezavisno promjenljive* x*. Uvjet* (3.5) *se naziva početnim uvjetom.*

Geometrijski se Cauchyev problem za sistem (3.4) pri uvjetima (3.5) može formulisati na sljedeći način: Između svih integralnih krivih sistema (3.4) naći onu krivu koja prolazi unaprijed zadanom tačkom $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$.

Vezano za Cauchyev problem početnih vrijednosti ovdje ćemo posmatrati pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja ovog problema.

Primijetimo da normalan sistem (3.4) možemo napisati u sljedećem obliku

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}), \tag{3.6}$$

gdje je $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ vektor kolona, tj.

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{Y}) \\ f_2(x, \mathbf{Y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{Y}) \end{pmatrix}$$

a $(x, \mathbf{Y}) = (x, y_1, ..., y_n)$. Također, uzimajući oznake iz (3.6), Cauchyev problem (3.5) možemo napisati u obliku

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}),\ \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0. \tag{3.7}$$

Oblast definiranosti sistema (3.4) čijom svakom tačkom prolazi neka integralna kriva zove se *oblast egzistencije rješenja* sistema (3.4). Ako, osim toga, svakom tačkom prolazi samo jedna integralna kriva, onda ćemo tu oblast zvati *oblast egzistencije i jedinstvenosti* rješenja sistema (3.4). Ovu oblast ćemo označiti sa $\mathcal{E}$. Kao i kod diferencijalnih jednadžbi, pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja je ključno pitanje u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi, odnosno sistema diferencijalnih jednadžbi. Napomenimo da postoji veliki broj tvrdnji koje pri različitim dovoljnim uvjetima daju egzistenciju i jedinstvenost rješenja. Ovdje ćemo govoriti o Peanovom teoremu o egzistenciji rješenja problema početnih vrijednosti i Picardovom teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja problema početnih vrijednosti. Ovi teoremi su značajni kako sa teorijskog tako i sa aspekta primjena. Oba teorema daju dovoljne uvjete za egzistenciju odnosno egzistenciju i jedinstvenost rješenja problema početnih vrijednosti.

Teorem 3.1.1 (Peanov teorem). *Neka je u oblasti* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *definirana funkcija* $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ *koja je neprekidna na* Ω. *Tada za svako* $(x_0, \mathbf{Y}) = (x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \in \Omega$ *Cauchyev problem* $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$, $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0$ *ima bar jedno rješenje. To rješenje je definirano bar na jednom segmentu* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *gdje broj h općenito ne zavisi od* $(x_0, \mathbf{Y}_0)$.

Dokaz Peanovog teorema izvodi se analogno kao i dokaz koji je dat u ovom udžbeniku za slučaj diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Prije navođenja Picardovog teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja problema početnih vrijednosti, definirat ćemo Lipschitz neprekidnost za realne funkcije više realnih promjenljivih.

Definicija 3.1.4. *Funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, *zadovoljava Lipschitzov uvjet sa konstantom* $L > 0$ *po promjenljivim* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *u oblasti* Ω, *ako za bilo koje dvije tačke* $(x, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)})$, $(x, y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)}) \in \Omega$ *vrijedi*

$$|f(x, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) - f(x, y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)})| \leq L \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(1)} - y_k^{(2)}|.$$

Teorem 3.1.2 (Picardov teorem). *Neka je dat normalan sistem diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.8}$$

i početni uvjeti

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)}, \quad \text{za } x = x_0. \tag{3.9}$$

Pretpostavimo da su funkcije koje se nalaze na desnoj strani sistema (3.8) *neprekidne u nekoj zatvorenoj i ograničenoj oblasti*

$$\mathcal{R} = \{(x, y_1, ..., y_n) : \ |x - x_0| \leq a, \, |y_1 - y_1^{(0)}| \leq b, \, |y_2 - y_2^{(0)}| \leq b, \ldots, |y_n - y_n^{(0)}| \leq b\}$$

(a i b su zadani pozitivni brojevi) i neka u oblasti $\mathcal{R}$ *zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

1. *Funkcije* $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(k = 1, ..., n)$ *su neprekidne po svim svojim argumentima, pa slijedi da su i ograničene, tj.*

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n)| \leq M, \; k = 1, ..., n$$

gdje je M pozitivna konstanta, a $(x, y_1, \dots, y_n)$ proizvoljna tačka iz oblasti $\mathcal{R}$;

2. *Funkcije $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ imaju ograničene parcijalne izvode po argumentima $y_1, \dots, y_n$, tj.*

$$\left|\frac{\partial f_k(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_l}\right| \leq K, \quad (k, l = 1, \dots, n),$$

gdje je K pozitivna konstanta, a $(x, y_1, \dots, y_n)$ proizvoljna tačka iz oblasti $\mathcal{R}$.

Tada sistem (3.8) *ima jedinstveno rješenje*

$$y_1 = y_1(x), ..., y_n = y_n(x)$$

koje zadovoljava početni uvjet (3.9). *To rješenje je definirano i neprekidno diferencijabilno na intervalu*

$$|x - x_0| \leq h,$$

gdje je

$$h = \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}.$$

Prije skice dokaza ovog teorema, primijetimo da iz uvjeta 2. slijedi da funkcije f_k $(k = 1, ..., n)$ zadovoljavaju Lipschitzov uvjet[1] po $y_1, ..., y_n$, tj. vrijedi

$$|f_k(x, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) - f_k(x, y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)})| \leq L \sum_{l=1}^{n} |y_l^{(1)} - y_l^{(2)}|, \tag{3.10}$$

gdje je L pozitivna realna konstanta (Lipschitzova konstanta) a $(x, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)})$ i $(x, y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)})$ su bilo koje dvije tačke iz oblasti $\mathcal{R}$.

Zaista, koristeći formulu konačnih priraštaja (Lagrangeova formula), imamo

$$\begin{aligned}
&f_k(x, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) - f_k(x, y_1^{(2)}, ..., y_n^{(2)}) = \\
&= [f_k(x, y_1^{(1)}, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) - f_k(x, y_1^{(2)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)})] + \\
&+ [f_k(x, y_1^{(2)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)}) - f_k(x, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(1)}, ..., y_n^{(2)})] + \\
&+ \cdots + [f_k(x, y_1^{(2)}, ..., y_{n-1}^{(2)}, y_n^{(1)}) - f_k(x, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ..., y_n^{(2)})] =
\end{aligned}$$

[1]Ako je zadovoljen Lipschitzov uvjet to ne povlači postojanje odgovarajućih parcijalnih izvoda. Na primjer za $y' = |y|$, $f(x, y) = |y|$ vidimo da parcijalni izvod funkcije $f(x, y)$ ne postoji u tačkama $x-$ose $(y = 0)$. S druge strane, jednostavno se vidi da funkcija $f(x, y)$ zadovoljava Lipschitzov uvjet u cijeloj ravni xy sa konstantom $L = 1$.

$$= \frac{\partial f_k(x, y_1^{(2)} + \theta_{1k}(y_1^{(1)} - y_1^{(2)}), y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(1)})}{\partial y_1}(y_1^{(1)} - y_1^{(2)}) +$$
$$+ \frac{\partial f_k(x, y_1^{(2)}, y_2^{(2)} + \theta_{2k}(y_2^{(1)} - y_2^{(2)}), \ldots, y_n^{(1)})}{\partial y_2}(y_2^{(1)} - y_2^{(2)}) + \cdots +$$
$$+ \frac{\partial f_k(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_{n-1}^{(1)}, y_n^{(2)} + \theta_{nk}(y_n^{(1)} - y_n^{(2)}))}{\partial y_n}(y_n^{(1)} - y_n^{(2)}),$$
$$(0 < \theta_{nk} < 1,\ k, l = 1, ..., n).$$

Sada korištenjem ograničenosti parcijalnih izvoda po promjenljivim $y_1, y_2, ..., y_n$ dobivamo Lipschitzov uvjet, pri čemu je $L = K$. Primjetimo da Lipschitzov uvjet predstavlja procjenu rasta desne strane sistema (3.7) po argumentima $y_1, y_2, ..., y_n$, pri čemu iz (3.10) vidimo da je ta procjena ravnomjerna po x na intervalu $|x - x_0| \leq a$.

Dokaz. Sada ćemo skicirati dokaz. Studentima predlažemo da sami na osnovu skice pokušaju dokazati teorem, pri tome preporučujemo da urade prvo dokaz za slučaj normalnog sistema od dvije jednadžbe.

(i) Kao i u slučaju Cauchyevog problema za diferencijalne jednadžbe prvog reda, primijetimo da je posmatrani Cauchyev problem za sistem (3.8) ekvivalentan sljedećoj integralnoj formi

$$y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))dt \tag{3.11}$$

(ii) Sada definiramo niz Picardovih aproksimacija na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y_i^{(0)}(x) &= y_0 & (3.12)\\ y_i^{(k)}(x) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1^{(k-1)}(t), y_2^{(k-1)}(t), \ldots, y_n^{(k-1)}(t))dt,\ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Zatim se dokaže (slično kao i kod dokaza za jednadžbe prvog reda) da su ove funkcije dobro definirane na $[x_0 - h, x_0 + h]$. Pri dokazu se može koristiti matematička indukcija. Prva iteracija je očito dobro definirana, jer je tačka $(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in \mathcal{R}$ za $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ $(h \leq a)$ itd.

(iii) Sada treba dokazati ravnomjernu konvergenciju niza iteracija. U tom cilju $k-$tu iteraciju zapišemo na sljedeći način

$$y_i^{(k)} = y_i^{(0)} + (y_i^{(1)} - y_i^{(0)}) + \cdots + (y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}).$$

Niz iteracija $\{y_i^{(k)}(x)\}$ ravnomjerno konvergira ako i samo ako ravnomjerno konvergira red $\sum_{l=1}^{\infty}(y_i^{(l)} - y_i^{(l-1)})$. Da bi se pokazala ravnomjerna konvergencija reda potrebno je ocijeniti svaki član reda. U tom cilju je neophodno koristiti Lipschitz neprekidnost i dokaz izvesti metodom matematičke indukcije.

(iv) Sada u izrazu (3.12) treba pustiti da $k \to \infty$, pri čemu se prethodno mora pokazati da je moguće ući sa limesom pod znak integrala. Za ovo posljednje je potrebno dokazati da niz podintegralnih funkcija konvergira ravnomjerno. Ravnomjeran limes niza ovih iteracija je upravo rješenje Cauchyevog problema.

(v) Na kraju je potrebno dokazati da je ovako dobiveno rješenje jedinstveno. U tom cilju se pretpostavi da postoje dva takva rješenja. Zatim se procijeni razlika ovog drugog rješenja i niza itercaija $\{y_i^{(k)}\}$. Pokaže se da ta razlika teži nuli kad $k \to \infty$.

$\square$

Iz ovog teorema slijedi da ako su desne strane sistema (3.8) polinomi po svojim argumentima, onda za bilo koji početni uvjet postoji jedinstveno rješenje sistema (3.8) koje zadovoljava date početne uvjete. Napomenimo da su ovi teoremi lokalnog karaktera, jer daju dovoljne uvjete egzistencije i jedinstvenosti rješenja početnog problema u nekoj okolini tačke x_0.

Teorem 3.1.3. *Ako desna strana sistema* (3.8) *zadovoljava sve uvjete Cauchy-Pickardovog teorema u oblasti $\mathcal{R}$, onda je rješenje*

$$y_k = \varphi(x; \bar{x}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_n) \quad (k = 1, 2..., n) \tag{3.13}$$

sa početnim uvjetima $y_1 = \bar{y}_1, y_2 = \bar{y}_2, ..., y_n = \bar{y}_n$ za $x = x_0$ ravnomjerno neprekidna funkcija po nezavisnoj promjenljivoj x i neprekidna funkcija po početnim uvjetima $\bar{x}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$, kada se x mijenja u nekoj okolini tačke $x = x_0$,

$$|x - x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega \tag{3.14}$$

a početni uvjeti $\bar{x}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$, u nekoj okolini tačke $(x_0, y_1^{(1)}, ..., y_n^{(1)})$, tj.

$$|\bar{x} - x_0| \leq \omega,\ |\bar{y}_1 - y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, ..., |\bar{y}_n - y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \tag{3.15}$$

gdje je $h = \left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $0 \leq \omega < \dfrac{h}{4}$.

3.1.3 Opće rješenje

Familiju rješenja sistema (3.4) koja zavisi od n proizvoljnih konstanti $C_1, C_2, ..., C_n$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 &= y_2(x, C_2, C_2, \ldots, C_n) \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned} \tag{3.16}$$

nazivamo općim rješenjem sistema (3.4). Geometrijski gledano familija (3.16) u $(n+1)$-dimenzionalnom prostoru $(x, y_1, ..., y_n)$ predstavlja familiju integralnih krivih koja zavisi od n parametara $C_1, C_2, ..., C_n$, pri čemu su jednadžbe te familije rješene po $y_1, y_2, ..., y_n$. Sada ćemo definirati pojam općeg rješenja sistema (3.4) u oblasti Ω promjenljivih $x, y_1, ..., y_n$. U oblasti Ω posmatrat ćemo oblast u čijoj svakoj tački Cauchyev problem za sistem (3.4) ima jedinstveno rješenje. Tu oblast ćemo ponovo (kao kod jednadžbi prvog reda) označavati sa $\mathcal{E}$ i zvati je *oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja.* Na oblasti $\mathcal{E}$ definiramo opće rješenje.

Definicija 3.1.5. *Neka je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja sistema* (3.4)*. Skup od n funkcija,*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 &= y_2(x, C_2, C_2, \ldots, C_n) \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned} \tag{3.17}$$

definiranih u nekoj oblasti promjenljivih $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$ koje imaju neprekidne parcijalne izvode po x naziva se opće rješenje sistema (3.4) *u oblasti $\mathcal{E}$ ako je:*

(i) *sistem* (3.17) *rješiv po proizvoljnim konstantama $C_1, C_2, \ldots, C_n$ u oblasti $\mathcal{E}$, tj. postoje funkcije $\psi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $i = 1, ..., n$, tako da je*

$$\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ C_2 &= \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ C_n &= \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.18}$$

(ii) *skup funkcija* (3.17) *je rješenje sistema* (3.4) *u oblasti $\mathcal{E}$ za sve vrijednosti proizvoljnih konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$, određenih sa* (3.18) *za $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{E}$.*

Dakle, za svaki početni uvjet rješavanjem sistema (3.18) dobivamo konkretne vrijednosti konstanti i dobivamo konkretno rješenje sistema.

Teorem 3.1.4. *Opće rješenje sistema* (3.4) *sadrži sva Cauchyeva rješenja čije integralne krive pripadaju oblasti $\mathcal{E}$.*

Dokaz. Neka je $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \in \mathcal{E}$ proizvoljna tačka i $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ Cauchyevo rješenje sistema (3.4), definirano u nekoj okolini tačke x_0 koje zadovoljava početne uvjete $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$, $i = 1, 2 \ldots, n$. Neka je opće rješenje tog sistema $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ovaj sistem jednadžbi je rješiv po C_i, $i = 1, 2 \ldots, n$; $C_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ za svako

$(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{E}$, pa postoje konstante $C_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ takve da je $\psi_i(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) = C_i^{(0)}$, $i = 1, 2 \ldots, n$. Definirajmo funkcije

$$h_i(x) = y_i(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ove funkcije su rješenje sistema (3.4) čija integralna kriva prolazi tačkom $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, jer je

$$h_i(x_0) = y_i(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}) = y_1(x_0, \psi_i(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^0)) = y_i^{(0)},$$

za $i = 1, \ldots, n$. Tačkom $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ prolaze dvije integralne krive dvaju rješenja, a $\mathcal{E}$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja, to se ova rješenja moraju poklapati na zajedničkom intervalu definiranosti, pa je rješenje $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2; \ldots, n$ sadržano u općem rješenju. Kako je ovo proizvoljno Cauchyevo rješenje, to opće rješenje sadrži sva Cauchyeva rješenja. □

Zbog ove tvrdnje, opće rješenje sistema (3.4) definira se i kao rješenje koje zavisi od n proizvoljnih konstanti, ako se iz njega za proizvoljan izbor konstanti može dobiti Cauchyevo rješenje.

Opće rješenje se može napisati i u implicitnom obliku.

Rješenje koje se dobije iz općeg rješenja kada konstante C_i imaju konkretne realne vijednosti uključujući $\pm\infty$ naziva se *partikularno rješenje*. Rješenja koja nisu sadržana u općem rješenju, tj. koja se ne mogu dobiti iz općeg rješenja niti za jednu vrijednost konstanti C_i i čije integralne krive ne pripadaju oblasti jedinstvenosti, naziva se *singularno rješenje*. Dakle, to je rješenje u čijoj svakoj tački je narušena jedinstvenost rješenja.

Definicija 3.1.6. *Rješenje $y = \varphi(x)$ sistema diferencijalnih jednadžbi* (3.4) *je singularno ako svakom njegovom tačkom prolazi i neko drugo rješenje, koje u toj tački ima istu tangentnu ravan kao i rješenje $y = \varphi(x)$, a razlikuje se od njega u svakoj okolini tačke dodira.*

Definicija 3.1.7. *Singularna tačka sistema* (3.4) *je tačka u kojoj rješenje ili ne postoji, ili ako postoji, nije jedinstveno.*

Budući da je u tačkama singularnih rješenja narušena jedinstvenost rješenja, onda singularna rješenja i izolirane singularne tačke treba tražiti tamo gdje su funkcije f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ prekidne, ili tamo gdje nije ispunjen neki od uvjeta jedinstvenosti, npr. ograničenost funkcija $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $(i, k = 1, \ldots, n)$.

3.1.4 Prvi integral

U definiciji općeg rješenja, u oblasti egzistencije i jedinstvenosti rješenja $\mathcal{E}$, ako posmatramo jednu od jednakosti

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i$$

vidimo da lijeva strana postaje konstantna ako se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zamijene partikularnim rješenjima, iz oblasti $\mathcal{E}$, tj. vrijedi

$$\psi_i[x, y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots, y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)] \equiv C_i \tag{3.19}$$

Svaka funkcija ψ koja ima osobinu datu u relaciji (3.19), naziva se **integral** sistema (3.4).

Definicija 3.1.8. *Neka je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja sistema* (3.4). *Funkcija $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ koja nije identički jednaka konstanti, naziva se* integralom sistema (3.4) *ako duž bilo kojeg partikularnog rješenja ima konstantnu vrijednost.*

Budući da ψ nije identički jednaka konstanti, onda bar jedan od parcijalnih izvoda $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial y_i}$ nije identički jednak nuli.

Dakle, ako je funkcija $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ integral sistema (3.4) u smislu date definicije, onda je njen totalni diferencijal $d\psi$ identički (u odnosu na x) jednak nuli (duž tog rješenja), tj.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot dy_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot dy_n \equiv 0 \tag{3.20}$$

duž partikularnog rješenja. S druge strane, duž tog rješenja je

$$dy_k \equiv f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) dx, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.21}$$

Imajući u vidu (3.21), identitet (3.20) postaje

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) dx + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) dx \equiv 0.$$

Sada ćemo navesti i drugu definciju integrala.

Definicija 3.1.9. *Neka je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja sistema* (3.4). *Funkcija $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, koja ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po promijenljivim $x, y_1, \ldots, y_n$ pri čemu u posmatranoj oblasti ovi izvodi nisu istovremeno jednaki nuli, naziva se integralom sistema* (3.4) *ako je potpuni diferencijal ove funkcije identički jednak nuli.*

Primijetimo da ako je funkcija $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ integral sistema (3.4) u smislu Definicije 3.1.9, onda je $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ u smislu Definicije 3.1.8. Međutim, obrnuto nije tačno. Naime, funkcija $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ može biti integral u smislu Definicije 3.1.8 ali da nema parcijalne izvode po svim svojim argumentima.

Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.1.5. *Neka je $\mathcal{E}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja sistema* (3.4). *Funkcija $\psi \in C^1(\mathcal{E})$ je integral sistema* (3.4) *ako i samo ako je*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot f_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot f_n = 0, \ (x, y_1, ..., y_n) \in \mathcal{E}. \tag{3.22}$$

Dokaz. Ako je ψ integral sistema (3.4) onda na osnovu prethodnog razmatranja dobivamo (3.22). Obrnuto, ako pretpostavimo da vrijedi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\cdot f_1+\cdots+\frac{\partial \psi}{\partial y_n}\cdot f_n=0,$$

onda iz izraza za diferencijal i s obzirom da su y_i partikularna rješenja sistema (3.4), dobivamo da je $\psi = const.$ □

Definicija 3.1.10. *Izraz $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$, gdje je $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ integral sistema* (3.4) *u smislu date definicije a C proizvoljna konstanta, naziva se **prvim integralom** sistema* (3.4)*.*

Ako su $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ integrali sistema (3.4), onda za proizvoljnu funkciju Φ vrijedi $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = const.$ duž bilo kog rješenja.

Svaka od jednakosti (3.18) predstavlja prvi integral sistema (3.4). Skup svih prvih integrala (3.18) ima osobinu da se može riješiti po funkcijama $y_1, y_2, ..., y_n$, pri čemu na taj način dobivamo opće rješenje (3.17) sistema (3.4) u oblasti $\mathcal{E}$. Svaki skup od n prvih integrala koji ima ovu osobinu naziva se ***općim integralom*** sistema (3.4) u oblasti $\mathcal{E}$.

Prvi integrali $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ iz (3.18) koji čine opći integral sistema (3.4) imaju osobinu da su nezavisni, tj. za funkcije $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ ne postoji funkcija Φ takva da vrijedi sljedeći odnos

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \equiv 0.$$

Ako bi takav odnos među prvim integralima $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ postojao onda iz sistema (3.18) ne bismo mogli naći funkcije $y_1, y_2, ..., y_n$.

Definicija 3.1.11. *Za integrale $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, $m \le n$ sistema* (3.4) *definirane u oblasti $\mathcal{E}$, kažemo da su nezavisni u toj oblasti, ako niti za jednu neprekidno diferencijabilnu funkciju Φ ne vrijedi relacija $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m) \equiv 0$ u oblasti $\mathcal{E}$. U suprotnom ovi integrali su zavisni.*

Prije dokaza teorema koji govori o nezavisnosti integrala sistema (3.4), navedimo sljedeći teorem iz analize koji govori o nezavisnosti m funkcija od n nezavisno promjenljivih[2].

Teorem 3.1.6. *Neka je dat skup od m funckija $u_1, u_2, \dots, u_m$ od n nezavisnih promjenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \ge m$, koje imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda na zajedničkom domenu. Da bi ove funkcije bile nezavisne potrebno je i dovoljno da neka od submatrica $m-$tog reda matrice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2}, \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

[2]Vidjeti [22], str.202.

ima determinantu koja nije identički jednaka nuli.

Sljedeći teorem daje potrebne i dovoljne uvjete nezavisnosti integrala $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Teorem 3.1.7. *Integrali $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, sistema* (3.4), *definirani u oblasti $\mathcal{E}$, su nezavisni ako i samo ako je determinanta odgovarajućeg Jacobiana različita od nule, tj. ako vrijedi*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \ \ (x, y) \in \mathcal{E}.$$

Dokaz. Dovoljnost uvjeta slijedi iz Teorema 3.1.6.

