Prof. dr. Mehmed Nurkanović

# Nelinearne diferentne jednadžbe koje se mogu transformirati u linearne

Navedimo općenitu definiciju diferentne jednadžbe. Naime, diferentnom jednadžbom $k$-tog reda nazivamo relaciju

$$F\left(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}\right) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Općenito gledajući, mnoge nelinearne diferentne jednadžbe ne mogu se riješiti eksplicitno. Međutim, nekoliko tipova nelinearnih diferentnih jednadžbi mogu se riješiti transformacijom u linearne diferentne jednadžbe. Razmotrimo neke od tih tipova diferentnih jednadžbi.

- **Tip I** *Riccatieva jednadžba*

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n}, \tag{1}$$

tako da je $c_n \neq 0,\ a_n d_n - b_n c_n \neq 0$ za sve $n \geqslant 0$.

Da bismo riješili ovu jednadžbu, stavimo

$$c_n x_n + d_n = \frac{y_{n+1}}{y_n}. \tag{2}$$

Zamjenom $x_n = \dfrac{y_{n+1}}{c_n y_n} - \dfrac{d_n}{c_n}$ u (1), dobijamo:

$$\frac{y_{n+2}}{c_{n+1} y_{n+1}} - \frac{d_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{a_n \left[\frac{y_{n+1}}{c_n y_n} - \frac{d_n}{c_n}\right] + b_n}{\frac{y_{n+1}}{y_n}}.$$

Ova jednadžba se transformira u linearnu jednadžbu oblika

$$y_{n+2} + p_1(n) y_{n+1} + p_2(n) y_n = 0, \quad y_0 = 1, y_1 = c_0 x_0 + d_0, \tag{3}$$

gdje je

$$p_1(n) = -\frac{c_n d_{n+1} + a_n c_{n+1}}{c_n},$$
$$p_2(n) = \left(a_n d_n - b_n c_n\right) \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

**Primjer 1** *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 4}{x_n - 1}.$$

**Rješenje.** Sada je $a = 2, b = 4, c = 1$ i $d = -1$, $ad - bc \neq 0$. Koristeći transformaciju

$$x_n - 1 = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \tag{4}$$

dobijamo

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = x_0 - 1$$

sa karakterističnim korijenima $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$. Odatle je

$$y_n = C_1 3^n + C_2 (-2)^n. \tag{5}$$

Iz formule (4) imamo opće rješenje date jednadžbe

$$x_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} + 1 = \frac{C_1 3^{n+1} + C_2(-2)^{n+1}}{C_1 3^n + C_2(-2)^n} + 1$$
$$= \frac{4C_1 3^n - C_2(-2)^n}{C_1 3^n + C_2(-2)^n} = \frac{4 \cdot 3^n - C(-2)^n}{3^n + C(-2)^n},$$

gdje je $C = \frac{C_2}{C_1}$ proizvoljna konstanta. Naravno, budući da smo pri dobijanju općeg rješenja $x_n$ koristili dijeljenje konstante $C_2$ konstantom $C_1$, morali smo podrazumijevati da je $C_1 \neq 0$. Preostaje još da zaključimo da se u slučaju kada je $C_1 = 0$ dobija još jedno (tzv. singularno) rješenje date nam jednadžbe, a to je niz $x_n = -1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, to jest konstantan niz. ♣

**Primjedba 2** *Kao specijalan slučaj Riccatieve jednadžbe (1) javlja se jednadžba*

$$x_{n+1}x_n + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0.$$

*Zaista, odavde je*

$$x_{n+1} = \frac{-q_n x_n}{p_n + x_n}.$$

**Primjer 3** ***(Pielouova logistička jednadžba)*** *Najpopularniji kontinuirani model rasta stanovništva je dobro poznata Verhulst-Pearlova jednadžba data sa:*

$$x'(t) = x(t)[a - bx(t)], \quad a, b > 0 \tag{6}$$

*gdje je $x(t)$ veličina populacije u vremenu $t$; $a$ je stopa prirasta populacije ako su izvori bili neograničeni i pojedinci nisu uticali jedan na drugog, dok $-bx^2(t)$ predstavlja negativni utjecaj na rast zbog preopterećenosti ograničenih izvora.*