Dokažimo da je uvjet potreban. Neka su $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ nezavisni integrali sistema (3.4) definirani u oblasti $\mathcal{E}$. Uzmimo tačku $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \in \mathcal{E}$ u kojoj je bar jedna od determinanti $n-$tog reda matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

različita od nule. Postojanje ove tačke garantira Teorem 3.1.6.

Pokažimo da je upravo determinanta sastavljena od posljednjih $n-$kolona prethodne matrice različita od nule u ovoj tački, tj.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \ \ \text{za } x = x_0, y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^n.$$

Primijetimo da ako je $\frac{\partial \psi_k}{\partial x} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ u tački $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, onda je uvjet automatski ispunjen. Uzmimo sada da je bar jedan od izraza $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$ različit od nule u tački $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$. Budući da su $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ prvi integrali sistema

(3.4) onda u datoj tački $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}f_1 + \cdots + \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}f_n &= 0,\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}f_1 + \cdots + \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n}f_n &= 0,\\
&\vdots\\
\frac{\partial\psi_n}{\partial x} + \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1}f_1 + \cdots + \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}f_n &= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, nehomogeni sistem linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}u_1 + \cdots + \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}u_n &= -\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}u_1 + \cdots + \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n}u_n &= -\frac{\partial\psi_2}{\partial x},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\quad \cdots\\
\frac{\partial\psi_n}{\partial y_1}u_1 + \cdots + \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}u_n &= -\frac{\partial\psi_n}{\partial x}.
\end{aligned}$$

(u tački $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$) je saglasan. Ovo znači da je rang matrice ovog sistema jednak rangu proširene matrice, a kako je rang proširene matrice jednak n, onda je rang matrice ovog sistema jednak n. Ovim je teorem dokazan. $\square$

Napomenimo da su n prvih integrala nezavisni ako su njihovi odgovarajući integrali nezavisni.

Iz gore rečenog slijedi da se problem nalaženja općeg rješenja sistema (3.4) svodi na problem nalaženja n nezavisnih prvih integrala tog sistema. Kada nađemo jedan prvi integral potrebno je naći i druge prve integrale(čiji broj zavisi od reda sistema) a koji su međusobno nezavisni. Dakle, svaki put kada nađemo novi prvi integral potrebno je provjeriti da li je on nezavisan sa prethodno nađenim prvim integralima. Na primjer, ako su nađeni integrali $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ $(1 < k < n)$, onda da bi ovi integrali bili nezavisni potrebno je i dovoljno da bar jedna od funkcionalnih determinanti $k-$tog reda koja je sastavljena od kolona matrice

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2} \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial\psi_k}{\partial y_n} & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_k} \cdots & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_n}
\end{pmatrix}$$

nije identički jednala nuli.

Primjer 3.1.1. *Pomoću prvih integrala riješiti sistem*

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Rješenje. Sabiranjem datih jednadžbi dobiva se:

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y, \quad \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

odakle je $x + y = C_1 e^t$. Slično oduzimanjem dobivamo da je $x - y = C_2 e^{-t}$. Na osnovu ovoga imamo da su prvi integrali dati sa

$$\begin{aligned}\psi_1(t, x, y) =& (x+y)e^{-t} = C_1\\ \psi_2(t, x, y) =& (x-y)e^{t} = C_2.\end{aligned}$$

Pokažimo da su dobiveni prvi integrali međusobno nezavisni. Zaista

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

To znači da je sa

$$x + y = C_1 e^t, \quad x - y = C_2 e^{-t}$$

dato opće rješenje polaznog sistema. Iz dobivenih prvih integrala možemo izraziti x i y preko t, C_1 i C_2. Sabiranjem ove dvije jednadžbe dobivamo da je

$$x = \frac{C_1}{2} e^t + \frac{C_2}{2} e^{-t},$$

a oduzimanjem dobivamo da je $y = \frac{C_1}{2} e^t - \frac{C_2}{2} e^{-t}$. Jasno je da se opće rješenje može napisati u obliku

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

♦

Primjer 3.1.2. *Pomoću prvih integrala riješiti sistem*

$$(t^2+1)\frac{dx}{dt} = -tx + y, \quad (t^2+1)\frac{dy}{dt} = -x - ty.$$

Rješenje. Ako prvu jednadžbu pomnožimo sa x a drugu sa y i saberemo, dobiva se

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = -\frac{t}{1+t^2} dt,$$

tj.

$$\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} d \ln(1 + t^2).$$

Integriranjem se dobiva da je

$$x^2 + y^2 = \frac{C_1}{1+t^2}, \quad (C_1 > 0),$$

pa je prvi integral dat sa

$$\psi_1 \equiv (1+t^2)(x^2+y^2) = C_1.$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo sa y a drugu sa x i oduzmemo, dobiva se

$$(t^2+1)y\frac{dx}{dt} - (t^2+1)x\frac{dy}{dt} = x^2+y^2, \quad \Rightarrow \frac{ydx - ydy}{x^2+y^2} = \frac{dt}{1+t^2},$$

tj.

$$\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{dt}{1+t^2},$$

dakle

$$\arctan\frac{x}{y} - \arctan t = \arctan C_2.$$

Na osnovu ovoga je drugi prvi integral dat sa

$$\psi_2 \equiv \frac{\frac{x}{y} - t}{1+\frac{x}{y}t} = C_2.$$

Iz drugog prvog integrala dobivamo da je

$$x = y\frac{t+C_2}{1-C_2t}.$$

Uvrštavanjem ovog u prvi prvi integral dobivamo da je

$$y^2\left(\frac{t+C_2}{1-C_2t}\right)^2 + y^2 = \frac{C_1}{1+t^2},\ (C_1>0) \quad \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{C_1}{1+C_2^2}}\frac{1-C_2t}{1+t^2}.$$

Na osnovu ovoga imamo da je

$$x = \pm\sqrt{\frac{C_1}{1+C_2^2}}\frac{t+C_2}{1+t^2}.$$

Ako stavimo da je

$$D_1 = \pm\sqrt{\frac{C_1}{1+C_2^2}}, \quad D_2 = \pm C_2\sqrt{\frac{C_1}{1+C_2^2}},$$

dobivamo da je opće rješenje dato sa

$$y = \frac{D_1 - D_2t}{1+t^2}, \quad x = \frac{D_1t + D_2}{1+t^2}.$$

♦

Primjer 3.1.3. *Pomoću prvih integrala riješiti sistem*

$$\frac{dx}{dt} = x(y^2-z^2), \quad \frac{dy}{dt} = -y(x^2+z^2), \quad \frac{dz}{dt} = z(x^2+y^2).$$

Rješenje. Množeći prvu jednadžbu sa x, drugu sa y i treću sa z te sabiranjem dobivenih jednadžbi, imamo da je

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0 \quad \Rightarrow d(x^2+y^2+z^2)=0.$$

Na osnovu toga je prvi prvi integral dat sa

$$\psi_1 \equiv x^2+y^2+z^2=C_1,\ (C_1>0).$$

Iz prvog prvog integrala dobivamo da je

$$x^2+y^2=C_1-z^2,$$

pa na osnovu treće jednadžbe sistema se dobiva

$$\frac{dz}{dt}=z(C_1-z^2).$$

Ovo je jednadžba sa razdvojenim promjenljivim i opće rješenje je dato sa

$$\frac{1}{C_1}\ln|z|+\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1}-z}{\sqrt{C_1}+z}\right|=t+C_2.$$

Na osnovu ovoga dobivamo da je drugi prvi integral dat sa

$$\psi_2 \equiv \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\ln|z|+\frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\right|-t=C_2.$$

Na isti način koristeći drugu jednadžbu sistema dobiva se treći prvi integral

$$\psi_3 \equiv \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\ln|y|+\frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+y}\right|+t=C_3.$$

Može se provjeriti da su ψ_1, ψ_2 i ψ_3 nezavisni prvi integrali ovog sistema. ♦

3.1.5 O broju nezavisnih integrala normalnog sistema

Sada ćemo dokazati teorem o broju nezavisnih integrala. Ovdje ćemo pretpostaviti da ovi integrali imaju neprekidne parcijalne izvode po $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Teorem 3.1.8. *Normalani sistem od n diferencijalnih jednadžbi ne može imati više od n nezavisnih integrala.*

Dokaz. Ovaj teorem tvrdi da ako se zna $n+1$ integrala $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi$ sistema (3.4), onda oni ne mogu biti nezavisni. Posmatrat ćemo dva slučaja:
(i) Integrali $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ su zavisni, u tom slučaju ovaj teorem je dokazan.
(ii) Integrali $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ su nezavisni. U tom slučaju oni zadovoljavaju uvjet

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Neka je ψ još jedan integral posmatranog sistema. Sada, kako su funkcije $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi$ integrali sistema (3.4), onda vrijede identiteti:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n & = & 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n & = & 0. \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n & = & 0.
\end{array}$$

Ovi identiteti govore da homogeni linearni sistem:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} u_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} u_{n+1} & = & 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} u_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} u_{n+1} & = & 0. \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} u_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} u_{n+1} & = & 0.
\end{array}$$

ima nenulto rješenje $u_1 = 1, u_2 = f_1, \ldots, u_{n+1} = f_n$. Dakle, determinanta ovog sistema je identički jednaka nuli, tj.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)} \equiv 0.$$

Odavde slijedi da je ψ funkcija od $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, tj. $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ u nekoj okolini tačke $(x_0, y_1 = y_1^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)})$, u kojoj je

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0, \quad (x_0, y_1 = y_1^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)}),$$

tj. funkcije $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \psi$ su zavisne. Pri tome funkcija Φ ima neprekidne parcijalne izvode po $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ koji nisu istovremeno jednaki nuli. $\square$

Teorem 3.1.9. *Ako su $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$, $(1 \leq k \leq n)$ nezavisni integrali sistema* (3.4)*, definirani u oblasti $\mathcal{E}$, a $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ bilo koja funkcija definirana u nekoj oblasti promjenljivih $z_1, z_2, \ldots, z_k$ u kojoj su sve vrijednosti funkcija $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ (kada tačka $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ prolazi oblasti $\mathcal{E}$), i ima u toj oblasti neprekidne parcijalne izvode po $z_1, z_2, \ldots, z_k$ koji nisu istovremeno jednaki nuli, onda je funkcija*

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$$

integral sistema (3.4)*.*

Dokaz. Funkcija ψ ima neprekidne parcijalne izvode po $x, y_1, y_2, ..., y_n$. Diferenciranjem funkcije ψ po njenim promjenljivim, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\
\frac{\partial \psi}{\partial y_1} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \\
&\vdots \\
\frac{\partial \psi}{\partial y_n} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}.
\end{aligned}$$

Sada treba pokazati da parcijalni izvodi funkcije ψ po $y_1, y_2, ..., y_n$ nisu istovremeno jednaki nuli. Bez umanjena općenitosti, pretpostavimo da je

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} \not\equiv 0 \text{ u oblasti } \mathcal{E}.$$

Tada u oblasti $\mathcal{E}$ postoji tačka $(x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(n)})$ i njena okolina u kojoj je $\frac{D(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)}{D(y_1,y_2,...,y_n)} \neq 0$. U toj okolini izvodi $\dfrac{\partial \psi}{\partial y_1}, ..., \dfrac{\partial \psi}{\partial y_n}$ nisu istovremeno jednaki nuli. Ostaje još pokazati da je totalni diferencijal funkcije Φ identički, na $\mathcal{E}$, jednak nuli. Imamo

$$d\psi = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} d\psi_i.$$

Kako je $d\psi_1 = \cdots = d\psi_n \equiv 0$, to je $d\psi \equiv 0$. Dakle, funkcija ψ je integral sistema (3.4). □

Na osnovu dokazanog možemo zaključiti sljedeće: Ako sistem (3.4) ima n nezavisnih integrala $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, onda formula

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

(uz učinjene pretpostavke o funkciji Φ) sadrži sve integrale sistema (3.4), pa zato predstavlja opći integral tog sistema.

3.1.6 Snižavanje reda sistema pomoću prvih integrala

Ako znamo k nezavisnih prvih integrala sistema (3.4), onda možemo red sistema sniziti za k.

Pokažimo da ako znamo jedan prvi integral, onda se red sistema (3.4) može sniziti za jedan. Naime, neka je poznat jedan prvi integral

$$\psi_1(x, y_1, ..., y_n) = C_1 \tag{3.23}$$

sistema (3.4). Pretpostavimo da je (3.23) riješena po y_1, tj.

$$y_1 = \bar{\varphi}_1(x, y_2, ..., y_n, C_1). \tag{3.24}$$

Uvrstimo (3.24) u preostalih $(n-1)$ jednadžbi sistema (3.4). Dobivamo sistem od $(n-1)$ jednadžbi sa $(n-1)$ nepoznatih funkcija $y_2, y_3, ..., y_n$

$$\begin{aligned} y_2' &= f_2(x, \bar{\varphi}_1, y_2, ..., y_n) \\ y_3' &= f_3(x, \bar{\varphi}_1, y_2, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, \bar{\varphi}_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pretpostavimo da je opće rješenje sistema (3.25) dato sa

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_3 &= \varphi_3(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ &\vdots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Tada zamjenom (3.26) u (3.24), imamo

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n). \tag{3.27}$$

Nije teško pokazati da formule (3.26) i (3.27) čine opće rješenje sistema (3.4). Na sličan način može se pokazati da ako znamo k nezavisnih prvih integrala da možemo red sistema (3.4) sniziti za k. Odavde slijedi da ako znamo $n-1$ prvih integrala sistema (3.4) onda se integriranje sistema svodi na rješavanje jedne diferencijalne jednadžbe sa jednom nepoznatom funkcijom.

Ako znamo $n-$nezavisnih prvih integrala, onda znamo i opći integral sistema, tj. riješili smo sistem.

3.1.7 Ekvivalentnost između jednadžbi n-tog reda i normalnog sistema od n jednadžbi prvog reda

Pokažimo da je svaka jednadžba $n-$tog reda ekvivalentna sistemu diferencijalnih jednadžbi n-tog reda. Vidjećemo da obrnuto vrijedi uz neke dodatne prirodne uvjete.

Neka je data jednadžba n-tog reda

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{3.28}$$

Označimo funkciju y sa y_1, tj. $y_1 = y$ i uvedimo nove funkcije $y_2, ..., y_n$ na sljedeći način

$$y_1' = y' = y_2,\ y_2' = y'' = y_3, ..., y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, ..., y_n). \tag{3.29}$$

Dakle, dobivamo sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, ..., y_n). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Sistem (3.30) se zove normalni sistem diferencijalnih jednadžbi ekvivalentan jednadžbi (3.28). Ako znamo riješiti sistem (3.30) onda smo našli i rješenje jednadžbe (3.28) i obrnuto. Također, rješenje Cauchyevog problema sistema (3.30) je istovremeno i rješenje Cauchyevog problema jednadžbe (3.28). Svođenje jednadžbe bilo kojeg reda, riješenje po najvišem izvodu, na ekvivalentan normalni sistem u nekim slučajevima pojednostavljuje nalaženje općeg rješenja ili nalaženje rješenja Cauchyevog problema. Također, dokaz nekih teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyevog problema ne mora se obavezno izvoditi i za diferencijalne jednadžbe n-tog reda i za normalne sistema, već je dovoljno izvesti dokaze za normalne sisteme.

Primjer 3.1.4. *Posmatrajmo jednadžbu drugog reda*

$$y'' = f(x, y, y'),$$

gdje je x nezavisno promjenljiva a $y = y(x)$ tražena funkcija. Uvedimo novu nepoznatu funkciju $y_1 = y'$. Tada je navedena jednadžba ekvivalentna sljedećem sistemu jednadžbi

$$\begin{aligned} y' &= y_1, \\ y_1' &= f(x, y, y_1). \end{aligned}$$

Sada ćemo pokazati kako se normalan sistem od n jednadžbi prvog reda svodi na diferencijalnu jednadžbu n-tog reda riješenu po izvodu najvišeg reda. Neka je dat sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{aligned} \tag{3.31}$$

gdje su funkcije $f_1, f_2, ..., f_n$ $(n-1)-$puta diferencijabilne. Diferenciranjem prve jednadžbe sistema (3.31) po x $(n-1)-$puta, smatrajući da su y_i funkcije od x i zamijenjujući, poslije svakog diferenciranja, izvode $y_1', y_2', ..., y_n'$ iz sistema (3.31), dobivamo sljedeći sistem jednadžbi.

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \equiv \\
&\equiv \Psi_2(x, y_1, ..., y_n) \\
y_1'' &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_n} f_n \equiv \\
&\equiv \Psi_3(x, y_1, ..., y_n) \\
\cdots & \;\; \cdots\cdots \\
y_1^{(n-1)} &= \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y_n} y_n' = \\
&= \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi_{n-2}}{\partial y_n} f_n \equiv \Psi_{n-1}(x, y_1, ..., y_n) \\
y_1^{(n)} &= \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_n} y_n' = \\
&= \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_n} f_n \equiv \Psi_n(x, y_1, ..., y_n).
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Pretpostavimo da je

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\
\frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_n}
\end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.33}
$$

Tada sistem jednadžbi kojeg čine prva jednadžba sistema (3.31) i prvih $(n-2)$ jednadžbi sistema (3.32), ima jedinstveno rješenje po $y_2, ..., y_n$, pri čemu su $y_2, ..., y_n$, izraženi preko $x, y_1, y_1', ..., y_n'$. Zamjenom ovako dobivenih funkcija u posljednju jednadžbu sistema (3.32) dobivamo diferencijalnu jednadžbu n-tog reda

$$y^{(n)} = f(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \tag{3.34}$$

Ako znamo rješenja $y_1, y_2, ..., y_n$ sistema (3.31), onda je prva funkcija y_1 rješenje jednadžbe (3.34). Pokažimo da (pri učinjenim pretpostavkama) vrijedi i obrnuto, tj. rješenje y_1 jednadžbe (3.34) i funkcije $y_2, ..., y_n$ nađene iz prve jednadžbe sistema (3.31) i $(n-2)$ jednadžbi sistema (3.32) čine rješenje sistema (3.31). Zaista, funkcije $y_1, ..., y_n$ zadovoljavaju prvu jednadžbu sistema (3.31) jer je $y_1' =$

f_1. Sada iz sistema (3.32), koristeći $y_1 = f_1$, dobivamo

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_2' - f_2) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_n' - f_n) & = & 0 \\
\frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1}(y_2' - f_2) + \cdots + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_n}(y_n' - f_n) & = & 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\
\frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_1}(y_2' - f_2) + \cdots + \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial y_n}(y_n' - f_n) & = & 0.
\end{array} \tag{3.35}$$

Sistem (3.35) možemo posmatrati kao linearan homogen sistem po nepoznatim $y_2' - f_2, ..., y_n' - f_n$. Kako je determinanta tog sistema različita od nule, onda sistem (3.35) ima samo trivijalna rješenja po nepoznatim $y_2' - f_2, ..., y_n' - f_n$, tj.

$$y_2' = f_2, ..., y_n' = f_n.$$

To zajedno sa $y_1' = f_1$ pokazuje da funkcije $y_1, y_2, ..., y_n$ zadovoljavaju sistem (3.31). Jednažba (3.34) se zove jednadžba n-tog reda ekvivalentna sistemu (3.31) u smislu da je problem nalaženja rješenja sistema (3.31) ekvivalentan problemu nalaženja rješenja jednadžbe (3.34).

Primjer 3.1.5. *Naći opće rješenje sistema*

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + t, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y + t.$$

Rješenje. Diferenciranjem prve jednadžbe, a zatim korištenjem druge jednadžbe dobiva se

$$x'' = x' + 4x + 2y + 2t + 1. \tag{3.36}$$

Ako iz prve jednadžbe sistema izračunamo y i ako ga uvrstimo u (3.36) dobivamo jednadžbu

$$x'' - 2x' - 3x = t + 1.$$

Opće rješenje ove jednadžbe je dato sa

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}. \tag{3.37}$$

Uvrštavanjem (3.37) u prvu jednadžbu sistema dobivamo da je

$$y = \frac{1}{2}(x' - x - t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}.$$

♦

3.2 Sistem diferencijalnih jednadžbi u simetričnom obliku

Nezavisni prvi integrali sistema u normalnom obliku se lakše nalaze ukoliko se sistem napiše u tzv. *simetričnom obliku* koji glasi:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{3.38}$$

U sistemu (3.38) sve promjenljive ulaze ravnopravno, dok to nije slučaj kod normalnih sistema. Ovdje pretpostavljamo da funkcije $X_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, nisu istovremeno jednake nuli niti u jednoj tački oblasti $\mathcal{D}$.

Normalni sistem (3.4) može se prevesti u sistem u simetričnom obliku i to tako da ga prepišemo na sljedći način:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}. \tag{3.39}$$

Sistem (3.39) nazivamo *sistem diferencijalnih jednadžbi u simetričnom obliku pridružen normalnom sistemu diferencijalnih jednadžbi.* U ovom sistemu sve promjenljive $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ulaze ravnopravno za razliku od sistema (3.4) u kojem je x nezavisna promjenljiva dok su $y_1, ..., y_n$ tražene funkcije.

Ako nazivnike $1, f_1, \ldots, f_n$ pomnožimo zajedničkim sadržiocem, na primjer $\phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, onda dobivamo sistem

$$\frac{dx}{\phi} = \frac{dy_1}{f_1\phi} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n\phi}. \tag{3.40}$$

Stavimo: $x \equiv x_1,\ y_1 \equiv x_2, \ldots, y_n = x_{n+1}$, i

$$\begin{aligned} \phi &\equiv X_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\ f_1\phi &\equiv X_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\ &\vdots, \\ f_n\phi &\equiv X_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Sada sistem (3.40) možemo napisati u simetričnom obliku

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})} = \cdots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}.$$

Primjer 3.2.1. *Napisati u simetričnom obliku sistem*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{y - x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y - x}.$$

Rješenje. Iz sistema dobivamo da je

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{y}{y-x}} = \frac{dy}{\frac{x}{y-x}}.$$

Množeći nazivnike sa $y - x$ dobivamo sistem u simetričnom obliku

$$\frac{dt}{y-x} = \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

♦

3.3 Integral, prvi integral i opći integral sistema diferencijalnih jednadžbi u simetričnom obliku

Posmatrajmo sistem

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \tag{3.41}$$

Pretpostavimo da su funkcije $X_1, X_2, \dots, X_n$ definirane i neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima po $x_1, x_2, \dots, x_n$ u nekoj oblasti $\mathcal{D}$ promjenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$, pri čemu niti u jednoj tački te oblasti nisu istovremeno jednake nuli. Neka je $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ neka fiksna tačka u toj oblasti. Ne umanjujući općenitost pretpostavimo da je

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0. \tag{3.42}$$

Uz učinjene pretpostavke na sistem (3.41) uzimajući x_n za nezavisno promjenljivu, možemo sistem (3.41) prepisati u sistem u normalnom obliku sa $n-1$ jednadžbi:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \cdots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{3.43}$$

Rješenje, integral, opće rješenje i opći integral sistema (3.43) je rješenje, integral, opće rješenje i opći integral sistema (3.41). Sistem (3.43), pa slijedi, i sistem (3.41), ima $n-1$ nezavisnih integrala:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Iz ranije rečenog slijedi da

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}),$$

gdje je Φ proizvoljna funkcija koja ima neprekidne parcijalne izvode po $\psi_1, \psi_2, \dots,$ ψ_{n-1} koji nisu istovremeno jednaki nuli, sadrži sve integrale sistema (3.43), odnosno sistema (3.41). Kao i ranije vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1. *Funkcija ψ koja je neprekidna sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda na oblasti $\mathcal{E}$ je integral sistema (3.41) ako i samo ako za svako $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}$ vrijedi:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot X_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot X_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot X_n = 0.$$

Opći integral sistema (3.43), a samim tim i sistema (3.41) je skup svih integrala oblika

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i, \; i = 1, 2 \ldots, n-1.$$

Ovaj sistem implicitno određuje opće rješenje sistema (3.41)

$$x_i = \phi_i(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \; i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Primjer 3.3.1. *Naći prve integrale sistema*

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(x-z)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

Rješenje. Sistem se može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(z-x)}{x(y-z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z(x-y)}{x(y-z)},$$

odakle je

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = \frac{xz - yx + zx - zy}{x(y-z)} = -1$$

pa dobivamo da je prvi prvi integral dat sa

$$\psi_1 \equiv y + z + x = C_1.$$

Sa druge strane, na osnovu osobine produžene proporcije[3] imamo da je

$$\frac{yzdx + zxdy + xydz}{xyz(y - x + z - x + x - y)} = \frac{dx}{x(y-z)}, \text{ tj.}$$

$$yzdx + zxdy + xydz = 0 \quad \Rightarrow d(xyz) = 0.$$

Na osnovu ovog imamo da je drugi prvi integral dat sa

$$\psi_2 \equiv xyz = C_2.$$

♦

Primjer 3.3.2. *Naći prve integrale sistema*

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

[3] $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_n b_n}$

Rješenje. Iz

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

dobivamo prvi prvi integral

$$\psi_1 \equiv \frac{z}{y} = C_1.$$

Na osnovu njega i jednadžbe

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy}$$

dobivamo homogenu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2(1 + C_1^2)},$$

koja nam daje drugi prvi integral

$$\psi_2 \equiv \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2.$$

Može se pokazati da su ψ_1 i ψ_2 nezavisni prvi integrali posmatranog sistem. ♦

Primjer 3.3.3. *Naći prve integrale sistema*

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}.$$

Rješenje. Dati sistem možemo napisati u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{dz}{\frac{1}{y-x}}.$$

Na osnovu tog imamo da je

$$\frac{dx}{1} = \frac{zdy}{z - 1} = \frac{(y - x)dz}{1}.$$

Na osnovu osobina proporcije imamo

$$\frac{z(dy - dx)}{-1} = \frac{(y - x)dz}{1} \quad \Rightarrow \frac{d(y - x)}{y - x} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Odavde dobivamo da je prvi prvi integral dat sa

$$\psi_1 \equiv (y - x)z = C_1.$$

Izračunavanjem z iz prvog prvog integrala i uvrštavanjem u prvu jednadžbu sistema dobivamo

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y - x}{C_1}, \quad \Rightarrow \frac{d(y - x)}{y - x} + \frac{dx}{C_1} = 0,$$

odakle dobivamo drugi prvi integral

$$\psi_2 \equiv (y - x)e^{\frac{x}{(y-x)z}} = C_2.$$

Može se pokazati da su ψ_1 i ψ_2 nezavisni prvi integrali posmatranog sistem. ♦

3.4 Zadaci za samostalan rad

1. Naći prve integrale sistema diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{dx}{y^2+xy} = \frac{-dy}{x^2+xy} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

2. Naći prve integrale sistema diferencijalnih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{z+e^y}{z+e^x} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{z^2-e^{x+y}}{z+e^x} \end{aligned}\right\}.$$

3. Integrirati sistem

$$\frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

uz početni uvjet $z=-1, \quad y=1$ za $x=0$.

4. Integrirati sljedeće sisteme:

(i) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$,

(ii) $\dfrac{dx}{mz-ny} = \dfrac{dy}{nx-lz} = \dfrac{dz}{ly-mx}$,

(iii) $\dfrac{dx}{x^2-yz} = \dfrac{dy}{y^2-yz} = \dfrac{dz}{z(x+y)}$,

(iv) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2,\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z-x}{x}$,

(v) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y},\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z}{2x-z^2}$,

(vi) $xy' = y+\sqrt{y^2-x^2},\ z' = \dfrac{y+z}{z^2-x}$.

5. Naći opće rješenje sistema diferencijalnih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y+\alpha x^2+2\beta xy-\alpha y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -x-\beta x^2+2\alpha xy+\beta y^2 \end{aligned}\right\},$$

gdje su α i β neki realni parametri.

3.5 Linearni sistemi diferencijalnih jednadžbi

Ovdje ćemo govoriti o posebnoj klasi normalnih sistema diferencijalnih jednadžbi koji se zovu linearni sistemi diferencijalnih jednadžbi.

Linearni sistemi diferencijalnih jednadžbi imaju sljedeći oblik

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Sistem (3.44) kraće možemo pisati u obliku

$$y_k' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)y_l + f_k(x),\ k = 1, 2, ..., n.$$

U sistemu (3.44) pretpostavit ćemo da su koeficijenti $p_{kl}(x)$ $(k, l = 1, ..., n)$ i funkcije $f_k(x)$, $k = 1, ..., n$ neprekidne na intervalu (a, b). U skladu sa Cauchy-Picardovim teoremom, postoji jedinstveno rješenje sistema (3.44) koje zadovoljava početne uvjete

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)}, ..., y_n = y_n^{(0)} \text{ za } x = x_0,$$

gdje je $x = x_0$ proizvoljna tačka iz intervala (a, b), a početne vrijednosti traženih funkcija, tj. brojevi $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ su proizvoljni, a rješenje je definirano na cijelom intervalu (a, b), tj. na cijelom intervalu neprekidnosti funkcija $p_{kl}(x)$ i $f_k(x)$. Singularnih rješenja linearan sistem (3.44) nema. Svako rješenje ovog sistema je partikularno.

Kada je u pitanju egzistencija i jedinstvenosti rješenja vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5.1. *Neka su funkcije $p_{ij}(x), f_i(x)$ neprekidne na (a, b). Onda za svaku tačku $x_0 \in (a, b)$ i proizvoljnu tačku $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, postoji jedinstveno rješenje $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearnog sistema* (3.44)*, definirano na intervalu (a, b) i koje zadovoljava početne uvjete $y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \ldots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}$.*

Dakle, $\mathcal{E} = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja linearnog sistema diferencijalnih jednadžbi.

Ako su funkcije $f_k(x) \equiv 0$ na (a, b), onda se sistem (3.44) naziva *homogeni.* Homogeni sistem ima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n \\ y_2' &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n. \end{aligned} \tag{3.45}$$

što kraće možemo pisati

$$y_k' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) y_l,\ k = 1, 2, ..., n.$$

Ako postoji funkcija $f_k(x)$ $(k = 1, ..., n)$ koja nije identički jednaka nuli na (a, b), onda je sistem *nehomogeni.*

Linearni sistemi imaju sljedeće dvije osobine koje se lako provjeravaju:

(i) Linearni sistemi ostaju linearni pri zamjeni nezavisno promjenljive $x = \varphi(t)$, gdje je $\varphi(t)$ bilo koja funkcija od t, definirana i neprekidno diferencijabilna na intervalu (t_0, t_1), pri čemu je $a = \varphi(t_0)$ i $b = \varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ na intervalu (t_0, t_1).

(ii) Linearni sistemi ostaju linearni pri svakoj linearnoj transformaciji nepoznatih funkcija

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1n} y_n \\ z_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2n} y_n \\ &\vdots \\ z_n &= \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \cdots + \alpha_{nn} y_n, \end{aligned}$$

gdje su koeficijenti $\alpha_{ik}(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije na intervalu (a, b) i determinanta Jacobiana sastavljenog od koeficijenata $\alpha_{ik}(x)$ različita je od nule na cijelom intervalu (a, b).

Opća teorija linearnih sistema uglavnom je slična općoj teoriji linearnih diferencijalnih jednadžbi n-tog reda. Posebno, pitanje strukture općeg rješenja nehomogenog sistema svodi se na pitanje strukture općeg rješenja homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Radi kraćeg pisanja sistema (3.44) uvedimo sljedeće oznake

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\mathbf{A}(x)$ matrica sistema, $\mathbf{f}(x)$ kolona slobodnih članova. Matrica $\mathbf{A}(x)$ i kolona $\mathbf{f}(x)$ su neprekidni na intervalu (a, b) ako su svi njihovi elementi neprekidni na (a, b).

Na osnovu uvedenih oznaka, sistem (3.44) možemo pisati u matričnom obliku

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x). \tag{3.46}$$

Ako je $\mathbf{f}(x) \equiv 0$, onda imamo homogeni linearni sistem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{3.47}$$

Rješenje, kao i Cauchyev problem, definiraju se na isti način kao kod diferencijalnih jednadžbi.

Za rješenje $\mathbf{y} = \boldsymbol{y}(x)$ homogenog sistema (3.47) kažemo da je trivijalno ako je $\boldsymbol{y}(x) \equiv 0$. Dakle, trivijalno rješenje zadovoljava proizvoljan trivijalan početni uvjet, tj. za svako $x_0 \in (a, b)$ je $\boldsymbol{y}(x_0) = 0$. Može se dokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5.2. *Rješenje $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ homogenog sistema (3.47) je trivijalno, ako postoji neko $x_0 \in (a, b)$ za koje je $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = 0$.*

Dokaz ovog teorema slijedi iza odgovarajućeg teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja.

Dokažimo sada sljedeći teorem.

Teorem 3.5.3. *Skup rješenja homogenog linearnog sistema diferencijalnih jednadžbi (3.47) čini linearan prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva.*

Dokaz. Stavimo da je V skup svih rješenja homogenog sistema (3.47), tj. skup svih $y = \boldsymbol{y}(x)$ neprekidno diferencijabilnih na (a, b) tako da je $\boldsymbol{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$. $V = \{\mathbf{y} \in C^1(a, b) : \mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x),\ x \in (a, b)\}$. Skup V je potprostor svih neprekidno diferencijabilnih funkcija na (a, b). Naime, ako su $\boldsymbol{y}_1(x)$ i $\boldsymbol{y}_2(x)$ bilo koja dva elementa iz V i neka su C_1 i C_2 proizvoljni skalari onda je $C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2$ također element iz V, jer je

$$\begin{aligned}(C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2)' &= C_1\boldsymbol{y}_1' + C_2\boldsymbol{y}_2' = \\ &= C_1\mathbf{A}(x)\boldsymbol{y}_1 + C_2\mathbf{A}(x)\boldsymbol{y}_2 \\ &= \mathbf{A}(x)(C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2).\end{aligned}$$

Primijetimo da je trivijalno rješenje nula vektor u prostoru V. □

Sljedeća tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 3.5.3.

Teorem 3.5.4. *Za linearne sisteme (3.46) i (3.47) vrijedi:*

(i) Ako su $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ rješenja homogenog sistema (3.47) i ako su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ proizvoljne realne (ili kompleksne) konstante, onda je $y = \sum_{i=1}^{k} C_i\boldsymbol{y}_i(x)$ rješenje ovog sistema.

(ii) *Ako homogeni sistem (3.47) ima kompleksno rješenje* $\mathbf{y} = \mathbf{u}_1(x) + i\mathbf{v}_1(x)$, *onda su* $\mathbf{u}_1$ *i* $\mathbf{v}_1$ *realna rješenja ovog sistema.*

(iii) *Ako sistem* $\mathbf{y}' + \mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{f}_1(x) + i\mathbf{f}_2(x)$ *ima kompleksno rješenje* $\mathbf{y} = \mathbf{u}_1(x) + i\mathbf{v}_1(x)$, *onda su* $\mathbf{u}_1$ *i* $\mathbf{v}_1$ *rješenja, redom, sistema* $\mathbf{y}' + \mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{f}_1(x)$ *i* $\mathbf{y}' + \mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{f}_2(x)$.

(iv) *Ako je* $\mathbf{y}_i$ *rješenje sistema* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, *onda je* $y = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{y}_i(x)$ *rješenje sistema* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{f}_i(x)$.

(v) *Ako je* $\boldsymbol{y}_1$ *rješenje homogenog sistema (3.47), a* $\boldsymbol{y}_2$ *rješenje nehomogenog sistema (3.46), onda je* $\mathbf{y} = \boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{y}_2(x)$ *rješenje nehomogenog sistema (3.46).*

Posmatrajmo skup od m funkcija

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_m(x) = \begin{pmatrix} y_{1m}(x) \\ y_{2m}(x) \\ \vdots \\ y_{nm}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Ovaj skup se naziva linearno nezavisnim na intervalu (a, b) ako ne postoje brojevi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ koji nisu istovremeno jednaki nuli, za koje na cijelom intervalu (a, b) vrijede relacije

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \cdots + \alpha_m y_{1m} & = & 0 \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \cdots + \alpha_m y_{2m} & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \cdots + \alpha_m y_{nm} & = & 0 \end{array}$$

ili

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_{ik} \equiv 0, \; i = 1, 2, ..., n.$$

U protivnom skup (3.48) je linearno zavisan. Očito je da ako je jedna od funkcija iz (3.48) identički jednaka nuli onda je (3.48) skup linearno zavisnih funkcija na (a, b).

Definicija 3.5.1. *Skup od* n *linearno nezavisnih rješenja homogenog linearnog sistema (3.47), definiranih na intervalu* (a, b), *se naziva fundamentalan skup rješenja.*

Bazu prostora rješenja homogenog linearnog sistema (3.47) V čini fundamentalni skup rješenja.

Definicija 3.5.2. *Opće rješenje sistema (3.47) je linearna kombinacija fundamentalnog skupa rješenja, tj. ako funkcije* $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), ..., \boldsymbol{y}_n(x)$ *čine fundamentalni skup rješenja sistema (3.47) onda je funkcija*

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1\boldsymbol{y}_1(x) + C_2\boldsymbol{y}_2(x) + \cdots + C_n\boldsymbol{y}_n(x)$$

opće rješenje sistema (3.47).

Dakle, sistem je riješen ukoliko je određen bilo koji fundamentalni skup rješenja.
Uvedimo pojam Wronskiana.

Definicija 3.5.3. *Neka funkcije*

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

čine fundamentalni skup rješenja homogenog linearnog sistema (3.47). Matrica

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

se naziva fundamentalnom matricom sistema (3.47). Funkcija $W(x) = \det \mathbf{\Phi}(x)$ *je Wronskian sistema (3.47).*

Kao i kod ispitivanja linearne nezavisnosti n rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n-$tog reda, tako i u slučaju homogenih sistema linearnih jednadžbi (3.45) za utvrđivanje linearne nezavisnosti ili zavisnosti dovoljno je izračunati vrijednost Wronskiana $W(x)$ n rješenja u jednoj tački iz intervala (a, b). Ovo slijedi iz sljedećih osobina Wronskiana koje se dokazuju slično kao kod homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi $n-$tog reda.

(i) Ako je Wronskian rješenja $W(x)$ sistema (3.45) jednak nuli u jednoj tački intervala (a, b) na kojem su neprekidni svi koeficijenti sistema (3.45), onda je $W(x)$ identički jednak nuli na intervalu (a, b).

(ii) Ako je Wronskian rješenja $W(x)$ sistema (3.45) različit od nule u jednoj tački iz intervala (a, b), onda je $W(x)$ različit od nule na cijelom intervalu (a, b).

Slično kao kod homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi $n-$tog reda dokazuje se sljedeći teorem.

Teorem 3.5.5. *Rješenja* $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n \in V$ *čine fundamenatalni skup rješenja sistema (3.47) ako i samo ako je* $W(x) \neq 0$ *za svako* $x \in (a, b)$.

Teorem 3.5.6 (O postojanju fundamentalnog skupa rješenja). *Ako su koeficijenti sistema (3.47) neprekidne funkcije na intervalu* (a, b), *onda postoji fundamentalni skup rješenja definiranih i neprekidnih na intervalu* (a, b).

Dokaz. Uzmimo tačku $x_0 \in (a,b)$ i formirajmo rješenja

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

koja zadovoljavaju sljedeće početne uvjete u $x = x_0$ (ovakva rješenja postoje po Cauchy-Picardovom teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja)

$$\begin{array}{cccc} y_{11} = 1, & y_{12} = 0, & \cdots, & y_{1n} = 0 \\ y_{21} = 0, & y_{22} = 1, & \cdots, & y_{2n} = 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} = 0, & y_{n2} = 0, & \cdots, & y_{nn} = 1. \end{array}$$

Wronskian ovih rješenja u $x = x_0$ jednak je jedinici. Slijedi da je posmatrani skup rješenja (3.49) fundamentalni skup rješenja. □

Primijetimo da u dokazu prethodnog teorema umjesto brojeva 0 i 1 možemo uzeti bilo koje druge vrijednosti u ovih n^2 uvjeta tako da determinanta nije jednaka nuli, pa je jasno da postoji beskonačno mnogo fundamentalnih skupova rješenja. Rješenja iz dokaza ovog teorema zovu se *normiranim* u tački x_0. Iz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja slijedi da za svaku tačku x_0 iz (a,b) postoji jedan i samo jedan u toj tački normirani fundamentalni skup rješenja.

Postavlja se pitanje postojanja veze između različitih fundamentalnih skupova. Može li se bilo koji fundamentalni skup rješenja dobiti pomoću normiranog fundamentalnog skupa rješenja? Odgovor na ovo pitanje je da postoji veza između različitih fundamentalnih skupova rješenja homogenih linearnih sistema diferencijalnih jednadžbi, o čemu ćemo više govoriti kod matričnog metoda rješavanja homogenih linearnih sistema diferencijalnih jednadžbi.

Osobine Wronskiana koje se donose na linearnu nezavisnost n rješenja homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednadžbi, jednostavno se mogu dobiti iz formule Ostrogradski-Liouvillea. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5.7. *(Formula Ostrogradski-Liouville) Wronskian rješenja homogenog linearnog sistema (3.47) je oblika*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(t)dt}, \tag{3.50}$$

gdje je x_0 bilo koja tačka iz intervala (a,b).

Dokaz. Da bismo izveli formulu (3.50) potrebno je diferencirati Wronskian, pri čemu koristimo formulu za diferenciranje determinante. Izvod determinante n-tog reda jednak je sumi od n determinanti, koje se dobiju iz polazne determinante tako što se prva, druga,..., n-ta kolona zamijene sa izvodima elemenata tih kolona, tj. imamo

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(k-1)} & y'_{1k} & y_{1(k+1)} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(k-1)} & y'_{2k} & y_{2(k+1)} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n(k-1)} & y'_{nk} & y_{n(k+1)} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.51}$$

Kako su funkcije y_{lk} rješenja sistema (3.45), onda one zadovoljavaju taj sistem, tj. vrijedi

$$y'_{ik}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}y_{il},\ k,i=1,...,n.$$

Sada (3.52) postaje

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(k-1)} & \sum\limits_{l=1}^{n}p_{kl}y_{1l} & y_{1(k+1)} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(k-1)} & \sum\limits_{l=1}^{n}p_{kl}y_{2l} & y_{2(k+1)} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n(k-1)} & \sum\limits_{l=1}^{n}p_{kl}y_{nl} & y_{n(k+1)} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.52}$$

Na osnovu osobine razlaganja determinante na sumu determinanti, dobivamo

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(k-1)} & \sum\limits_{l=1}^{n}p_{kl}y_{1l} & y_{1(k+1)} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(k-1)} & \sum\limits_{l=1}^{n}p_{kl}y_{2l} & y_{2(k+1)} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n(k-1)} & \sum\limits_{l=1}^{n}p_{kl}y_{nl} & y_{n(k+1)} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}= \\ &=\sum_{l=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(k-1)} & p_{kl}y_{1l} & y_{1(k+1)} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(k-1)} & p_{kl}y_{2l} & y_{2(k+1)} & \cdots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n(k-1)} & p_{kl}y_{nl} & y_{n(k+1)} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}. \tag{3.53}$$

Sve determinante u (3.53) su jednake nuli jer će svaka od dobivenih determinanti imati po dvije jednake kolone, osim determinante u slučaju $l=k$. Na osnovu ovoga dobivamo

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(k-1)} & p_{kk}y_{1k} & y_{1(k+1)} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(k-1)} & p_{kk}y_{2k} & y_{2(k+1)} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n(k-1)} & p_{kk}y_{nk} & y_{n(k+1)} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.54}$$

tj.

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(x)W(x) = W(x)\sum_{k=1}^{n} p_{kk}(x). \tag{3.55}$$

Jednadžba (3.55) je linearna homogena jednadžba prvog reda. Integriranjem jednadžbe (3.55) dobivamo formulu (3.50). □

Iz ovog Teorema slijedi da je Wronskian određen početnim uvjetima i tragom $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(x)$ matrice $A(x)$.

Iz formule Ostrogradski-Liouvilea odmah se može zaključiti da vrijedi sljedeća posljedica.

Posljedica 3.5.1. *Ako je $W(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in (a,b)$, onda je $W(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$; ako je $W(x_0) \neq 0$, onda je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$.*

Kao i kod linearnih diferencijalnih jednadžbi n-tog reda, tako i ovdje, možemo zaključiti samo iz početnih uvjeta $\boldsymbol{y}_1(x_0), \boldsymbol{y}_2(x_0), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x_0)$ da li vektorske funkcije $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ čine fundamentalni skup rješenja sistema (3.47).

Sada ćemo pokazati kako formirati linearni homogeni sistem diferencijalnih jednadžbi ako je zadan fundamentalni skup rješenja tog sistema. Dakle, treba formirati homogeni linearan sistem od n jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n \\ y_2' &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \cdots + p_{nn}y_n \end{aligned}$$

tako da funkcije

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

čine fundamentalni skup rješenja tog sistema. Zadatak se svodi na određivanje koeficijenata sistema p_{kl} $(k,l = 1,2,...,n)$. U tom cilju funkcije y_{ik} $(i = 1,...,n)$

za svako $i = k, ..., n$ uvrstimo u sistem i dobivamo n sistem

$$\begin{aligned}
y_{i1}' &= p_{i1}y_{11} + p_{i2}y_{21} + \cdots + p_{in}y_{n1} \\
y_{i2}' &= p_{i1}y_{12} + p_{i2}y_{22} + \cdots + p_{in}y_{n2} \\
&\vdots \\
y_{in}' &= p_{i1}y_{1n} + p_{i2}y_{2n} + \cdots + p_{in}y_{nn}
\end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje po p_{ik} $(i = 1, ..., n)$ za svako $k = 1, ..., n$. Na taj način fundamentalnom skupu rješenja odgovara jedan homogeni linearan sistem koji se može napisati u obliku

$$\begin{vmatrix}
y_k' & y_{1k}' & y_{2k}' & \cdots, & y_{nk}' \\
y_1 & y_{11} & y_{21} & \cdots, & y_{n1} \\
y_2 & y_{12} & y_{22} & \cdots, & y_{n2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
y_n & y_{1n} & y_{2n} & \cdots, & y_{nn}
\end{vmatrix} = 0, \ (k = 1, ..., n)$$

Primjer 3.5.1. *Formirati homogeni linearni sistem diferencijalnih jednadžbi ako je dat fundamentalni skup rješenja*

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

Rješenje. Wronskian je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1+x & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = x(x-1).$$

Odavde vidimo da za interval na kome ćemo posmatrati sistem i na kome je $W(x) \not\equiv 0$ možemo uzeti $(0, 1)$. Sistem jednadžbi je dat sa

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} y_1' & 1 & 0 \\ y_1 & 1+x & 2 \\ y_2 & x & x \end{vmatrix} &= 0, \\
\begin{vmatrix} y_2' & 1 & 1 \\ y_1 & 1+x, & 2 \\ y_2 & x & x \end{vmatrix} &= 0.
\end{aligned}$$

Izračunavanjem ovih determinanti, sistem možemo prepisati u sljedeći normalni oblik

$$\begin{aligned}
y_1' &= \frac{1}{x-1}y_1 - \frac{2}{x(x-1)}y_2 \\
y_2' &= \frac{1}{x}y_2.
\end{aligned}$$

Tačke $x = 0$ i $x = 1$ u kojima je $W(x) = 0$ su singularne tačke sistema. ♦

Za nehomogene sisteme diferencijalnih jednadžbi (3.46) opće rješenje je opisano sljedećim teoremom.

Teorem 3.5.8. *Opće rješenje nehomogenog sistema linearnih jednadžbi(3.46) je zbir odgovarajućeg rješenja homogenog sistema (3.47) i bilo kojeg partikularnog rješenja nehomogenog sistema (3.46).*

Dokaz. Neka je dato partikularno rješenje sistema (3.44)

$$y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)}. \tag{3.56}$$

Onda vrijedi identitet

$$\left(y_k^{(1)}\right)' = \sum_{l=1}^{k} p_{kl} y_l^{(1)} + f_k(x), \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.57}$$

Uvedimo nove nepoznate funkcije $z_1, z_2, ..., z_n$ po formuli

$$y_k' = y_k^{(1)} + z_k, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.58}$$

Uvrstimo funkcije (3.58) u nehomogeni sistem (3.44), dobivamo

$$\left(y_k^{(1)}\right)' + z_k' = \sum_{l=1}^{k} p_{kl} y_l^{(1)} + \sum_{l=1}^{k} p_{kl} z_l + f_k(x), \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.59}$$

Kako vrijedi identitet (3.57), relacija (3.59) postaje

$$z_k' = \sum_{l=1}^{k} p_{kl} z_l, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.60}$$

Sistem (3.60) je homogeni sistem linearnih diferencijalnih jednadžbi pridružen odgovarajućem nehomogenom sistemu (3.44). Opće rješenje homogenog sistema (3.60) dato je sa

$$z_k = \sum_{l=1}^{n} C_i z_{ik}, \ k = 1, 2, ..., n, \tag{3.61}$$

gdje je $\{z_{ik}\}$ neki fundamentalni skup rješenja sistema (3.60). Uvrstimo (3.61) u (3.58), dobivamo

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{l=1}^{n} C_i z_{ik}, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{3.62}$$

Sva rješenja sistema (3.44) sadržana su u formuli (3.62). Ta formula predstavlja opće rješenje sistema (3.44) u oblasti

$$a < x < b, \ |y_k| < +\infty, \ k = 1, 2, ..., n.$$

□

Dakle, za određivanje općeg rješenja nehomogenog sistema (3.46) potrebno je odrediti bilo koji fundamentalni skup rješenja homogenog sistema (3.47) i odrediti bilo koje (jedno) partikularno rješenje nehomogenog sistema (3.46). Za određivanje partikularnog rješenja obično se koriste Lagrangeov metod varijacije konstanti.

Teorem 3.5.9. *Ako je poznat fundamentalan skup rješenja homogenog sistema* (3.45)*, onda se opće rješenje nehomogenog sistema* (3.44) *može dobiti integracijom.*

Dokaz. Teorem se dokazuje pomoću Langrageovog metoda varijacije konstanti. Naime, partikularno rješenje nehomogenog sistema (3.44) tražimo u obliku

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik},\ k = 1, 2, ..., n, \tag{3.63}$$

gdje je $\{z_{ik}\}$ neki fundamentalni skup rješenja sistema (3.45), a $C_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$ su neke neprekidno diferencijabilne funkcije koje ćemo izabrati tako da je formulom (3.63) dato partikularno rješenje sistema (3.44). Uvrstimo (3.63) u (3.44) imamo

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik}' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{il} + f_k(x),\ k = 1, ..., n,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik}' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{il} + f_k(x),\ k = 1, ..., n. \tag{3.64}$$

Jednadžba (3.64) napišimo u sljedećem obliku

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) [z_{ik}' - \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{il}] = f_k(x),\ k = 1, ..., n. \tag{3.65}$$

Pošto je $\{z_{ik}\}$ neki fundamentalni skup rješenja sistema (3.45), onda je

$$z_{ik}' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{il},$$

pa (3.65) postaje

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} = f_k(x),\ k = 1, ..., n. \tag{3.66}$$

Determinanta sistema (3.66) jednaka je upravo Wronskianu $W(x)$ funkcija $\{z_{ik}\}$. Kako te funkcije čine fundamentalni skup reješenja to je $W(x) \neq 0$ na (a, b). Dakle, sistem (3.66) ima jedinstveno rješenje $C_i'(x)$ dato sa

$$C_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \frac{W_{ki}(x)}{W(x)},\ i = 1, ..., n, \tag{3.67}$$

gdje je $W_{ki}(x)$ algebarski komplement (kofaktor) elementa z_{ki} Wronskiana $W(x)$. Integriranjem (3.67), dobivamo

$$C_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_k(x) \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} dx + C_i,\ i = 1, ..., n. \tag{3.68}$$

Uvrštavanjem (3.68) u (3.63) dobivamo

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \sum_{m=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_m(x) \frac{W_{mi}(x)}{W(x)} dx + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik},\ k = 1, ..., n. \tag{3.69}$$

Ako u (3.69) stavimo $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$, dobivamo partikularno rješenje

$$y_k^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \sum_{m=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_m(x) \frac{W_{mi}(x)}{W(x)} dx,\ k = 1, ..., n. \tag{3.70}$$

dakle, (3.69) možemo zapisati u obliku

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik},\ k = 1, ..., n,$$

pa slijedi da je rješenje (3.69) zapravo opće rješenje nehomogenog sistema (3.44) u oblasti $a < x < b$, $|y_k| < +\infty,\ k = 1, ..., n.$ □

Iz dokaza ovog teorema slijedi da se problem integriranja nehomogenog sistema svodi na problem formiranja fundamentalnog skupa rješenja odgovarajućeg homogenog sistema. Zato je od posebnog interesa posmatrati linearne sisteme, kod kojih se fundamentalan skup rješenja odgovarajućeg homogenog sistema može izraziti preko elementarnih funkcija. U klasu takvih sistema prije svega spadaju sistemi sa konstantnim koeficijentima.

3.5.1 Linearni sistemi diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima

Sada ćemo posmatrati linearne sisteme diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{aligned} \tag{3.71}$$

ili u skraćenom obliku

$$y_k' = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x),\ k = 1, 2, ..., n, \tag{3.72}$$

gdje su koeficijenti a_{kl} $(k, l = 1, 2, ..., n)$ realne konstante, a $f_k(x),\ k = 1, 2, ..., n$, funkcije od x, neprekidno diferencijabilne na intervalu (a, b). Pokazat ćemo da se sistem (3.71) može uvijek integrirati, tj. uvijek se može naći opće rješenje.

U općoj teoriji linearnih sistema vidjeli smo da se integriranje nehomogenih linearnih sistema svodi na integriranje odgovarajućeg homogenog sistema. Zato ćemo prvo posmatrati opće rješenje homogenog sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Koristeći se općom teorijom linearnih sistema, znamo da je za formiranje općeg rješenja sistema (3.73) dovoljno naći jedan fundamentalni skup rješenja. Također, vidjeli smo da postoji fundamentalni skup rješenja, definiranih i neprekidnih na $(-\infty, +\infty)$ i ovdje ćemo specijalno vidjeti da se taj fundamentalni skup rješenja može dobiti iz elementarnih funkcija.

Analogno kao za homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu sa konstantnim koeficijentima, partikularno rješenje ćemo tražiti u obliku

$$y_1 = v_1 e^{\lambda x},\ \ y_2 = v_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = v_n e^{\lambda x}, \tag{3.74}$$

gdje su $v_1, v_2, ..., v_n$ i λ neki konstantni brojevi, pri čemu brojevi $v_1, v_2, ..., v_n$ ne mogu biti svi istovremeno jednaki nuli, jer bismo u tom slučaju imali nula rješenje koje ne može ući u fundamentalni skup rješenja, pa otuda se ne može iskoristiti za formiranje općeg rješenja.

Primjetimo da broj λ u sisemu (3.74) je isti za sve funkcije $y_1, y_2, ..., y_n$. Uvrstimo (3.74) u (3.73), nakon skraćivanja sa $e^{\lambda x}$ i prebacivanja svih članova na lijevu stranu imamo

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n &= 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \cdots + a_{2n}v_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)v_n &= 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Sistem (3.75) je homogeni sistem po $v_1, v_2, ..., v_n$ i interesuju nas netrivijalna rješenja tog sistema. Iz teorije linearnih sistema znamo da netrivijalno rješenje postoji samo ako je determinanta tog sistema jednaka nuli, tj. ako je ispunjen uvjet

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{3.76}$$

Jednadžba (3.76) naziva se *karakteristična jednadžba* sistema (3.73). Rješenja te jednadžbe zovu se *karakteristični brojevi*, a determinanta se zove *karakteristična determinanta*. Jednadžba $D(\lambda)=0$ predstavlja algebarsku jednadžbu n-tog reda i u polju kompleksnih brojeva ima n korijena.

3.5.2 Formiranje fundamentalnog skupa rješenja i općeg rješenja u slučaju kada su korijeni karakteristične jednadžbe različiti

Neka su u ovom slučaju $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ različiti korijeni jednadžbe $D(\lambda)=0$. U tom slučaju je $D(\lambda_i)=0$ i $D'(\lambda_i)\neq 0,\ i=1,2,...,n$. Slijedi da je rang matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda_i \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

koju čine koeficijenti sistema

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i)v_{i1}+a_{12}v_{i2}+\cdots+a_{1n}v_{in} &= 0 \\ a_{21}v_{i1}+(a_{22}-\lambda_i)v_{i2}+\cdots+a_{2n}v_{in} &= 0 \\ &\ \vdots \\ a_{n1}v_{i1}+a_{n2}v_{i2}+\cdots+(a_{nn}-\lambda_i)v_{in} &= 0 \end{aligned} \tag{3.78}$$

koji dobivamo iz sistema (3.75) zamjenom $\lambda=\lambda_i$ jednak $n-1$. Zato je jedna od jednadžbi tog sistema posljedica ostalih i taj sistem ima netrivijalno rješenje određeno do na proizvoljan koeficijent proporcionalnosti k_i, tj.

$$v_{i1}=k_i m_{i1}, v_{i2}=k_i m_{i2}, ..., v_{in}=k_i m_{in},\ (i=1,...,n). \tag{3.79}$$

Ako u formuli (3.79) fiksiramo k_i, dobivamo tačno određeno rješenje sistema (3.78). Ako sada u (3.74) λ zamijenimo sa λ_i, a $\gamma_1,...,\gamma_n$ sa odgovarajućim rješenjima $v_{i1},...,v_{in}$ sistema (3.78) data formulom (3.79) za fiksne koeficijente k_i dobivamo n rješenja

$$\begin{array}{cccc} y_{11}=v_{11}e^{\lambda_1 x} & y_{12}=v_{12}e^{\lambda_1 x} & \cdots & y_{1n}=v_{1n}e^{\lambda_1 x}; \\ y_{21}=v_{21}e^{\lambda_2 x} & y_{22}=v_{22}e^{\lambda_2 x} & \cdots & y_{2n}=v_{2n}e^{\lambda_2 x}; \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1}=v_{n1}e^{\lambda_n x} & y_{n2}=v_{n2}e^{\lambda_n x} & \cdots & y_{nn}=v_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{array} \tag{3.80}$$

Može se lako provjeriti da su rješenja (3.80) nezavisna na $(-\infty, +\infty)$. Ako su korijeni $\lambda_1, ..., \lambda_n$ realni onda su (3.80) realna rješenja. Dakle, u slučaju različitih realnih korijena karakteristične jednadžbe (3.76), sistem (3.73) ima n realnih linearno nezavisnih partikularnih rješenja oblika (3.80) koja čine fundamentalni skup rješenja. U tom slučaju formulom

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 v_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 v_{21} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n v_{n1} e^{\lambda_n x} \\ y_2 &= C_1 v_{12} e^{\lambda_1 x} + C_2 v_{22} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n v_{n2} e^{\lambda_n x} \\ &\vdots \\ y_n &= C_1 v_{1n} e^{\lambda_1 x} + C_2 v_{2n} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n v_{nn} e^{\lambda_n x} \end{aligned} \tag{3.81}$$

je dato opće rješenje sistema (3.73) u oblasti

$$|x| < +\infty, |y_1| < +\infty, ..., |y_n| < +\infty.$$

Neka su korijeni karakteristične jednadžbe različiti, ali među njima ima kompleksnih(par konjugirano-kompleksnih) brojeva. Označimo ih sa $a + ib$ i $a - ib$. Ako korijen $a + ib$ uvrstimo u formulu (3.74), imamo

$$y_1 = v_1 e^{(a+ib)x}, \;\; y_2 = v_2 e^{(a+ib)x}, ..., y_n = v_n e^{(a+ib)x}, \tag{3.82}$$

gdje su $v_1, v_2, ..., v_n$ kompleksni brojevi. Stavljajući

$$v_1 = v_{11} + iv_{21}, v_2 = v_{12} + iv_{22}, ..., v_n = v_{1n} + iv_{2n}$$

dobivamo rješenje

$$y_1 = (v_{11} + iv_{21}) e^{(a+ib)x}, \;\; y_2 = (v_{12} + iv_{22}) e^{(a+ib)x}, ..., y_n = (v_{1n} + iv_{2n}) e^{(a+ib)x}, \tag{3.83}$$

Rješenje (3.83) je kompleksno. Razdvajajući realan i imaginaran dio dobivamo dva rješenje

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{ax}(v_{11}\cos bx - v_{21}\sin bx) \quad \cdots \quad y_{1n} = e^{ax}(v_{1n}\cos bx - v_{2n}\sin bx); \\ y_{21} &= e^{ax}(v_{11}\cos bx + v_{21}\sin bx) \quad \cdots \quad y_{2n} = e^{ax}(v_{1n}\cos bx + v_{2n}\sin bx). \end{aligned} \tag{3.84}$$

Rješenja (3.84) su linearno nezavisna na $(-\infty, +\infty)$. Nije teško pokazati da korijen $a - ib$ ne daje nikakvo novo rješenje, tj.ona koja bi bila nezavisna sa (3.84). Dakle, možemo zaključiti ako su korijeni karakteristične jednadžbe različiti i realni, onda dobivamo njima odgovarajuća linearno nezavisna rješenja data sa (3.80). Ako su korijeni karakteristične jednadžbe različiti (prosti) ali među njima ima konjugirano- kompleksnih(prostih), onda svakom takvom korijenu odgovaraju dva linearno nezavisna realna rješenja (3.84). U svakom slučaju dobivamo n realnih rješenja koja su linearno nezavisna na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Opće rješenje sistema (3.73) je linearna kombinacija tako dobivenih n realnih linearno nezavisnih partikularnih rješenja.

3.5.3 Formiranje fundamentalnog skupa rješenja i općeg rješenja u slučaju kada među korijenima karakteristične jednadžbe ima višestrukih

Ako su korijeni karakteristične jednadžbe (3.76) višestruki, onda prethodni metod ne možemo koristiti za dobivanje linearno nezavisnih partikularnih rješenja. Najprije primijetimo da ako je λ_1 prost korijen karakteristične jednadžbe onda nezavisno od toga da li su preostali korijeni višestruki ili ne, korijenu λ_1 odgovara jedno partikularno rješenje

$$y_1 = v_1 e^{\lambda_1 x}, \;\; y_2 = v_2 e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = v_n e^{\lambda_1 x}, \tag{3.85}$$

gdje su $v_1, v_2, ..., v_n$ neke konstante određene s tačnošću do na konstantan faktor. Sada se problem svodi na traženje partikularnih rješenja koja odgovaraju višestrukim korijenima. Analogno sa teorijom linearnih homogenih diferencijalnih jednadžbi n-tog reda, karakterističnom korijenu višestrukosti k odgovara k linearno nezavisnih partikularnih rješenja.

Sljedeći teorem daje oblik partikularnih rješenja koja odgovaraju korijenu karakteristične jednadžbe višeatrukosti k.

Teorem 3.5.10. *Ako je λ_1 korijen karakteristične jednadžbe višestrukosti k, onda njemu odgovaraju partikularna rješenja oblika*

$$y_1 = P_{k-1}^{(1)}(x) e^{\lambda_1 x}, \;\; y_2 = P_{k-1}^{(2)}(x) e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = P_{k-1}^{(n)}(x) e^{\lambda_1 x}, \tag{3.86}$$

gdje su $P_{k-1}^{(1)}(x), P_{k-1}^{(2)}(x), ..., P_{k-1}^{(n)}(x)$ polinomi po x stepena ne višeg od $k-1$, koji imaju k proizvoljnih konstanti, tako da između svih koeficijenata svih tih polinoma k koeficijenata je proizvoljno, a svi ostali se izražavaju preko njih.

Iz prethodnog teorema vidimo da je za nalaženje partikularnog rješenja koje odgovara korijenu karakteristične jednadžbe višestrukosti k potrebno odrediti polinome $P_{k-1}^{(1)}(x), P_{k-1}^{(2)}(x), ..., P_{k-1}^{(n)}(x)$ stepena $k-1$ sa neodređenim koeficijentima, uvrštavanjem (3.86) u sistem (3.73), pri tome određujemo k koeficijenata a svi preostali koeficijenti se izračunaju preko ovih k određenih. Također, ako je λ_1 realan korijen višestrukosti k onda njemu odgovara k linearno nezavisnih realnih rješenja. Ako, s druge strane, sistem (3.73) ima kompleksni karakteristični korijen $a + ib$ višestrukosti k, onda ima i korijen $a - ib$ višestrukosti k. Onda formiramo k linearno nezavisnih komleksnih rješenja koja odgovaraju korijenu $a + ib$ i u tim rješenjima odredimo realan i imaginaran dio i dobivamo $2k$ realnih linearno nezavisnih rješenja. Možemo zaključiti da u općem slučaju svakom prostom realnom karakterističnom korijenu odgovara jedno partikularno rješenje. Svakom paru prostih konjugovano kompleksnih karakterističnih korijena odgovaraju dva realna linearno nezavisna rješenja. Realnom karakterističnom korijenu višestrukosti k odgovara k realnih linearno nezavisnih partikularnih rješenja. Svakom paru konjugovano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe višestrukosti k odgovara $2k$ realnih linearno nezavisnih partikularnih rješenja. U svakom slučaju imamo n realnih rješenja. Ova rješenja su linearno nezavisna na intervalu $(-\infty, +\infty)$, pa formiraju fundamentalni skup rješenja. Linearna kombinacija tih rješenja daje opće rješenje sistema (3.73).

Primjer 3.5.2. *Riješiti sistem*

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2. \end{aligned}$$

Rješenje. *Karakteristična jednadžba pridružena sistemu glasi*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $\lambda_1 = 2+i$ i $\lambda_2 = 2-i$. Nađimo rješenje koje odgovara korijenu $\lambda_1 = 2+i$. Traženo rješenje glasi: $y_1 = \gamma_1 e^{(2+i)}x$, $y_2 = \gamma_2 e^{(2+i)x}$. Uvrštavanjem u dati sistem, nakon skraćivanja, dobivamo sistem po γ_1 i γ_2 :

$$\begin{aligned} -i\gamma_1 - \gamma_2 &= 0 \\ \gamma_1 - i\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz sistema je npr. $\gamma_2 = -i\gamma_1$. Uzmimo $\gamma_1 = 1$. Onda je $\gamma_2 = -i$. Sada je $y_1 = e^{(2+i)x}$, $\gamma_2 = -ie^{(2+i)x}$. Razdavajanjem realnog i imaginarnog dijela, dobivamo

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{2x}\cos x, \quad & y_{12} &= e^{2x}\sin x \\ y_{21} &= e^{2x}\sin x, \quad & y_{22} &= -e^{2x}\cos x \end{aligned}$$

Sada opće rješenje glasi

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \\ y_2 &= e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x). \end{aligned}$$

♦

3.5.3.1 Metod eliminacije

Sistem (3.73) možemo riješiti tako što metodom eliminacije sistem svedemo na jednu diferencijalnu jednadžbu $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima koja je ekvivalentna sistemu (3.73).

Pokažimo ovo na linearnom homogenom sistemu drugog reda.

Primjer 3.5.3. *Metodom eliminacije riješiti sistem*

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

Rješenje. *Diferenciranjem prve jednadžbe sistema i korištenjem druge jednadžbe sistema, imamo*

$$y_1'' = -3y_1' + 4y_2' = -3y_1' + 4(-2y_1 + 3y_2) = -3y_1' - 8y_1 + 12y_2.$$

Sada iz prve jednadžbe sistema zamijenimo y_2, *imamo*

$$y_1'' = -3y_1' - 8y_1 + 3(y_1' + 3y_1) = y_1,$$

tj. dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$y_1'' - y_1 = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Iz prve jednadžbe sistema imamo

$$4y_2 = y_1' + 3y_1 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 3C_1 e^x + 3C_2 e^{-x} = 4C_1 e^x + 2C_2 e^{-x}.$$

Sada opće rješenje glasi

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x},\ y_2 = C_1 e^x + \frac{1}{2} C_2 e^{-x}.$$

♦

3.5.3.2 D'Alambertov metod

Posmatrajmo nehomogeni linearni sistem diferencijalnih jednadžbi drugog reda u normalnom obliku

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x). \end{aligned} \tag{3.87}$$

Sada ćemo pokazati D'Alambertov metod[4] nalaženja prvih integrala, odnosno općeg rješenja ovog sistema.

U tom cilju pomnožimo drugu jednadžbu sistema (3.87) nekim brojem k i saberimo je sa prvom jednadžbom sistema (3.87). Nakon jednostavnih radnji, imamo

$$(y_1 + ky_2)' = (a_{11} + ka_{12}) \left(y_1 + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} y_2 \right) + f_1(x) + kf_2(x). \tag{3.88}$$

Izaberimo k tako da je

$$k = \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}}. \tag{3.89}$$

[4]Ovaj metod možemo primijeniti i na linearne sisteme diferencijalnih jednadžbi u normalnom obliku koji sadrže izvode višeg reda. Vidjeti na primjer [22]

Tada jednadžbu (3.88) možemo napisati u obliku

$$(y_1 + ky_2)' = (a_{11} + ka_{12})(y_1 + ky_2) + f_1(x) + kf_2(x). \tag{3.90}$$

Primijetimo da je jednadžba (3.90) linearna diferencijalna jednadžba prvog reda po nepoznatoj funkciji $y_1 + ky_2$. Znamo da je njeno rješenje dato sa

$$y_1 + ky_2 = e^{(a_{11}+ka_{12})x}\left(C + \int (f_1(x) + kf_2(x))e^{-(a_{11}+ka_{12})x}dx\right). \tag{3.91}$$

Ako su rješenja jednadžbe (3.89) realna i različita, k_1, k_2, onda svakoj od vrijednosti k_1 i k_2 odgovara po jedan prvi integral oblika (3.91), tj.

$$\begin{aligned}
y_1 + k_1y_2 &= e^{(a_{11}+k_1a_{12})x}\left(C_1 + \int (f_1(x) + k_1f_2(x))e^{-(a_{11}+k_1a_{12})x}dx\right)\\
y_1 + k_2y_2 &= e^{(a_{11}+k_2a_{12})x}\left(C_2 + \int (f_1(x) + k_2f_2(x))e^{-(a_{11}+k_2a_{12})x}dx\right)
\end{aligned}$$

Ako sada ovaj sistem riješimo po C_1 i C_2, dobivamo opći integral sistema (3.87), a ako riješimo po y_1 i y_2, dobivamo opće rješenje sistema (3.87).

Ako su rješenja jednadžbe (3.89) višestruka i realna. tj $k_1 = k_2 = k$, onda dobivamo samo jedan prvi integral oblika

$$y_1 + ky_2 = e^{(a_{11}+ka_{12})x}\left(C + \int (f_1(x) + kf_2(x))e^{-(a_{11}+ka_{12})x}dx\right).$$

Odavde izračunamo y_1 i uvrstimo u neku od jednadžbi sistema (3.87) i dobivamo jednu linearnu jednadžbu prvog reda po nepoznatoj funkciji y_2, za koju možemo odmah napisati opće rješenje.

Primjer 3.5.4. *D'Alambertovom metodom riješiti sistem iz prethodnog primjera*

$$\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 - y_2\\
y_2' &= y_1 + 2y_2.
\end{aligned}$$

Rješenje. *Množenjem druge jednadžbe sa k i dodavanjem prvoj jednadžbi sistema, imamo*

$$(y_1 + ky_2)' = (2 + k)\left(y_1 + \frac{2k-1}{2+k}y_2\right).$$

Izaberimo k tako da je

$$k = \frac{2k-1}{2+k}.$$

Odavde dobivamo $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Za $k = i$, imamo

$$(y_1 + iy_2)' = (2 + i)(y_1 + iy_2).$$

Rješenje ove homogene jednadžbe je

$$y_1 + iy_2 = C_1 e^{(2+i)x}.$$

Slično za $k = -i$, dobivamo rješenje

$$y_1 - iy_2 = C_2 e^{(2-i)x}.$$

Odavde dobivamo četiri realna rješenja

$$C_1 e^{2x} \cos x,\ C_1 e^{2x} \sin x,\ C_2 e^{2x} \cos x,\ -C_2 e^{2x} \sin x.$$

Opće rješenje je dato sa

$$y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x - C_2 \sin x), \quad y_2 = e^{2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

♦

3.5.3.3 Metod svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora

U sekcijama 3.5.2 i 3.5.3 je opisan način određivanja fundamentalnog skupa rješenja linearnog homogenog sistema sa konstantnim koeficijentima (3.73). Sada ćemo pokazati kako možemo pomoću matričnog zapisa sistema problem nalaženja rješenja sistema (3.73) svesti na problem traženja svojstvenih vrijednosti i odgovarajućih svojstvenih vektora matrice koja je pridružena posmatranom sistemu (3.73).

Da bismo skratili pisanje, sistem (3.73) ćemo napisati u matričnom obliku

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{3.92}$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrica sistema, a $\mathbf{y}$ i $\mathbf{y}'$ odgovarajući vektori kolone. Rješenje (3.74) možemo napisati u obliku

$$\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{v} e^{\lambda x}, \tag{3.93}$$

gdje je $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ konstantni vektor, a parametar λ treba odrediti. Budući da je

$$(\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}')\big|_{\mathbf{y}=\boldsymbol{v}e^{\lambda x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{v}e^{\lambda x} - \lambda \boldsymbol{v} e^{\lambda x} = (\mathbf{A} - \lambda I)\boldsymbol{v}e^{\lambda x},$$

gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda n, funkcija (3.93) je rješenje sistema (3.71) ako i samo ako je

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{v} = 0.$$

Ovaj sistem ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

što predstavlja *karakterističnu jednadžbu* matrice $\mathbf{A}$, odnosno sistema (3.71). Rješenja ove jednadžbe zovu se *karakteristične* ili *svojstvene* vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, odnosno sistema (3.71). Sad ćemo razmotriti rješenje sistema u ovisnosti od prirode korijena karakterstične jednadžbe.

1. Karakteristična jednadžba ima sve korijene realne i različite

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ realni i različiti korijeni karakteristične jednadžbe. Za $\lambda = \lambda_j$, sistem $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v} = 0$ ima netrivijalno rješenje $\boldsymbol{v}_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn})^T$, određeno do proizvoda sa konstantom, a vektorska funkcija

$$\mathbf{y}_j(x) = \begin{pmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ \vdots \\ v_{jn} \end{pmatrix} e^{\lambda_j x}, \ x \in (-\infty, +\infty)$$

je rješenje sistema (3.71). Opće rješenje glasi:

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + X_n \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n x}, \ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

(zbog linearne nezavisnosti ovih funkcija).

Neka su korijeni karakteristične jednadžbe različiti, ali kompleksni $a \pm ib$. Za korijene $a \pm ib$ sistemi jednadžbi

$$[\mathbf{A} - (a \pm ib)\mathbf{I}]\boldsymbol{v} = 0$$

imaju konjugirano kompleksne koeficijente, pa će rješenja tih sistema biti konjugirano kompleksna,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(1)} \pm i\boldsymbol{v}^{(2)}.$$

Dalje se postupa kao i kod linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda.

2. Korijeni karakteristične jednadžbe su višestruki. Neka je λ_1 korijen višestrukosti k. U tom slučaju sistem $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\boldsymbol{v} = 0$ može imati m, $m \leq k$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Mogu nastupiti sljedeći slučajevi:

(i) Ako je $m = k$, onda svojstvenoj vrijednosti λ_1 odgovara rješenje

$$\mathbf{y}(x) = (C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + C_k\boldsymbol{v}_k)e^{\lambda_1 x},$$

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

(ii) Ako je $m < k$ onda svojstvenoj vrijednosti λ_1 odgovara rješenje

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}_{k-m}(x) \cdot e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} P_{k-m}^{(1)}(x) \\ \vdots \\ P_{k-m}^{(n)}(x) \end{pmatrix},$$

gdje su $P_{k-m}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ polinomi stepena $k - m$. Koeficijenti polinoma određuju se metodom neodređenih koeficijenata.

Napomenimo da za višestruku svojstvenu vrijednost λ_1, oblik rješenja zavisi od ranga matrice $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$. Ako je rang jednak r, onda je broj linearno nezavisnih rješenja $m = k - r$.

Sva prethodna tvrđenja prenose se na konjugirano kompleksne brojeve višestrukosti k. Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela dobivamo $2k$ realnih linearno nezavisnih rješenja.

Ako nehomogeni sistem ima oblik

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}y + \mathbf{P}_s(x)e^{\mu x},$$

gdje je μ općenito kompleksan broj, a $P_s(x)$ polinom stepena s čiji su koeficijenti $n-$dimenzionalni konstantni vektori, tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5.11. *Sistem*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{P}_s(x)e^{\mu x},$$

ima partikularno rješenje oblika

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Q}_{s+r}(x)e^{\mu x},$$

gdje je r red višestrukosti svojstvene vrijednosti μ matrice $\mathbf{A}$, a $\mathbf{Q}_{s+r}(x)$ je polinom stepena ne većeg od $s+r$, sa koeficijentima koji su $n-$dimenzionalni konstantni vektori. Ako je $\mathbf{y}_h$ opće rješenje pridružene homogene jednadžbe tada je opće rješenje polazne nehomogene jednadžbe dato sa

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x).$$

Ako μ nije svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$, iz prethodnog teorema, slijedi da je partikularno rješenje oblika $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{Q}_s(x)e^{\mu x}$.

Primjer 3.5.5. *Riješiti sistem*

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y.$$

Rješenje. Odredimo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ pridružene datom sistemu:

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ i } \lambda_2 = 3.$$

Kako je $\lambda_1 = 1$ svojstvena vrijednost višestrukosti 1, njoj odgovara rješenje u obliku $\mathbf{X}_1(t) = \boldsymbol{v}_1 e^t$, gdje je $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ svojstveni vektor matrice pridružene sistemu koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$.

Komponente vektora $\boldsymbol{v}_1$ određujemo iz sistema

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Iz sistema slijedi da je $v_{11} = v_{12}$, pa za $v_{12} = C_1$ dobivamo da je rješenje koje odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ dato sa

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Kako je $\lambda_2 = 3$ svojstvena vrijednost višestrukosti 1, njoj odgovara rješenje u obliku $\mathbf{X}_2(t) = \boldsymbol{v}_2 e^{3t}$, gdje je $\boldsymbol{v}_2 = (v_{21}, v_{22})^T$ svojstveni vektor matrice pridružene sistemu koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 3$.

Komponente vektora $\boldsymbol{v}_1$ određujemo iz sistema

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Iz sistema slijedi da je $v_{21} = -v_{22}$, pa za $v_{21} = C_2$ dobivamo da je rješenje koje odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 3$ dato sa

$$\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t) + \mathbf{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

♦

Primjer 3.5.6. *Riješiti sistem*

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

Rješenje. Odredimo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ pridružene datom sistemu:

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2+i \text{ i } \lambda_2 = 2-i.$$

Kako je $\lambda_1 = 2+i$ svojstvena vrijednost višestrukosti 1, njoj odgovara rješenje u obliku $\mathbf{X}_1(t) = \boldsymbol{v}_1 e^{(2+i)t}$, gdje je $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ svojstveni vektor matrice pridružene sistemu koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 2+i$.

Komponente vektora $\boldsymbol{v}_1$ određujemo iz sistema

$$\begin{pmatrix} 2-(2+i) & -1 \\ 1 & 2-(2+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Iz sistema slijedi da je $v_{11} = iv_{12}$ pa za $v_{12} = 1$ dobivamo da je rješenje koje odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 2+i$ dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} i(\cos t + i \sin t) \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{2t} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Na osnovu ovog dobivamo da sistem ima dva nezavisna rješenja

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t) + \mathbf{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

♦

Primjer 3.5.7. *Naći opće rješenje linearnog sistema*

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 3y.$$

Rješenje. Odredimo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ pridružene datom sistemu:

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Prema tome, matrica $\mathbf{A}$ ima jednu svojstvenu vrijednosti $\lambda_1 = 2$ višestrukosti $k_1 = 2$. Lako se vidi da je $rang(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 1$. Kako je $m_1 = n - rang(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 2 - 1 = 1$, opće rješenje tražimo u obliku

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{k_1 - m_1}(t) e^{\lambda_1 t} = \mathbf{P}_1(t) e^{\lambda_1 t} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t) e^{\lambda_1 t},$$

gdje je $\mathbf{A}_0 = (a_0, b_0)^T$ i $\mathbf{A}_1 = (a_1, b_1)^T$. Koristit ćemo metod neodređenih koeficijenata. Neka je

$$x = (a_0 + a_1 t) e^{2t}, \quad y = (b_0 + b_1 t) e^{2t}.$$

Uzimajući izvode ovih funkcija dobivamo da je

$$\frac{dx}{dt} = (2a_0 + a_1 + 2a_1 t) e^{2t}, \quad \frac{dy}{dt} = (2b_0 + b_1 + 2b_1 t) e^{2t}.$$

Uvrštavajući funkcije x i y i njihove izvode u polazni sistem dobivamo

$$\begin{cases} (2a_0 + a_1 + 2a_1 t) e^{2t} = (a_0 + a_1) e^{2t} - (b_0 + b_1) e^{2t}, \\ (2b_0 + b_1 + 2b_1 t) e^{2t} = (a_0 + a_1) e^{2t} + 3(b_0 + b_1) e^{2t}, \quad . \end{cases}$$

Dijeljenjem sa e^{2t} i izjednačavanjem koeficijenata uz iste članove na lijevoj i desnoj strani dobivamo sistem

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + b_0 = 0, \\ a_1 + b_1 = 0, \\ a_0 + b_0 - b_1 = 0, \\ a_1 + b_1 = 0, \qquad . \end{cases}$$

U ovom sistemu postoje samo dvije nezavisne jednadžbe. Stavimo da je $a_0 = C_1$ i $a_1 = C_2$. Preostale konstante b_0 i b_1 izrazićemo preko C_1 i C_2. Dobijemo da je $b_0 = -C_1 - C_2$ i $B - 1 = -C_2$.

Dakle, opće rješenje je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -C_1 - C_2 - C_2 t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

♦

Primjer 3.5.8. *Naći opće rješenje sistema*

$$\frac{dx}{dt} = -2x - 3y - 5z, \quad \frac{dy}{dt} = x + 4y + z, \quad \frac{dz}{dt} = 2y + 5z.$$

Rješenje. Prvo, pronađimo svojstvene vrijednosti koje odgovaraju karakterističnoj jednadžbi

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -5 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijajući ovu determinantu dobivamo da je

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Dakle, matrica ima dvije svojstvene vrijednosti: $\lambda_1 = 1$ višestrukosti 1, i $\lambda_2 = 3$ višestrukosti 2.

Posmatrajmo prvo svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1$. Njoj odgovara rješenje oblika $\mathbf{X}_1(t) = \boldsymbol{v}_1 e^t$, gdje je $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \gamma_{13})^T$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$. Njegove komponente dobivamo rješavajući sistem

$$\begin{pmatrix} -2-1 & -3 & -5 \\ 1 & 4-1 & 1 \\ 2 & 0 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = 0.$$

Rješavajući ovaj sistem dobivamo

$$\begin{cases} v_{11} + 3v_{12} + v_{13} = 0, \\ 3v_{12} - v_{13} = 0, \end{cases}.$$

Uzimajući u prethodnom sistemu da je $v_{13} = 3$, dobivamo $v_{11} = -6$ i $v_{12} = 1$.

Dakle, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ odgovara sljedeće rješenje

$$\mathbf{X}_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t.$$

Sada, posmatrajmo svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 3$ koja ima višestrukost $k_2 = 2$. Lako se može vidjeti da je $rang(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = 2$. Dakle, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 3$ odgovara $m_2 = n - rang(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = 3 - 2 = 1$ nezavisnih svojstvenih vektora. Prema tome, rješenje tražimo u obliku

$$\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{P}_{k_2 - m_2} e^{\lambda_2 t} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t) e^{3t}.$$

Stavljajući da je

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

koordinate od $\mathbf{X}_2(t)$ se mogu napisati u obliku

$$x = (a_0 + a_1 t)e^{3t}, \quad x = (b_0 + b_1 t)e^{3t}, \quad z = (c_0 + c_1 t)e^{3t}.$$

Uzimajući izvode ovih funkcija dobivamo da je

$$\frac{dx}{dt} = a_1 e^{3t} + 3(a_0 + a_1)e^{3t}, \ \frac{dy}{dt} = b_1 e^{3t} + 3(b_0 + b_1)e^{3t}, \ \frac{dz}{dt} = c_1 e^{3t} + 3(c_0 + ac_1)e^{3t}.$$

Uvrštavajući to u polaznu jednadžbu i dijeljenjem sa e^{3t}, imamo

$$\begin{cases} a_1 + 3(a_0 + a_1) = -2(a_0 + a_1 t) - 3(b_0 + b_1 t) - 5(c_0 + c_1 t), \\ b_1 + 3(b_0 + b_1) = a_0 + a_1 t + 4(b_0 + b_1 t) + c_0 + c_1 t, \\ c_1 + 3(c_0 + c_1) = 2(a_0 + a_1 t) + 5(c_0 + c_1 t). \end{cases}$$

Izjednačavajući koeficijente na lijevoj i desnoj strani dobivamo sistem

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 + 3b_0 + 5c_0 = 0, \\ 5a_1 + 3b_1 + 5c_1 = 0, \\ a_0 + b_0 - b_1 + d_0 = 0, \\ a_1 + b_1 + c_1 = 0, \\ 2a_0 + 2c_0 - c_1 = 0, \\ a_1 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Uzimajući da je $a_0 = C_2$ i $a_1 = 2C_3$, koristeći ovaj sistem, imamo

$$b_0 = C_3, \quad c_0 = -C_3 - C_2, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -2c_3.$$

Prema tome, rješenje koje odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 3$ je dato sa

$$\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} C_2 + 2C_3 t \\ C_3 \\ -C_3 - C_2 - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Dakle, opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1(t) + \mathbf{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ -1 - 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

♦

Primjer 3.5.9. *Naći opće rješenje sistema jednadžbi*

$$\frac{dx}{dt} = -6x + 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - y + 5z, \quad \frac{dz}{dt} = x - 3y + 4z.$$

Rješenje. Prvo, pronađimo svojstvene vrijednosti koje odgovaraju karakterističnoj jednadžbi

$$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & 0 \\ 1-2 & -1-\lambda & 5 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Odavde je

$$(\lambda+1)^2 = 0.$$

Dakle, matrica ima svojstvenu vrijednosti $\lambda_1 = -1$ višestrukosti $k_1 = 3$.

Lako se može vidjeti da je $rang(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}) = 2$. Dakle, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -1$ odgovara $m_1 = n - rang(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}) = 3-2 = 1$ nezavisnih svojstvenih vektora. Prema tome, rješenje tražimo u obliku

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}_{k_1-m_1}(t)e^{\lambda_1 t} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2)e^{-t},$$

gdje je

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Koordinate od $\mathbf{X}(t)$ se mogu napisati u obliku

$$x = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)e^{-t}, \quad x = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)e^{-t}, \quad z = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)e^{-t}.$$

Izvodi ovih funkcija su

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} =& (a_1 + 2a_2 t)e^{-t} - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} =& (b_1 + 2b_2 t)e^{-t} - (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)e^{-t} \\ \frac{dz}{dt} =& (c_1 + 2c_2 t)e^{-t} - (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)e^{-t}. \end{aligned}$$

Uvrštavajući to u polaznu jednadžbu i dijeljenjem sa e^{-t}, dobivamo

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 = -6(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) + 5(b_0 + b_1 t + b_2 t^2), \\ b_1 + 2b_2 t - b_0 - b_1 t - b_2 t^2 = -2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) - (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) + \\ \qquad\qquad +5(c_0 + c_1 t + c_2 t^2), \\ c_1 + 2c_2 t - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) - 3(b_0 + b_1 t + b_2 t^2) + \\ \qquad\qquad +4(c_0 + c_1 t + c_2 t^2. \end{cases}$$

Izjednačavajući koeficijente uz na lijevoj i desnoj strani dobivamo sistem

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 - 5b_0 = 0, \\ 5a_1 + 2a_2 - 5b_1 = 0, \\ a_2 - b_2 = 0, \\ 2a_0 + b_1 - 5c_0 = 0, \\ 2a_1 + b_2 - 5c_1 = 0, \\ 2a_2 - 5d_2 = 0, \\ a_0 - 3b_0 + 5c_0 - c_1 = 0, \\ a_0 - 3b_1 + 5c_1 - c_2 = 0, \\ a_2 - 3b_2 + 5c_2 = 0. \end{cases}$$

Uzmimo da je $a_0 = C_1$, $a_1 = C_2$ i $a_2 = C_3$, te koristeći prethodni sistem imamo:

$$b_0 = C_1 + \frac{1}{5}C_2, \quad b_1 = C_2 + \frac{2}{5}C_3, \quad b_2 = C_3$$

$$c_0 = \frac{2}{5}C_1 - \frac{1}{5}C_2 + \frac{2}{25}C_3, \quad c_1 = \frac{2}{5}C_2 + \frac{2}{5}C_3, \quad c_2 = \frac{2}{5}C_3.$$

Prema tome, opće rješenje je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + 2C_3t^2 \\ C_1 + \frac{C_2}{5} + C_2t + \frac{2}{5}C_3t + C_3t^2 \\ \frac{2}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2 + \frac{2}{25}C_3 + \frac{2}{5}t + \frac{2}{5}C_3t + \frac{2}{5}C_3t^2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

♦

Primjer 3.5.10. *Metodom neodređenih koeficijenata naći opće rješenje sistema*

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \cos t$$

Rješenje. Odredimo svojstvene vrijednosti matrice A pridružene homogenog sistema:

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i \text{ i } \lambda_2 = -i.$$

Kako je $\lambda_1 = i$ svojstvena vrijednost višestrukosti 1, njoj odgovara rješenje u obliku $\mathbf{X}_1(t) = \boldsymbol{v}_1 e^{it}$, gdje je $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ svojstveni vektor matrice pridružene sistemu koji odgovara toj svojstvenoj vrijednosti.

Komponente vektora $\boldsymbol{v}_1$ određujemo iz sistema

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Odavde slijedi da je $v_{11} = iv_{12}$, pa za $v_{12} = 1$ dobivamo da je rješenje, koje odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = i$, dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} i(\cos t + i \sin t) \\ (\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Na osnovu ovog dobivamo da sistem ima dva nezavisna rješenja

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t) + \mathbf{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Kako je $\mu = i$, a $\lambda_1 = i$ je svojstvena vrijednost višestrukosti 1, to partikularno rješenje tražimo u obliku

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t)\cos t + (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t)\sin t,$$

gdje je

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}.$$

Funkcije $x_p(t)$ i $y_p(t)$ se mogu napisati u obliku

$$x_p(t) = (a_0 + a_1 t)\cos t + (c_0 + c_1 t)\sin t,$$
$$y_p(t) = (b_0 + b_1 t)\cos t + (d_0 + d_1 t)\sin t.$$

Uvrštavajući ovo u polazni sistem i izjednačavanjem koeficijenata uz iste članove na lijevoj i desnoj strani dobivamo sistem

$$\begin{cases} a_1 + c_0 = -b_0 \\ -a_0 + c_1 = -d_0 \\ -a_1 = -d_1 \\ c_1 = -b_1 \\ b_1 + d_0 = a_0 + 1 \\ -b_0 + d_1 = c_0 \\ d_1 = a_1 \\ -b_1 = c_1 \end{cases}.$$

Lako se vidi da je jedno od rješenja sistema dato sa

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{1}{2}, \quad d_1 = 0.$$

Dakle, partikularno rješenje je dato sa

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} t \sin t \\ \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}.$$

Opće rješenje je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} t \sin t \\ \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}.$$

♦

3.5.4 Zadaci za samostalan rad

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x - y,\\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y.\end{aligned}$$

2. Metodom eliminacije integrirati sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 2y,\\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 6y + t.\end{aligned}$$

3. Riješiti sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -4x + 2y + 5z,\\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y - 6z,\\ \frac{dz}{dt} &= -8x + 3y + 9z.\end{aligned}$$

4. Riješiti sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - y - 3z,\\ \frac{dy}{dt} &= -6x + 2y + 6z,\\ \frac{dz}{dt} &= 6x - 2y - 6z.\end{aligned}$$

5. Riješiti sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{dx} &= -y + z,\\ x\frac{dz}{dx} &= -y - 3z.\end{aligned}$$

6. Naći opće rješenje sistema diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}t\frac{dx}{dt} &= y + y,\\ t\frac{dy}{dt} &= y,\\ t\frac{dz}{dt} &= -z.\end{aligned}$$

3.5.5 Veza između fundamentalnih matrica

Do sada smo posmatrali homogeni sistem linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n \\ y_2' &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n. \end{aligned} \tag{3.94}$$

kojeg smo kraće pisali u obliku

$$y_k' = \sum_{k=1}^{n} p_{kl}(x)y_l, \; l = 1, 2, ..., n,$$

gdje smo za koeficijente $p_{kl}(x)$ pretpostavljali da su neprekidne funkcije na (a, b).

Primijetimo da se u ovom zapisu sistema (3.94) prvi indeks koeficijenta p_{kl} poklapa sa indeksom tražene funkcije.

Sada ćemo zbog pogodnijeg razmatranja posmatrati sljedeći sistem, kojeg napisali tako da drugi indeks odgovara indeksu tražene funkcije

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x)y_1 + p_{21}(x)y_2 + \cdots + p_{n1}(x)y_n \\ y_2' &= p_{12}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{n2}(x)y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{1n}(x)y_1 + p_{2n}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n. \end{aligned} \tag{3.95}$$

kojeg kraće možemo pisati u obliku

$$y_k' = \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x)y_l, \; k = 1, 2, ..., n,$$

gdje za koeficijente $p_{lk}(x)$ pretpostavljamo da su neprekidne funkcije na (a, b).

Neka funkcije

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}, \quad i = 1, \ldots, n$$

čine fundamentalan skup rješenja sistema (3.95).

Nakon uvrštavanja ovih funkcija u sistem (3.95) dobivamo n^2 identiteta, koje možemo napisati u obliku

$$y_{ik}' \equiv \sum_{l=1}^{n} p_{lk}y_{il}, \quad i, k = 1, \ldots, n \tag{3.96}$$

U cilju jednostavnijeg zapisa identiteta (3.96) uvodimo sljedeće dvije matrice:

$$A(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \cdots p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \cdots p_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \cdots p_{nn}(x) \end{pmatrix}, \ \Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots y_{nn}(x \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

$A(x)$ je transponirana matrica koeficijenata sistema (3.95), a $\Phi(x)$ fundamentalna matrica sistema (3.95). Sada identitet (3.96) možemo napisati u obliku

$$\Phi'(x) \equiv \Phi(x)A(x). \tag{3.98}$$

Iz (3.98) vidimo da je matrica $\Phi(x)$ zapravo rješenje matrične jednadžbe

$$\Phi'(x) = \Phi(x)A(x). \tag{3.99}$$

Jednadžba (3.99) zove se *matrična jednadžba pridružena sistemu* (3.94). Vidimo da se problem integriranja sistema (3.94) svodi na problem nalaženja rješenja jednadžbe (3.99). Matricu $\Phi(x)$ zvat ćemo *integralnom matricom* jednadžbe (3.99) na intervalu (a, b) ako je $\det \Phi(x) \neq 0$. Svaka integralna matrica jednadžbe (3.99) je fundamentalna matrica sistema (3.95) Problem postojanja i strukture fundamentalnog skupa rješenja sistema (3.94) ekvivalentan je pitanju o postojanju i strukturi integralne matrice jednadžbe (3.99). Matrica početnih uvjeta naziva se *matrica početnih vrijednosti integralne matrice* Φ. Početnu vrijednost integralne matrice Φ označavat ćemo sa Φ_0. Znači

$$\Phi(x_0) = \Phi_0, \ x_0 \in (a, b). \tag{3.100}$$

Na osnovu Ostrogradski-Liouvilleove formule slijedi da za determinantu integralne matrice Φ vrijedi formula

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(t)dt}.$$

Integralna matrica koja je u tački x_0 jednaka jediničnoj matrici, tj. za koju je

$$\Phi(x_0) = I \tag{3.101}$$

naziva se integralna matrica *normirana* u tački x_0 i označavat ćemo je sa $\Phi(x, x_0)$.

Sada ćemo dokazati dva osnovna svojstva matrične jednadžbe (3.99).

Teorem 3.5.12. *Jednadžba* (3.99) *ostaje linearna pri smjeni nezavisne promjenljive* x, *tj*

$$x = \varphi(t),$$

pri čemu je $\varphi(t)$ *diferencijabilna funkcija.*

Dokaz. Kako je $x = \varphi(t)$, imamo

$$\Phi' = \Phi'_t \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Sada, uvrštavanjem $x = \varphi(t)$ u (3.99), dobivamo $\Phi'_t = \Phi(\varphi(t))A[\varphi(t)]\varphi'_t(t)$, tj. $\Phi'_t = \Phi A_1$, gdje je $A_1(x) = A[\varphi(t)]\varphi'_t(t)$. □

Teorem 3.5.13. *Jednadžba* (3.99) *ostaje linearna ako umjesto fundamentalne matrice* Φ *uvrstimo novu fundamentalnu matricu* Z *preko smjene* $\Phi = ZQ$, *gdje je* Q *regularna (*$\det Q \neq 0$*) diferencijabilna matrica*[5].

Dokaz. Zaista, kako je

$$\Phi' = Z'Q + ZQ'. \tag{3.102}$$

sada u jednadžbu (3.99) uvrstimo $\Phi = ZQ$ i (3.99) pa imamo

$$Z'Q + ZQ' = ZQA$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} Z' &= ZQAQ^{-1} - ZQ'Q^{-1} = \\ &= Z(QAQ^{-1} - Q'Q^{-1}) \end{aligned}$$

a što se može napisati u obliku

$$Z' = ZB,\ B = QAQ^{-1} - Q'Q^{-1}.$$

Specijalno, ako je $Q(x) = S = const.$ i $\det S \neq 0$ onda je $B = SAS^{-1}$, pa je onda

$$Z' = ZSAS^{-1}.$$

□

Sljedeća dvije tvrdnje daju nam vezu između različitih integralnih matrica jednadžbe (3.99).

Tvrdnja 3.5.1. *Ako je* Ψ *fundamentalna matrica jednadžbe* (3.99), *onda je*

$$\Phi = C\Psi, \tag{3.103}$$

gdje je $\mathbf{C}$ *bilo koja konstantna regularna matrica, također fundamentalna matrica jednadžbe* (3.99).

Dokaz. Zaista, diferenciranjem $C\Psi$ dobivamo

$$(C\Psi)' = C\Psi'. \tag{3.104}$$

S druge strane, kako je Ψ fundamentalna matrica (3.99) to je $\Psi' \equiv \Psi A$. Sada (3.104) postaje $(C\Psi)' \equiv C\Psi A$. Kako je $\det(C\Psi)) = \det C \det \Psi \neq 0$ to je $C\Psi$ fundamentalna matrica matrične jednadžbe (3.99). □

Tvrdnja 3.5.2. *Ako je* Ψ *fundamentalna matrica jednadžbe* (3.99) *definirana na intervalu* (a, b) *(interval na kome je* $A(x)$ *neprekidna matrica), onda formula* (3.103) *sadrži sve fundamentalne matrice definirane na* (a, b).

[5] Matrica je diferencijabilna na (a, b) ako su joj svi elementi diferencijabilne funkcije na (a, b).

Dokaz. Neka je $\widetilde{\Phi}(x)$ fundamentalna matrica jednadžbe (3.99) koja zadovoljava početni uvjet $\widetilde{\Phi}(x_0) = \widetilde{\Phi}_0$. Ako u (3.103) uvrstimo $x = x_0$ i $\Phi = \widetilde{\Phi}$ imamo $\widetilde{\Phi}_0 = \widetilde{\Phi}(x_0) = C\Psi(x_0)$. Nakon množenja zdesna sa $\Psi^{-1}(x_0)$ dobivamo $C = \widetilde{\Phi}_0\Psi^{-1}(x_0)$. Ovakovo C uvrstimo u (3.103), imamo $\Phi(x) = \widetilde{\Phi}_0\Psi^{-1}(x_0)\Psi(x)$. Odavde je $\Phi(x_0) = \widetilde{\Phi}_0$. Kako integralna matrica $\widetilde{\Phi}(x)$ ima iste početne vrijednosti za $x = x_0$, onda po Teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, ove integralne matrice se podudaraju, tj. $\widetilde{\Phi}(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\widetilde{\Phi}_0$. Dakle, svaku fundamentalnu matricu možemo dobiti iz (3.103) pri odgovarajućem izboru regularne matrice C. Specijalno, ako je fundamentalna matrica Ψ normirana u x_0, onda svaka fundamentalna matrica Φ se može izraziti preko Ψ po formuli $\Phi = \Psi\widetilde{\Phi}_0$. □

Iz gore dokazanih tvrdnji slijedi da između različitih fundamentalnih sistema rješenja homogenog sistema linearnih jednadžbi postoji veza koja je data sa (3.103), pri čemu je $\det C \neq 0$. Saglasno vezi (3.103) svi fundamentalni sistemi rješenja se mogu dobiti iz jednog fundamentalnog sistema. Pogodno je naći normirani fundamentalni sistem. Također, saglasno ranije rečenom, za integriranje jednadžbe (3.99) dovoljno je naći samo jednu integralnu matricu matricu, pri čemu je dovoljno je naći onu koja je normirana.

3.5.6 Matrično rješavanje homogenih sistema diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima

Sada ponovo posmatrajmo sistem (3.94) kod kojeg prvi indeks u koeficijentima odgovara indeksu nepoznate funkcije, pri čemu su koeficijenti sistema konstante. Kao što znamo, sistem (3.94) možemo napisati u matričnom obliku

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{3.105}$$

$\mathbf{A}$ je matrica sistema, a $\mathbf{y}$ vektor kolona nepoznatih funkcija. Ako

$$\mathbf{y_1}(x), \mathbf{y_2}(x), \ldots, \mathbf{y_n}(x)$$

čine fundamentalan skup rješenja sistema (3.94), vidjeli smo da je onda odgovarajuća fundamentalna matrica data sa

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots y_{nn}(x \end{pmatrix}.$$

Fundamentalna matrica $\mathbf{\Phi}$ zadovoljava jednadžbu $\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A\Phi}$.

Slično kao i kod dokaza tvrdnji 3.5.1, 3.5.2, može se jednostavno pokazati da ako je Ψ fundamentalna matrica sistema (3.94), onda je i ΨC fundamentalna matrica sistema (3.94), pri čemu je C bilo koja konstantna $n \times n$ regularna matrica.

Pored toga, rješenje Cauchyevog problema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}, \ \ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \tag{3.106}$$

je dato sa

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{\Phi}(x, x_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{\Psi}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0,$$

gdje je $\mathbf{\Phi}(x, x_0)$ $n \times n$ matrica koja je rješenje matričnog početnog problema, i kao posljedicu ranijeg zapažanja imamo da je

$$\mathbf{\Phi}(x, x_0) = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{\Psi}^{-1}(x_0),$$

za bilo koju fundamentalnu matricu $\mathbf{\Psi}(x)$ homogenog sistema (3.45).

Posmatrajmo ponovo matrični problem početnih vrijednosti

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{\Phi}, \;\; \mathbf{\Phi}(x_0) = \mathbf{I}, \tag{3.107}$$

gdje je matrica sistema nije konstantna. Ovaj problem ima jedinstveno rješenje $\mathbf{\Phi}(x, x_0)$ definirano na (a, b) što se može dokazati kao Cauchy-Picardov teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja. Pored toga može se pokazati da niz

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(x) &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{\Phi}_{m+1}(x) &= \mathbf{I} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}_m(t)dt, \; m = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3.108}$$

konvergira ka $\mathbf{\Phi}(x, x_0)$ i da je

$$\mathbf{\Phi}(x, x_0) = \mathbf{I} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(t)dt + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} \mathbf{A}(t)\mathbf{A}(t_1)dt_1 dt + \cdots \tag{3.109}$$

Red (3.109) se zove *Peano-Bakerov* red za matrični problem početnih vrijednosti. Ako je $\mathbf{A}$ konstantna kvadratna matrica, tada (3.109) postaje

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(x, x_0) &= \mathbf{I} + \mathbf{A}\int_{x_0}^{x} dt + \mathbf{A}^2 \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} dt_1 dt + \cdots \\ &= \mathbf{I} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}(x - x_0)]^m}{m!}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Uvedimo sada pojam *eksponenta konstantne kvadratne* matrice.

Definicija 3.5.4. *Eksponentom konstantne kvadratne matrice A reda n naziva se kvadratna matrica reda n, definirana kao*

$$e^{\mathbf{A}} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}. \tag{3.111}$$

Može pokazati da red na desnoj strani uvijek konvergira. Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 3.5.14. *Za proizvoljnu kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ i proizvoljan broj x, red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k x^k}{k!}$$

konvergira ka matrici $e^{\mathbf{A}x}$. Osim toga, matrica $e^{\mathbf{A}x}$ ima sljedeće osobine:

i) $e^{\mathbf{A}x}e^{\mathbf{B}x} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})x}$ *ako i samo ako* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *komutiraju;*

ii) $e^{\mathbf{A}(x+y)} = e^{\mathbf{A}x}e^{\mathbf{A}y} = e^{\mathbf{A}y}e^{\mathbf{A}x}$ *za svako* x, y;

iii) $e^{-\mathbf{A}x}$ *je inverzna matrica matrice* $e^{\mathbf{A}x}$;

iv) $\left(e^{\mathbf{A}x}\right)' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{A}$.

Sumirajući prethodnu diskusiju dobivamo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5.15. *Matrica*

$$\mathbf{\Phi}(x, x_0) = e^{\mathbf{A}(x-x_0)}$$

je fundamentalna matrica sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

normirana u x_0, *gdje je* A *konstantna matrica.*

Vidjeli smo ranije da ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, različite svojstvene vrijednosti matrice A i $\boldsymbol{v}_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn})^T$ odgovarajući svojstveni vektori, tada je

$$\mathbf{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 x} & v_{21}e^{\lambda_2 x} & \cdots & v_{n1}e^{\lambda_n x} \\ v_{12}e^{\lambda_1 x} & v_{22}e^{\lambda_2 x} & \cdots & v_{n2}e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{1n}e^{\lambda_1 x} & v_{2n}e^{\lambda_2 x} & \cdots & v_{nn}e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

fundamentalna matrica sistema (3.71). Na osnovu Teorema 3.5.15 je

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{\Phi}(x, 0) = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{\Psi}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 x} & v_{21}e^{\lambda_2 x} & \cdots & v_{n1}e^{\lambda_n x} \\ v_{12}e^{\lambda_1 x} & v_{22}e^{\lambda_2 x} & \cdots & v_{n2}e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{1n}e^{\lambda_1 x} & v_{2n}e^{\lambda_2 x} & \cdots & v_{nn}e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} =$$

$$= \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot e^{\mathbf{J}x} \cdot \mathbf{T}^{-1},$$

gdje je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nažalost, kad matrica A ima samo $k < n$ različitih svojstvenih vektora, tada izračunavanje $e^{\mathbf{A}}$ nije lako. Pored niza metoda koji postoje, navest ćemo dva koji su relativno laki u poređenju sa drugim metodama. Prvi metod je dat sljedećim teoremom.

Teorem 3.5.16. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, različite svojstvene vrijednosti matrice A sa višestrukošću $r_1, r_2, ..., r_k$, redom. Neka je*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \tag{3.112}$$

tada je

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{i=1}^{k} \left[e^{\lambda_i x} a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) \sum_{j=0}^{r_i - 1} \left\{ \frac{1}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j x^i \right\} \right], \tag{3.113}$$

gdje je

$$q_i(\lambda) = p(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{-r_i}, \ \ 1 \le i \le k \tag{3.114}$$

i $a_i(\lambda)$, $1 \le i \le k$ su polinomi stepena manjeg od r_i u razvoju

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{a_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{a_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{r_k}}. \tag{3.115}$$

Dokaz. Iz relacija (3.114) i (3.115) imamo

$$1 = a_1(\lambda) q_1(\lambda) + \cdots + a_k(\lambda) q_k(\lambda).$$

Ova relacija je izvedena iz karakteristične jednadžbe $p(\lambda) = 0$, pa na osnovu Cayley-Hamiltonovog teorema[6], dobivamo

$$\mathbf{I} = a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) + \cdots + a_k(\mathbf{A}) q_k(\mathbf{A}). \tag{3.116}$$

Kako matrice $\lambda_i \mathbf{I}$ i $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ komutiraju i kako je $e^{\lambda_i \mathbf{I} x} = e^{\lambda_i x} \mathbf{I}$, to je

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i \mathbf{I} x} e^{(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})x} = e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j x^i \right\}.$$

Množeći obje strane ove jednadžbe s lijeva sa $a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A})$ i koristeći činjenicu da je $q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{r_i} = p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ za svako $j \ge r_i$, slijedi da je

$$a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) = e^{\lambda_i x} a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) \sum_{j=0}^{r_i - 1} \left\{ \frac{1}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j x^i \right\}.$$

Sumirajući ove relacije po i od 1 do k i koristeći (3.116), dobivamo (3.113). □

Posljedica 3.5.2. *Ako je $k = n$, tj. matrica A ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada koristeći da je $a_i(\mathbf{A}) = (1/q_i(\lambda_i))\mathbf{I}$, formula* (3.113) *se svodi na*

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\mathbf{A})}{q_i(\lambda_i)} e^{\lambda_i x} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{i-1} \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{i+1} \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n)} e^{\lambda_i x} \end{aligned}. \tag{3.117}$$

[6]**Cayley-Hamiltonov teorem**: Svaka kvadratna matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu $p(\lambda) = 0$, tj. $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Posljedica 3.5.3. *Ako je $k = 1$, tj. matrica A ima samo jednu svojstvenu vrijednost, tada koristeći da je $a_i(\mathbf{A}) = q_i(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$, formula (3.113) se svodi na*

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j x^i \right\}. \tag{3.118}$$

Drugi metod je dat sljedećim teoremom.

Teorem 3.5.17 (Putzerov algoritam). *Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ proizvoljnog ali fiksiranog redoslijeda. Tada je*

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) \mathbf{P}_j,$$

gdje je $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}, \mathbf{P}_j = \prod_{k=1}^{j} (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})$, $j = 1, ..., n$ i $r_1(x), ..., r_n(x)$ su rekurzivno dati sa

$$\begin{aligned} &r_1'(x) = \lambda_1 r_1(x), \quad r_1(0) = 1 \\ &r_j'(x) = \lambda_j r_j(x) + r_{j-1}(x), \quad r_j(0) = 0, \quad j = 2, ..., n. \end{aligned}$$

(Napomenimo da se svaka svojstvena vrijednost u listi pojavljuje onoliko puta kolika joj je višestrukost.)

Dokaz. Dovoljno je dokazati da $\mathbf{\Phi}(x)$ definirana sa

$$\mathbf{\Phi}(x) = \sum_{j=0}^{n} r_{j+1}(x) \mathbf{P}_j$$

zadovoljava jednadžbu $\mathbf{\Phi}' = A\mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. Stavimo da je $r_0(x) \equiv 0$. Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}'(x) - \lambda_n \mathbf{\Phi}(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} r_{j+1}(x) + r_j(x)) \mathbf{P}_j - \lambda_n \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) \mathbf{P}_j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(x) \mathbf{P}_j + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(x) \mathbf{P}_j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(x) \mathbf{P}_j + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(x) \mathbf{P}_{j+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left\{ (\lambda_{j+1} - \lambda_n) \mathbf{P}_j + (A - \lambda_{j+1} I) \mathbf{P}_j \right\} r_{j+1}(x) = \\ &= (A - \lambda_n \mathbf{I}) \sum_{j=0}^{n-2} P_j r_{j+1}(x) = \\ &= (A - \lambda_n \mathbf{I})(\mathbf{\Phi}(x) - r_n(x) P_{n-1}) = \\ &= (A - \lambda_n \mathbf{I}) \mathbf{\Phi}(x) - r_n(x) P_n, \end{aligned} \tag{3.119}$$

pri čemo smo koristili činjenice da je $\mathbf{P}_{j+1} = (\mathbf{A} - \lambda_{j+1}\mathbf{I})\mathbf{P}_j$ i $\mathbf{P}_n = (\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I})\mathbf{P}_{n-1}$. Sada, primijenom Cayley-Hamiltonovog teorema imamo da je $\mathbf{P}_n = p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, pa iz (3.119) dobivamo $\mathbf{\Phi}' = A\mathbf{\Phi}$. Konačno, za kompletiranje dokaza imamo da je

$$\mathbf{\Phi}(0) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(0)\mathbf{P}_j = r_1(0)\mathbf{I} = \mathbf{I}.$$

□

Primjer 3.5.11. *Za matricu* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ *izračunati* $e^{\mathbf{A}x}$.

Rješenje. Lako se može vidjeti da matrica $\mathbf{A}$ ima sve svojstvene vrijednosti jednake $\lambda_1 = -1$ i da je $r_1(x) = e^{-x}$, $r_2(x) = xe^{-x}$ i $r_3(x) = x^2e^{-x}$, rješenje sistema

$$\begin{aligned} r_1' &= \lambda_1 r_1, \quad r_1(0) = 1 \\ r_2' &= \lambda_1 r_2 + r_1, \quad r_2(0) = 0 \\ r_3' &= \lambda_1 r_3 + r_2, \quad r_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Primjenom Putzerovog algoritma dobivamo

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x} &= e^{\lambda_1 x}\left[\mathbf{I} + x(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) + \frac{1}{2}x^2(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2\right] = \\ &= e^{\lambda_1 x}\left[\mathbf{I} + x(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + \frac{1}{2}x^2(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2\right] \\ &= \frac{1}{2}x^2 \begin{pmatrix} 2 + 6x - 3x^2 & 2x & -2x + x^2 \\ -6x & 2 & 2x \\ 18x - 9x^2 & 6x & 2 - 6x + 3x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♦

Primjer 3.5.12. *Naći opće rješenje sljedećeg homogenog sistema diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Rješenje. *Matrica sistema glasi*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricu $e^{\mathbf{A}x}$ *izračunat ćemo Putzerovim algoritmom. Lako se može vidjeti da su svojstvene vrijednosti date sa* $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$. *Sistem jednadžbi po* $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$ *glasi*

$$\begin{aligned} r_1'(x) &= -r_1(x), & r_1(0) &= 1 \\ r_2'(x) &= -r_2(x) + r_1(x), & r_2(0) &= 0 \\ r_3'(x) &= 2r_3(x) + r_2(x), & r_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je

$$r_1(x) = e^{-x},\ r_2(x) = xe^{-x},\ r_3(x) = \frac{1}{9}e^{-x}(-1 + e^{3x} - 3x).$$

Matrice P_j, $j = 1, 2, 3$ *su:*

$$P_1 = (A + I),\ P_2 = (A + I)^2,\ P_3 = (A + I)^2(A - 2I),$$

tj.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{j=0}^{2} r_{j+1}(x)P_j = r_1(x)P_0 + r_2(x)P_1 + r_3(x)P_2,$$

tj.

$$e^{\mathbf{A}x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-x}\left(2 + e^{3x}\right) & \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right) & \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right) \\ \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right) & \frac{1}{3}e^{-x}\left(2 + e^{3x}\right) & \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right) \\ \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right) & \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right) & \frac{1}{3}e^{-x}\left(2 + e^{3x}\right) \end{pmatrix}.$$

Opće rješenje je dato sa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-x}\left(2 + e^{3x}\right)c_1 + \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right)c_2 + \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right)c_3 \\ \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right)c_1 + \frac{1}{3}e^{-x}\left(2 + e^{3x}\right)c_2 + \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right)c_3 \\ \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right)c_1 + \frac{1}{3}e^{-x}\left(-1 + e^{3x}\right)c_2 + \frac{1}{3}e^{-x}\left(2 + e^{3x}\right)c_3 \end{pmatrix}$$

♦

3.5.7 Matrično rješavanje nehomogenih sistema diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima

Opće rješenje homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednadžbi može se napisati pomoću fundamentalne matrice i proizvoljnog vektora (kolona) konstanti. Naime,

$$\mathbf{y}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} + \cdots + C_n \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Dakle, opće rješenje normalnog sistema u matričnom obliku glasi

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \mathbf{C}. \tag{3.120}$$

Sada ćemo u matričnom obliku odrediti i opće rješenje nehomogenog sistema (3.46), pri tome ćemo koristiti Lagrangeov metod varijacije konstanti.

U općem rješenju umjesto konstanti stavimo funkcije $C_i(x)$ za koje pretpostavljamo da su neprekidno diferencijabilne na intervalu (a, b). Ove konstante određujemo iz uvjeta da je funkcija

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}(x)$$

rješenje nehomogenog sistema. Zamjenom u sistem imamo

$$\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Kako je $\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{C}(x) \equiv \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$, dobivamo

$$\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{f}(x).$$

Množenjem ove jednakosti, sa lijeve strane, matricom $\mathbf{\Phi}^{-1}(x)$, dobivamo jednakost

$$\mathbf{C}'(x) = \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\mathbf{f}(x),$$

odakle je

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt,$$

gdje je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantan vektor iz $\mathbb{R}^n$, a x_0 proizvoljna tačka iz (a, b). Zamjenom $\mathbf{C}(x)$ u

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}(x)$$

dobivamo da je opće rješenje nehomogenog sistema dato sa

$$y(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt.$$

Ako je $\mathbf{A}(x)$ konstantna matrica, zbog $\mathbf{\Phi}(x,t) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{\mathbf{A}(x-t)}$, opće rješenje možemo napisati u obliku

$$y(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C} + \int_{x_0}^{x} e^{\mathbf{A}(x-t)}\mathbf{f}(t)dt.$$

Za $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ dobivamo da je

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{\Phi}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$$

partikularno rješenje nehomogenog sistema (3.46).

Primjer 3.5.13. *Naći opće rješenje metodom varijacije konstanti sistema*

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{1}{\cos t}, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Rješenje. Odredimo svojstvene vrijednosti matrice A pridruženog homogenog sistema:

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i \text{ i } \lambda_2 = -i.$$

Kako je $\lambda_1 = i$ svojstvena vrijednost višestrukosti 1, njoj odgovara rješenje u obliku $\mathbf{X}_1(t) = \boldsymbol{v}_1 e^{it}$, gdje je $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ svojstveni vektor matrice pridružene sistemu koji odgovara toj svojstvenoj vrijednosti.

Komponente vektora $\boldsymbol{v}_1$ određujemo iz sistema

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iz sistema slijedi da je $v_{12} = iv_{11}$, pa za $v_{11} = 1$ dobivamo da je rješenje, koje odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = i$, dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Na osnovu ovog dobivamo da sistem ima dva nezavisna rješenja

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Opće rješenje polazne jednadžbe je dato sa

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t) + \mathbf{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Imamo da je

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Lako se vidi da je

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Partikularno rješenje je dato sa

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(u)\mathbf{f}(u)du = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos u} \\ 0 \end{pmatrix} du$$

Na osnovu ovoga imamo da je za $t_0 = 0$

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \int_{0}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ \tan u \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\ln|\cos t| \end{pmatrix}.$$

Dakle, partikularno rješenje je dato sa

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \ln|\cos t| \\ -t\sin t - \cos t \ln|\cos t| \end{pmatrix}.$$

Opće rješenje nehomogenog sistema diferencijalnih jednadžbi je dato sa

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \ln|\cos t| \\ -t\sin t - \cos t \ln|\cos t| \end{pmatrix}.$$

♦

3.5.8 Zadaci za samostalan rad

1. Pokazati da je vektorska funkcija

$$\mathbf{y}(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(t)dt} \mathbf{y}_0$$

   rješenje Cauchyevog problema (3.106) ako matrice $\mathbf{A}(x)$ i $\int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(t)dt$ komutiraju za svako x.

2. Neka je $\mathbf{\Phi}(x, x_0)$ fundamentalna matrica sistem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ definirana na intervalu (a, b). Pokazati da je $\mathbf{\Phi}(x, x_0) = \mathbf{\Phi}(x, x_1)\mathbf{\Phi}(x_1, x_0)$, gdje $x_0, x_1 \in (a, b)$. Pored toga pokazati da je $\mathbf{\Phi}^{-1}(x, x_0) = \mathbf{\Phi}(x_0, x)$.

3. Ako je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, dokazati da je

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ -\sin \beta x & \cos \beta x \end{pmatrix}.$$

4. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dvije matrice dimenzije $n \times n$. Kažemo da su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ slične ako i samo ako postoji regularna matrica $\mathbf{P}$ takva da je $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Pokazati da vijedi:

(i) $\mathbf{z}(x)$ je rješenje jednadžbe $\mathbf{z}' = \mathbf{Bz}$ ako i samo ako je $\mathbf{y}(x) = \mathbf{Pz}(x)$ je rješenje jednadžbe $\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}$;

(ii) $e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{P}e^{\mathbf{B}x}\mathbf{P}^{-1}$.

5. Naći opće rješenje sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + t, \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2y + t^2. \end{aligned}$$

6. Matričnim metodom riješiti sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -5x + 2y + 40e^t, \\ \frac{dy}{dt} &= x - 6y + 9e^{-t}. \end{aligned}$$

7. Matričnim metodom riješiti sistem diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + by + e^t, \\ \frac{dy}{dt} &= -bx + ay + e^t, \end{aligned}$$

gdje je $a^2 - b^2 = 1$.

8. Riješiti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} (t^2+1)\frac{dx}{dt} &= -tx + y, \\ (t^2+1)\frac{dy}{dt} &= -x - ty. \end{aligned}$$

9. Riješiti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} y' - z' + x\sqrt{3} &= \sin t, \\ z' - x' + y\sqrt{3} &= \sin t, \\ x' - y' + z\sqrt{3} &= \sin t. \end{aligned}$$

10. (**Kirchnerov algoritam**) Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti matrice A višestrukosti $r_1, ..., r_k$, redom. Stavimo da je

$$p(\lambda) = \prod j = 1^k (\lambda - \lambda_j)^{rj}, \quad q_i(\lambda) = P(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{-r_i}, \quad q(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} q_j(\lambda),$$

$$f_m(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad p_i(\mathbf{A}) = (q(\mathbf{A}))^{-1} q_i(\mathbf{A}).$$

Pokazati da je

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{j=1}^{k} p_j(\mathbf{A}) f_{rj}((\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})x) e^{\lambda_j x}.$$

Poglavlje 4

Laplaceova transformacija

4.1 Osobine Laplaceove transformacije

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se koristi Laplaceova transformacija za traženje rješenja linearnih diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima i datim početnim uvjetom. Prije svega navest ćemo definiciju i osnovne osobine Laplaceove transformacije. Bez dokaza navodimo sljedeći Teorem.

Teorem 4.1.1. *Ako nesvojstveni integral*

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \;\; 0 \leq x < \infty,$$

konvergira za $s = s_0$, onda on konvergira za svako $s > s_0$.

Ako integral u prethodnom teoremu postoji, onda je on funkcija od s. Ovaj integral se zove *Laplaceova transformacija* funkcije $f(x)$ i označava se sa $\mathcal{L}[f(x)]$.

Definicija 4.1.1. *Neka je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $I : 0 \leq x < \infty$. Laplaceova transformacija funkcije $f(x)$ se definira sa*

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \tag{4.1}$$

gdje pretpostavljamo da je funkcija $f(x)$ takva da integral na desnoj strani u izrazu (4.1) postoji za svako s koje je veće ili jednako od neke vrijednosti s_0.

Primjer 4.1.1. Izračunati Laplaceovu transformaciju funkcije $f(x) = 1, \;\; x \geq 0$.

Imamo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] = F(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}dx \\ &= \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-sx}dx \\ &= \lim_{h\to\infty} \left(\frac{-e^{-sh}}{s} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s}, \text{ ako je } s > 0.\end{aligned}$$

Primjer 4.1.2. *Izračunati Laplaceovu transformaciju funkcije $f(x) = e^{2x}$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{2x}] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx &= \int_0^\infty e^{-sx} e^{2x}dx = \int_0^\infty e^{-(s-2)x}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-2)x}dx = -\lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-(s-2)x}}{s-2} \right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{s-2} - \frac{e^{-(s-2)b}}{s-2} \right].\end{aligned}$$

Ovaj limes postoji kad je $s > 2$. Dakle,

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \frac{1}{s-2}, \quad s > 2.$$

♦

Na osnovu Primjera 4.1.1 i 4.1.2 vidimo da je Laplaceova transformacija date funkcije funkcija od s. Označimo sa f *inverznu Laplaceovu transformaciju* funkcije F, tj. pišemo $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, ako je $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. Iz Primjera 4.1.1 i 4.1.2 vidimo da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad \text{i} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2x}.$$

Definicija 4.1.2. *Ako je F Laplaceova transformacija neprekidne funkcije f, tj. ako je*

$$\mathcal{L}[f] = F,$$

onda je inverzna Laplaceova transformacija funkcije F, koja se označava sa $\mathcal{L}^{-1}[F]$, funkcija f, tj.

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f.$$

Napomenimo da je funkcija f, koja odgovara funkciji F, jedinstveno određena (kad postoji). O postojanju Laplaceove transformacije govori nam Teorem 4.1.2, ali prije toga uvedimo sljedeće definicije:

Definicija 4.1.3. *Za funkciju f kažemo da je po dijelovima neprekidna na intervalu I, ako se I može podijeliti na konačno mnogo intervala pri čemu je u svakom od tih intervala funkcija f neprekidna i ima konačne lijeve i desne limese na krajevima tih intervala.*

Definicija 4.1.4. *Za funkciju f kažemo da je eksponecijalnog reda α kad $x \to \infty$ ako postoje brojevi $M > 0, \alpha$, i $x_0 \geq 0$ takvi da je*

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x} \quad \text{ako je} \quad x \geq x_0.$$

Ili, ekvivalentno, funkcija f je eksponecijalnog reda α ako postoji α tako da je $\lim_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{e^{\alpha x}} = L$, gdje je $L \geq 0$.

Sljedeći Teorem daje dovoljne uvjete za konvergenciju integrala u formuli (4.1).

Teorem 4.1.2. *Ako je f po dijelovima neprekidna funkcija na svakom konačnom intervalu na $[0, \infty)$, i ako f ima eksponencijalni rast reda α kad $x \to \infty$, tada integral (4.1) konvergira za $s > \alpha$. Pored toga, ako su f i g po dijelovima neprekidne funkcije koje imaju Laplaceovu transformaciji i ako vrijedi $\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[g(x)]$, tada je $f = g$ u svim tačkama u kojima su ove funkcije neprekidne. Dakle, ako $F(s)$ ima neprekidnu inverznu Laplaceovu transformaciju f, tada je f jedinstvena.*

Dokaz. Kako je funkcija f eksponencijalnog reda α, slijedi da postoje konstante $M_1 > 0$ i x_0 takve da je

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha x}, \quad x \geq x_0.$$

Kako je funkcija f po dijelovima neprekidna na $[0, x_0]$, pa samim tim i ograničena, to postoji konstanta $M_2 > 0$ takva da je

$$|f(t)| \leq M_2, \quad 0 < x < x_0.$$

Pošto $e^{\alpha x}$ ima pozitivan minimum na $[0, x_0]$, može se naći konstanta M dovoljno velika da vrijedi

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}, \quad x > 0$$

Dakle,

$$\left| \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \right| \leq \int_0^\infty e^{-sx} |f(x)| dx < \int_0^\infty e^{-sx} M e^{\alpha x} dx.$$

Odnosno, dobivamo da je

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right| <& M\int_0^\infty e^{\alpha x - sx}dx = M\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{x(\alpha-s)}dx\\ =& M\lim_{r\to\infty}\left(\frac{e^{x(\alpha-s)}}{\alpha-s}\right)\Big|_0^r\\ =& M\left(-\frac{1}{\alpha-s}+\lim_{r\to\infty}\frac{e^{r(\alpha-s)}}{\alpha-s}\right).\end{aligned}$$

Iz ovog slijedi da Laplaceov integral konvergira za $s > \alpha$. Prema tome je

$$\left|\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right| < \frac{M}{s-\alpha}.$$

Dokaz drugog dijela teorema slijedi na osnovu osobina Riemmanovog integrala.
□

Sljedeći teoremi govore o nekim osobinama Laplaceove transformacije.

Teorem 4.1.3. *Ako Laplaceova transformacija funkcije $f_1(x)$ postoji za $s > s_1$ i Laplacova transformacija funkcije $f_2(x)$ postoji za $s > s_2$, onda za $s > \max\{s_1, s_2\}$ vrijedi*

$$\mathcal{L}[af_1 + bf_2] = a\mathcal{L}[f_1] + b\mathcal{L}[f_2], \tag{4.2}$$

gdje su a i b konstante, tj. Laplaceova transformacija je linearni operator.

Dokaz. Na osnovu prepostavke teorema i definicije Laplaceove transformacije imamo,

$$\begin{aligned} a\mathcal{L}[f_1] &= a\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx, \quad s > s_1,\\ b\mathcal{L}[f_2] &= b\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx, \quad s > s_2.\end{aligned}$$

Oba ova integrala postoje za s koji je veći od s_1 i od s_2. Dakle, za $s > \max\{s_1, s_2\}$ imamo

$$\begin{aligned} a\mathcal{L}[f_1] + b\mathcal{L}[f_2] &= \int_0^\infty e^{-sx}af_1(x)dx + \int_0^\infty e^{-sx}bf(x)dx\\ &= \int_0^\infty e^{-sx}(af_1 + bf_2)dx = \mathcal{L}[af_1 + bf_2].\end{aligned}$$

□

Teorem 4.1.4 (Osobina translacije). *Ako je*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)], \quad \text{tada je} \quad F(s+k) = \mathcal{L}[e^{-kx}f(t)].$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} F(s+k) &= \int_0^{\infty} e^{-(s+k)x} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-kx} f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{-kx} f(x))dx = \mathcal{L}[e^{-kx} f(x)]. \end{aligned}$$

□

Teorem 4.1.5. *Inverzna Laplaceova transformacija je linearni operator, tj.*

$$\mathcal{L}^{-1}[aF_1 + bF_2] = a\mathcal{L}^{-1}[F_1] + b\mathcal{L}^{-1}[F_2]. \tag{4.3}$$

Dokaz. Neka je $F_1 = \mathcal{L}[f_1], \quad F_2 = \mathcal{L}[f_2]$, gdje su f_1 i f_2 neprekidne funkcije. Po definiciji inverzne Laplaceove transformacije je $\mathcal{L}^{-1}[F_1] = f_1, \quad \mathcal{L}^{-1}[F_2] = f_2$. Budući da je $\mathcal{L}[af_1 + bf_2] = a\mathcal{L}[f_1] + b\mathcal{L}[f_2]$, što se može napisati u obliku $\mathcal{L}[af_1 + bf_2] = aF_1 + bF_2$. Odavde imamo $\mathcal{L}^{-1}[aF_1 + bF_2] = af_1 + bf_2$. Dakle, $\mathcal{L}^{-1}[aF_1 + bF_2] = a\mathcal{L}^{-1}[F_1] + b\mathcal{L}^{-1}[F_2]$. □

Primjer 4.1.3. *Izračunati* $(a) \quad \mathcal{L}[x^2]. \qquad (b) \quad \mathcal{L}[\cosh kx]$.

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^2] &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-sx} dx = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 e^{-sx}}{-s}\right] + \frac{2}{s}\int_0^{\infty} x e^{-sx} dt \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 e^{-sx}}{-s}\right] + \frac{2}{s}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x e^{-sx}}{s}\right] + \frac{2}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

Ako je $s > 0$, tada oba limesa gore teže nuli pa je

$$\mathcal{L}[x^2] = \frac{2}{s^3}, \quad s > 0.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cosh kx] &= L\left[\frac{1}{2}e^{kx} + \frac{1}{2}e^{-kx}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{kx}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-kx}] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{kx}(1)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{(-k)x}(1)] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-k} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-(-k)} \\ \mathcal{L}[\cosh kx] &= \frac{1}{2}\frac{(s+k)+(s-k)}{(s-k)(s+k)} = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-k^2} = \frac{s}{s^2-k^2}. \end{aligned}$$

♦

Primjer 4.1.4. *Odrediti* $\mathcal{L}[e^{-7x}x^2]$.

Rješenje. Kako je $\mathcal{L}[x^2] = \dfrac{2}{s^3}$, na osnovu Teorema 4.1.4 je $\mathcal{L}[e^{-7x}x^2] = \dfrac{2}{(s+7)^3}$. ♦

Konvolucija funkcija igra važnu ulogu u brojnim primjenama u različitim naučnim disciplinama. Njena važnost se posebno ogleda u izračunavanju inverzne Laplaceove transformacije, budući da ona predstavlja inverznu Laplaceovu transformaciju proizvoda dvaju orginala.

Definicija 4.1.5. *Neka su date dvije funkcije $f(x)$ i $g(x)$.* Konvolucija *funkcija $f(x)$ i $g(x)$ u oznaci $f(x) * g(x)$ definira se sa*

$$f(x) * g(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt, \quad x > 0.$$

Za konvoluciju vrijede sljedeće osobine:

1. $c(f * g) = cf * g = f * cg$
2. zakon *komutativnosti*
$$f * g = g * f,$$
3. zakon *asocijativnosti*
$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$
4. zakon *distributivnosti*
$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Dokažimo zakon asocijativnosti:

$$\begin{aligned}
f(x) * [g(x) * h(x)] =& \int_0^x f(t)(g * h)(x-t)dt \\
=& \int_0^x f(t) \left(\int_0^{x-t} g(v)h(x-t-v)dv \right) dt = |v = u - t| \\
=& \int_0^x f(t) \left(\int_0^x g(u-t)h(x-u)dv \right) dt = \\
=& \int_0^x \left(\int_0^u f(t)g(u-t)dt \right) h(x-u)du = \\
=& \int_0^x (f(u) * g(u))h(x-u)du = \\
=& [f(x) * g(x)] * h(x),
\end{aligned}$$

gdje smo izvršili izmjenu poretka integracije, pri kojoj (za fiksno t) oblast integracije: $0 \leq t \leq x \quad \text{i} \quad t \leq u \leq x$ prelazi (za fiksno u) u oblast integracije: $0 \leq u \leq x \quad \text{i} \quad 0 \leq t \leq u$.

Teorem 4.1.6 (Teorem o konvoluciji). *Ako su f i g po dijelovima neprekidne funkcije na $[0,\infty)$ i eksponencijalnog reda α, tada je*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)g(x-t)dt\right] = \mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]. \tag{4.4}$$

Dokaz. Prema definiciji Laplaceove transformacije, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g] =& \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)g(x-t)dt\right] = \\ =& \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right)dx.\end{aligned}$$

Ovo je dvostruki integral čija je oblast integracije : $D: 0 \leq x < \infty,\ \ 0 \leq t \leq x$ i gdje integral konvergira apsolutno. Zbog toga se na osnovu Fubinijevog teorema može zamijeniti poredak integracije, pri čemu je tada $D: 0 \leq t < \infty,\ \ t \leq x \leq \infty$, pa je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g] &= \int_0^\infty g(t)\int_t^\infty e^{-sx}f(x-t)dx = |u = x-t \Rightarrow x = u+t| \\ &= \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt\int_0^\infty e^{-su}f(u)du = \mathcal{L}[g]\mathcal{L}[f].\end{aligned}$$

□

Posljedica 4.1.1. *Ako su f i g po dijelovima neprekidne funkcije na $[0,\infty)$ i eksponencijalnog reda α, tada je*

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)F(s)] = \int_0^x f(t)g(x-t)dt,$$

gdje je $\mathcal{L}[f] = F$ i $\mathcal{L}[g] = G$.

Primjer 4.1.5. *Izračunati $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ ako je $H(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} =& \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \\ =& \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\cos ax]\cdot\mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{a}\right]\right] = \\ =& \cos ax * \frac{\sin ax}{a} = \int_0^x \cos at\cdot\frac{\sin a(x-t)}{a}dt = \\ =& \frac{1}{a}\int_0^x \cos at\cdot(sinax\cos at - \cos ax\sin at)dt \\ =& \frac{1}{2a}\sin ax\int_0^x(1+\cos 2at)dt - \frac{1}{2a}\cos ax\int_0^x \sin 2atdt = \\ =& \frac{x\sin ax}{2a}.\end{aligned}$$

Za određivanje $\mathcal{L}[\cos ax]$ i $\mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{a}\right]$ koristili smo Tabelu 4.1 imamo ♦

Primjer 4.1.6. *Izračunati* $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]$.

Rješenje. Da bismo našli $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]$, koristit ćemo definiciju. (Alternativno možemo primijeniti Teorem 4.1.6 za $g(t) = 1$.):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right] e^{-st}dt \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-st}}{-s}\right] + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Ako f ima eksponencijalni rast reda α, integral funkcije f također ima eksponencijalni rast reda α, pa je gornji limes nula. Prema tome

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

♦

Primjer 4.1.7. *Pokazati da je*

$$\mathcal{L}[e^{k_1 t} - e^{k_2 t}] = \frac{k_2 - k_1}{(s-k_1)(s-k_2)},$$

koristeći tablicu Laplaceovih transformacija.

Rješenje. Na osnovu formule (xv) iz Tablice 4.1, imamo

$$\mathcal{L}[e^{k_1 t} - e^{k_2 t}] = \mathcal{L}[e^{k_1 t}] - \mathcal{L}[e^{k_2 t}].$$

Dalje, primjenom formule (iv) dobivamo

$$\mathcal{L}[e^{k_1 t} - e^{k_2 t}] = \frac{1}{s-k_1} - \frac{1}{s-k_2} = \frac{s-k_2-(s-k_1)}{(s-k_1)(s-k_2)} = \frac{k_1-k_2}{(s-k_1)(s-k_2)}.$$

♦

Primjer 4.1.8. *Pokazati da je* $\mathcal{L}[t\sin kt] = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$.

Rješenje. Na osnovu formule (vi) je

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}. \tag{4.5}$$

Primjenom formule $(xviii)$ za $n = 1$ na jednadžbu (4.5) dobivamo:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \mathcal{L}[-t\sin kt] = -\mathcal{L}[t\sin kt].$$

Dakle,

$$\begin{aligned} -\frac{k(2s)}{(s^2+k^2)^2} &= -\mathcal{L}[t\sin kt] \\ \Rightarrow \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2} &= \mathcal{L}[t\sin kt]. \end{aligned}$$

♦

Primjer 4.1.9. *Odrediti* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}\right]$.

Rješenje. Razbijanjem funkcije na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)} = \frac{4}{s+4} + \frac{s-3}{s^2+4}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+4} + \frac{s-3}{s^2+4}\right] \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] \\ &= 4e^{-4x} + \cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x. \end{aligned}$$

♦

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 4.1.7. *Ako je $f(t)$ periodična funkcija perioda τ, tada je*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau}}\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt.$$

U Tabeli 4.1. su date Laplaceove transformacije nekih funkcija.

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
(i)	$\frac{1}{s},\ s>0$	1
(ii)	$\frac{1}{s^2},\ s>0$	t
(iii)	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$	$t^n,\ n=1,2,3,\ldots$
(iv)	$\frac{1}{s-k},\ s>k$	e^{kt}
(v)	$\frac{n!}{(s-k)^{n-1}},\ s>k$	$e^{kt}t^n,\ n=1,2,3\ldots$
(vi)	$\frac{k}{s^2+k^2},\ s>0$	$\sin kt$
(vii)	$\frac{s}{s^2+k^2},\ s>0$	$\cos kt$
$(viii)$	$\frac{m}{(s-k)^2+m^2},\ s>k$	$e^{kt}\sin mt$
(ix)	$\frac{s-k}{(s-k)^2+m^2},\ s>k$	$e^{kt}\cos mt$
(x)	$\frac{s}{s^2-k^2},\ s>k$	$\cosh kt$
(xi)	$\frac{k}{s^2-k^2},\ s>k$	$\sinh kt$
(xii)	$\frac{k_1-k_2}{(s-k_1)(s-k_2)},\ s>k_1,k_2$	$e^{k_1t}-e^{k_2t}$
$(xiii)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2},\ s>0$	$t\sin kt$
(xiv)	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2},\ s>0$	$t\cos kt$
(xv)	$c_1F(s)+c_2G(s)$	$c_1f(t)+c_2g(t)$
(xvi)	$F(s+k)$	$e^{-kt}f(t)$
$(xvii)$	$F(ks)$	$\frac{1}{k}f\left(\frac{1}{k}\right),\ k>0$
$(xviii)$	$F^{(n)}(s)$	$(-t)^nf(t)$
(xx)	$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(t)dt$
(xxi)	$\frac{1}{s^2}F(s)$	$\int_0^t\int_0^\tau f(u)dud\tau$
$(xxii)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)$	$f^{(n)}(t)$
$(xxii)$	$-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}(t)$
$(xxiii)$	$\frac{1-e^{s\tau}}{\int}\,{}_0^t\, e^{-st}f(t)dt$	$f(t)$ je τ periodična
$(xxiv)$	$\frac{ce^{-t_0s}}{s}$	$h_c(t-t_0)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad t<t_0\\ c & \text{ako} \quad t\geq t_0\end{cases}$
(xxv)	$e^{-st_0}F(s)$	$f(t-t_0)h_1(t-t_0)$
$(xxvi)$	e^{-st_0}	$\delta(t-t_0)$

4.2 Zadaci za samostalan rad

1. Koristeći definiciju pokazati da je:

   a) $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$,

   b) $\mathcal{L}[t^3] = \dfrac{3!}{s^4}$,

   c) $\mathcal{L}[\cos ct] = \dfrac{s}{s^2 + c^2}$,

   d) $\mathcal{L}[\sin ct] = \dfrac{c}{s^2 + c^2}$,

   e) $\mathcal{L}[e^{kt}] = \dfrac{1}{s - k}$, $s > k$,

   f) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2 + 16}\right]$,

   g) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s - 5}\right]$,

   h) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{5}{s^2 - 25}\right]$.

2. Naći Laplaceovu transformaciju sljedećih funkcija:

   a) $5 - 8t^2$,

   b) $\frac{1}{8} \cos \dfrac{3}{8} t$,

   c) $e^{(5/2)t} \cosh \dfrac{7}{2} t$,

   d) $e^{3t} \cos 2t - e^t \sinh 5t$,

   e) $t^2 \sin 4t$,

   f) $\int_0^t \cosh \tau \cos(t - \tau) d\tau$,

   g) $-t \int_0^t e^{-5(t-\tau)} \tau d\tau$

   h) $\int_0^{t^{2/3}} \tau^{1/2} e^{3/2\tau} \cos \tau^{3/2} d\tau$.

3. Naći inverznu Laplaceovu transformaciju funkcija:

   a) $\dfrac{2}{s^2 + k^2}$,

   b) $\dfrac{5s^2 + 6s + 4}{(s + 4)(s^2 + 4)}$,

   c) $\dfrac{2s - 5}{s(s^2 - 6s + 34)}$,

d) $\dfrac{s^2+3s+36}{s(s^2+13s+36)}$,

e) $\dfrac{s^2+2s+53}{(s+2)(s^2+49)}$,

f) $\dfrac{s^2-s+1}{s^3(s+1)}$,

g) $\dfrac{2s-3}{(s+1)^2+16}$,

h) $\dfrac{5s+7}{(s+3)^2-16}$.

4. Pokazati da je $\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$.

5. Ako je $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, dokazati da je $F(ks)=\dfrac{1}{k}\mathcal{L}\left[f\left(\dfrac{t}{k}\right)\right]$, gdje je $k>0$ konstanta.

6. Ako je $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, dokazati da je $\dfrac{d}{ds}F(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]$. (*Uputa:* staviti $t=ku$.)

7. Ako je n prirodan broj, dokazati da je $\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)=\mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$.

8. Dokazati da je $\mathcal{L}[t\cos kt]=\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

9. Dokazati da je $\mathcal{L}\left[\int_0^t\int_0^\tau f(u)dud\tau\right]=\dfrac{1}{s^2}F(s)$.

10. Dokazati da je $\mathcal{L}[e^{kt}\sin mt]=\dfrac{m}{(s-k)^2+m^2}$

11. Dokazati da je $\mathcal{L}[e^{kt}\cos mt]=\dfrac{s-k}{(s-k)^2+m^2}$.

12. Koristeći 4.1.7 izračunati $\mathcal{L}[\sin t]$, $\mathcal{L}[\cos t]$, $\mathcal{L}[\sin kt]$ i $\mathcal{L}[\cos kt]$.

4.3 Primjena Laplaceove transformacije na rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi i sistema sa konstantnim koeficijentima

Prvo ćemo pokazati kako se primjenjuje Laplaceova transformacija za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima, tj. jednadžbi oblika

$$p_1y^{(n)}+p_2y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x), \tag{4.6}$$

gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ konstante i $p_1 \neq 0$.

Prednost ovog metoda je u tome što odmah daje i partikularno rješenje koje zadovoljava date početne uvjete. Jednadžbu (4.6) pomnožimo sa e^{-sx} i integriramo u granicama od 0 do ∞. Imamo

$$\int_0^\infty e^{-sx}[p_1 y^{(n)} + p_2 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y]dx = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \ s > s_0, \tag{4.7}$$

što je ekvivalentno sa

$$p_1 \int_0^\infty e^{-sx} y^{(n)} dx + p_2 \int_0^\infty e^{-sx} y^{(n-1)} dx + \cdots + +p_{n-1} \int_0^\infty e^{-sx} y' dx$$
$$+ p_n \int_0^\infty e^{-sx} dx = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \quad s > s_0. \tag{4.8}$$

Primijetimo da je svaki integral u izrazu (4.7) Laplaceova transformacija odgovarajuće funkcije. Dakle, jednadžba (4.7) se može napisati u obliku

$$p_1 \mathcal{L}[y^{(n)}] + p_2 \mathcal{L}[y^{(n-1)}] + \cdots + p_{n-1}\mathcal{L}[y'] + p_n \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(x)], \ s > s_0. \tag{4.9}$$

Sada treba izračunati $\mathcal{L}[y^{(n)}]$. Imamo

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = \int_0^\infty e^{-sx} y(x)dx.$$

Ako je $n = 0$, dobivamo

$$\mathcal{L}[y] = \int_0^\infty e^{-sx} dx, \quad s > s_0$$

Ako je $n = 1$, dobivamo

$$\mathcal{L}[y'] = \int_0^\infty e^{-sx} y' dx, \quad s > s_0.$$

Parcijalnom integracijom, dobivamo

$$\mathcal{L}[y'] = \lim_{h \to \infty} [e^{-sh} y(h) - y(0)] + s \int_0^\infty e^{-sx} y dx, \quad s > s_0.$$

Sada zahtijevamo dodatni uvjet, a to je da rješenje $y(x)$ bude takvo da je

$$\lim_{x \to \infty} e^{-sx} y^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad s > s_0.$$

Imamo

$$\mathcal{L}[y'] = -y(0) + s\mathcal{L}[y]. \tag{4.10}$$

Ako je $n = 2$, onda dobivamo

$$\mathcal{L}[y''] = \int_0^\infty e^{-sx} y'' dx, \quad s > s_0.$$

Ovaj integral možemo izračunati tako što dva puta primijenimo parcijalnu integraciju, imamo

$$\mathcal{L}[y''] = -y'(0) + s(-y(0) + s\mathcal{L}[y]) = s^2\mathcal{L}[y] - [y'(0) + sy(0)].$$

Slično postupimo za ostale izvode. Općenito, dobivamo

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = s^n\mathcal{L}[y] - [y^{(n-1)}(0) + sy^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-2}y'(0) + s^{n-1}y(0)].$$

Sada sve uvrstimo u polaznu diferencijalnu jednadžbu (4.6) i grupišemo članove uz $\mathcal{L}[y]$, $y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$:

$$\begin{aligned}
[p_1 s^n + p_2 s^{n-1} + \cdots + p_{n-1}s + p_n]\mathcal{L}[y] \\
-[p_1 s^{n-1} + p_2 s^{n-2} + \cdots + p_{n-2}sp_{n-1}]y(0) \\
-[p_1 s^{n-2} + p_2 s^{n-3} + \cdots + p_{n-3}s + p_{n-2}]y'(0) \\
\cdots\cdots\cdots \\
-[p_1 s + p_2]y^{(n-2)}(0) \\
-p_1 y^{(n-1)}(0) = \mathcal{L}[f(x)].
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Pogledajmo izraze (4.11). $\mathcal{L}[y]$ je Laplaceova transformacija rješenja $y(x)$ koje još ne znamo, jer $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ su konstante date preko početnih uvjeta; $\mathcal{L}[f(x)]$ je Laplaceova transformacija funkcije $f(x)$.

Kao što postoje tablični integrali, tako postoji i tabela za Laplaceovu transformaciju $\mathcal{L}[f(x)]$. Kao što znamo $\mathcal{L}[f(x)]$ je funkcija od s. Sada ponovo pogledajmo izraze (4.11). Ako iz (4.11) izrazimo $\mathcal{L}[y]$, desna strana dobivene jednadžbe biće funkcija od s. Označimo tu funkciju sa $G(s)$. Sada se problem nalaženja partikularnog rješenja $y(x)$ svodi na problem nalaženja neprekidne funkcije y čija je Laplaceova transformacija upravo $G(s)$, tj. $\mathcal{L}[y] = G(s)$; $y = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$. Kratko rečeno, metod Laplaceove transformacije mijenja polaznu diferencijalnu jednadžbu u algebarsku jednadžbu koja uključuje funkciju od s.

Primjedba 4.3.1. *Ako su početni uvjeti dati u obliku $x = x_0 \neq 0$, uvijek je moguće translatirati ose stavljajući $x = \bar{x} + x_0$, tako da je $\bar{x} = 0$ za $x = x_0$. Data diferencijalna jednadžba može se riješiti po $\bar{x}$, a onda se izvrši zamjena x sa $x - x_0$.*

Primjer 4.3.1. *Koristeći metod Laplaceove transformacije riješiti Cauchyev problem*

$$y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2.$$

Rješenje.

$$\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0].$$

$$s\mathcal{L}[y] - y(0) + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0].$$

Odavde izračunamo $\mathcal{L}[y]$, (primijetimo da je $\mathcal{L}[0] = 0$) pa koristeći uvjet $y(0) = 2$, dobivamo

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s+2} \Rightarrow y = 2e^{-2x}.$$

♦

Primjer 4.3.2. Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeći Cauchyev problem

$$y'' + 2y' + y = 1,$$
$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = -2.$$

Rješenje. Imamo,

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1].$$

Odavde je

$$s^2\mathcal{L}[y] - y'(0) - sy(0) - 2y(0) + 2s\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1].$$

Kako je

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \; \mathcal{L}[e^{-x}] = \frac{1}{1+s}, \; \mathcal{L}[xe^{-x}] = \frac{1}{(s+1)^2},$$

imamo,

$$\mathcal{L}[1 + e^{-x} - xe^{-x}] = \frac{1}{s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Rješenje polazne jednadžbe je $y = 1 + e^{-x} - xe^{-x}$. ♦

Primjer 4.3.3. *Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeći Cauchyev problem*

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \tag{4.12}$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0. \tag{4.13}$$

Rješenje. Uzimajući Laplaceovu transformaciju jednadžbe (4.12), imamo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] &= \mathcal{L}[0] \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] &= 0 \\ \Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= 0, \end{aligned}$$

pri čemu je $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Uvrštavajući početne vrijednosti (4.13), dobivamo da je

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - s(1) - 0 - 3(sY(s) - 1) + 2Y9s) &= 0 \\ s^2Y(s) - s - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) &= 0 \\ (s^2 - 3s + 2)Y(s) &= s - 3 \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{s-3}{s^2 - 3s + 2} \\ \Rightarrow y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2 - 3s + 2}\right]. \end{aligned}$$

Razbijanjem date funkcije na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{s-3}{s^2-3s+2}+\frac{s-3}{(s-2)(s-1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-1}.$$

gdje je,

$$A=\left.\frac{s-3}{s-1}\right|_{s=2} \quad \text{i} \quad B=\left.\frac{s-3}{s-2}\right|_{s=1}=2.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)(s-1)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-2}+\frac{2}{s-1}\right]\\
&= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+2L{-}1\left[\frac{1}{s-1}\right]\\
&= -e^{2x}+2e^{x}.
\end{aligned}$$

Rješenje početnog problema je $y(x)=2e^x-e^{2x}$. ♦

Primjer 4.3.4. *Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeći Cauchyev problem*

$$\begin{aligned}
y''-5y'+6y &= te^{2t}+e^{3t}\\
y(0)=0,\quad y'(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Rješenje.

$$\mathcal{L}[y''-5y'+6y]=\mathcal{L}[te^{2t}+e^{3t}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y'']-5\mathcal{L}[y']+6\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[te^{2t}]+\mathcal{L}[e^{3t}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-sY(s)-y'0)-5[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-3}\Rightarrow$$

$$(s^2-5s+6)Y(s)-1=\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-3}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
Y(s)=&\frac{1}{(s^2-5s+6)(s-2)^2}+\frac{1}{(s^2-5s+6)(s-3)}+\frac{1}{s^2-5s+6}\\
=&\frac{1}{(s-2)^3(s-3)}+\frac{1}{(s-2)(s-3)^2}+\frac{1}{(s-2)(s-3)}\Rightarrow\\
y(x)=&\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3(s-3)}+\frac{1}{(s-2)(s-3)^2}+\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right]\\
=&\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2(s-3)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right].
\end{aligned}$$

Sada je,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-3)(s-2)}\right]=e^{3x}-e^{2x}.$$

Razbijanjem na parcijalne razlomke dobivamo:

$$\frac{1}{(s-2)^3(s-3)} = \frac{A}{(s-2)^3} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-3}$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)^2} = \frac{E}{s-2} + \frac{F}{s-3} + \frac{G}{(s-3)^2},$$

odakle se dobiva

$$A = \frac{1}{s-3}\Big|_{s=2} = -1, \quad D = \frac{1}{(s-2)^2}\Big|_{s=3}$$

$$E = \frac{1}{(s-3)^2}\Big|_{s=2} = 1, \quad G = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=3} = 1$$

i

$$C + D = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -D = -1$$

$$-3A + 6B - 12C - 8D = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1 + 12C + 8D + 3A}{6} = -1,$$

$$E + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -E = -1.$$

Na osnovu ovoga je,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s-2)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s-2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] \\ &+ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] + e^{3t} - e^{2t} \\ &= \frac{-e^{2t}x^2}{2!} + (-1)e^{2x}x + (-1)e^{2x} + e^{3x} + e^{2x} - e^{3x} + e^{3x}x + e^{3x} - e^{2x} \\ &= e^{2x}\left(-\frac{x^2}{2} - x - 1\right) + e^{3x}(x+1). \end{aligned}$$

♦

Primjer 4.3.5. *Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeći Cauchyev problem*

$$x_1' = -3x_1 + 4x_2 \tag{4.14}$$

$$x_2' = -2x_1 + 3x_2 \tag{4.15}$$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 3 \tag{4.16}$$

Rješenje. Uzimajući Laplaceovu transformaciju jednadžbe (4.14), dobivamo

$$sX_1(s) - x_1(0) = -3X_1(s) + 4X_2(s). \tag{4.17}$$

Uzimajući Laplaceovu transformaciju jednadžbe (4.15), dobivamo

$$sX_2(s) - x_2(0) = -2X_1(s) + 3X_2(s). \tag{4.18}$$

Koristeći početne vrijednosti (4.16), jednadžbe (4.17) i (4.18) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} (s+3)X_1(s) - 4X_2(s) &= -1 \\ 2X_1(s) + (s-3)X_2(s) &= 3. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Sistem (4.19) je linarni sistem po $X_1(s), X_2(s)$. Njegova rješenja su data sa

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{-s+15}{s^2-1} = -\frac{s}{s^2-1} + \frac{15}{s^2-1} \\ X_2(s) &= \frac{3s+11}{s^2-1} = 3\frac{s}{s^2-1} + \frac{11}{s^2-1}. \end{aligned}$$

Dakle, koristeći tablicu Laplaceove transformacije, imamo

$$\begin{aligned} x_1(x) &= -\cosh x + 15\sinh x \\ x_2(x) &= 3\cosh x + 11\sinh x, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1(x) &= 7e^x - 8e^{-x} \\ x_2(x) &= 7e^x - 4e^{-x}. \end{aligned}$$

♦

Primjer 4.3.6. *Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeći Cauchyev problem*

$$\begin{aligned} x'' &= 5x + 2x' + 2y \\ y' &= -5x - 2y + 1 \\ x(0) = 2, \quad x'(0) &= -\frac{2}{9}, \quad y(0) = -\frac{43}{9} \end{aligned}$$

Rješenje. Uzimajući Laplaceovu transforamciju obje strane jednadžbi sistema, koristeći početne vrijednosti, dobivamo

$$\begin{aligned} s^2X(s) - 2s + \frac{2}{9} &= 5X(s) + 2[sX(s) - 2] + 2Y(s) \\ sY(s) + \frac{43}{9} &= -5X(s) - 2Y(s) + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}(s^2-2s-5)X(s)-2Y(s) &= 2s-\frac{38}{9}\\ 5X(s)+(s+2)Y(s) &= \frac{1}{s}-\frac{43}{9}.\end{aligned}$$

Rješenja ovog sistema su

$$X(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{9s^2} \quad \text{i} \quad Y(s)=-\frac{43}{9s}+\frac{5}{9s^2},$$

pa je

$$x(t)=2-\frac{2}{9}t \quad \text{i} \quad y(t)=-\frac{43}{9}+\frac{5}{9}t.$$

♦

4.4 Zadaci za samostalan rad

1. Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeće Cauchyeve probleme:

   a) $y''+4y=4\cos 2t,\quad y(0)=0,\ y'(0)=6,$
   b) $y''+10y'+25y=2e^{-5t},\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1,$
   c) $y''+6y'-6y=\cos t+57\sin t,\quad y(0)=0,\ y'(0)=7,$
   d) $y''-y'+9y=27t,\quad y(0)=0,\ y'(0)=0,$
   e) $y''+2y'-15y=16te^{-t}-15,\quad y(0)=0,\ y'(0)=-9,$
   f) $y''+7y'+10y=3e^{-2t}-6e^{-5t},\quad y(0)=0,\ y'(0)=0,$
   g) $y''+4y'+5y=39e^{t}\sin t,\quad y(0)=-1,\ y'(0)=-1,$
   h) $y''+7y'+13y=13t+17+40\sin t,\quad y(0)=30,\ y'(0)=4.$

2. Koristeći metod Laplaceove transformacije, riješiti sljedeće probleme početnih vrijednosti:

   a) $x_1'=4x_1-x_2,\quad x_2'=2x_1+x_2,\quad x_1(0)=1,\quad x_2(0)=3,$
   b) $x_1'=4x_1-x_2+3e^{2t},\quad x_2'=2x_1+x_2+2t,\quad x_1(0)=-2,\quad x_2(0)=2,$
   c) $x_1'=3x_1-x_2,\quad x_2'=-x_1+2x_2-x_3,\quad x_3'=-x_2+3x_3,\quad x_1(0)=1,\quad x_2(0)=0,\quad x_3(0)=-1.$

Bibliografija

[1] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, 2008.

[2] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations: With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems* , Springer, 2009.

[3] R. P. Agarwal, S. R. Grace and D. ORegan, *Oscillation Theory for Second-Order Dynamic Equations*, Taylor and Francis, London, 2003. 316 References

[4] E. Akyildiz, Y.Akyildiz, S.Alpay, A.Erkip and A. Yazici, *Lecture on Differential Equations*, Matematik Yayinlari, 2000.

[5] Arnold V. I. *Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya*, 2–ye izd.,M.: Nauka, 1984.

[6] Bibikov YU. S. *Obshchiy kurs obyknovennykh differentsialnykh uravne- uravneniy*, L.: Izd–vo LGU. 1981.

[7] Bogdanov YU. S, Syroid 10. B. *Differentsialnyye uravneniya.* –Mn.: Vysh.shk., 1983.

[8] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Springer–Verlag, New York, 1977.

[9] N. Finizio and G. Ladas, *Ordinary Differential Equations With Modern Applications*, Wadsworth Pub. Co., 1989.

[10] Fedoryuk M. V. *Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya*, M.: Nauka, 1980.

[11] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley interscience, New York, 1969.

[12] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[13] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison Wesley, Reading, MA, 1969.

[14] M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.

[15] S. Janković, J. Knežević–Miljanović, *Diferencijalne jednačine, zadaci sa elementima teorije*, I deo, Matematički fakultet, Beograd, 2004.

[16] S. Janković, J. Knežević–Miljanović, *Diferencijalne jednačine II, zadaci sa elementima teorije*, Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[17] J. Kurzweil, *Ordinary Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 1986.

[18] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[19] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, and P. S. Simenov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[20] D. O'Regan, *Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1997.

[21] Matveyev N. M. *Differentsialnyye uravneniya*, 4–ye izd., Mn.: Vysh. shk., 1976..

[22] Matveyev N. M. *Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy*,4-ye izd.Mn.: Vysh. shk., 1974.

[23] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Laplaceova transformacija i primjene,* Print-Com, Tuzla, 2010.

[24] Petrovskiy I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsialnykh uravneniy,*6-ye izd. M.: Nauka, 1970..

[25] Pontryagin L. S. *Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya.*,4–ye izd., M.: Nauka, 1974.

[26] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, and G. Vidossich, *Ordinary Differential Equations in* $\mathbb{R}^n$, Springer–Verlag, New York, 1984.

[27] Samoylenko A. M., Krivosheya S. A., Perestyuk N. L. *Differentsialnyye uravneniya: Primery i zadachi*, Kiyev: Vishcha shk., 1984.

[28] Tikhonov A. N., Vasilyeva A. B., Sveshnikov A. G. *Differentsialnyye uravneniya*, M.: Nauka, 1980.

Indeks pojmova

Popis slika