Rješenje diferencijalne jednadžbe (6) je dato sa

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + (e^{-at}/cb)}.$$

Sada je

$$x(t+1) = \frac{a/b}{1 + (e^{-a(t+1)}/cb)} = \frac{e^a(a/b)}{1 + (e^{-at})/cb) + (e^a - 1)}.$$

Dijeljenjem sa $[1 + (e^{-at}/cb)]$, dobijamo

$$x(t+1) = \frac{e^a x(t)}{1 + \frac{b}{a}(e^a - 1)x(t)},$$

ili

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}, \tag{7}$$

gdje je $\alpha = e^a$ i $\beta = \frac{b}{a}(e^a - 1)$.
Na taj način dobili smo diferentnu jednadžbu poznatu kao **Beverton-Holtova** ili **Pielouova logistička jednadžba**. Jednadžba (7) je tipa Riccatieve jednadžbe i može se riješiti stavljajući da je $x_n = \dfrac{1}{y_n}$. Ovo nam daje jednadžbu:

$$y_{n+1} = \frac{1}{\alpha} y_n + \frac{\beta}{\alpha},$$

čije je rješenje

$$y_n = \begin{cases} [c - \frac{\beta}{\alpha - 1}]\alpha^{-n} + (\frac{\beta}{\alpha - 1}), & \text{ako je } \alpha \neq 1; \\ c + \beta n, & \text{ako je } \alpha = 1. \end{cases}.$$

Prema tome,

$$x_n = \begin{cases} \alpha^n(\alpha - 1)/[\beta\alpha^n + c(\alpha - 1) - \beta], & \text{ako je } \alpha \neq 1; \\ \frac{1}{c + \beta n}, & \text{ako je } \alpha = 1. \end{cases}.$$

Odavde slijedi

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \begin{cases} (\alpha-1)/\beta, & \text{ako je } \alpha > 1; \\ 0, & \text{ako je } \alpha \le 1. \end{cases}$$

Ovaj zaključak nam pokazuje da je tačka ekvilibriuma $\dfrac{\alpha-1}{\beta}$ globalni atraktor ako je $\alpha > 1$. ♣

**Tip II** *Homogena diferentna jednadžba* tipa:

$$f\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, n\right) = 0.$$

Koristeći transformaciju $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, ova jednadžba prelazi u linearnu diferentnu jednadžbu koja se može riješiti.

**Primjer 4** *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}x_n - 3x_n^2 = 0.$$

**Rješenje**. Dijeljenjem sa $x_n^2$, data jednadžba postaje

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 + 2\frac{x_{n+1}}{x_n} - 3 = 0. \tag{8}$$

Uvodeći smjenu: $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ u (8), dobijamo:

$$y_n^2 + 2y_n - 3 = 0,$$

$$(y_n + 3)(y_n - 1) = 0,$$

a odavde je $y_n = -3$ ili $y_n = 1$, što implicira

$$x_{n+1} = -3x_n \quad \text{ili} \quad x_{n+1} = x_n.$$

Dakle, $x_n = (-3)^n x_0$ ili $x_n = x_0 \quad (n = 1, 2, 3, ...)$. ♣

**Tip III** *Diferentna jednadžba oblika*

$$(x_{n+k})^{r_1}(x_{n+k-1})^{r_2}\cdots(x_n)^{r_{k+1}} = b_n. \tag{9}$$

Uzmemo li da je $y_n = \ln x_n$, nakon sređivanja dobijamo linearnu jednadžbu

$$r_1 y_{n+k} + r_2 y_{n+k-1} + \ldots + r_{k+1} y_n = \ln b_n. \tag{10}$$

**Primjer 5** *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^3}{x_n^2}. \tag{11}$$

**Rješenje**. Nakon logaritmiranja jednadžbe (11), uvedimo smjenu $y_n = \ln x_n$ Tada dobijamo:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

Karakteristični korijeni su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, pa je:

$$y_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n.$$

Prema tome,

$$x_n = c_1 e^{c_2 \cdot 2^n}, \quad c_1 > 0. \quad ♣$$

- **Tip IV** *Clairautova jednadžba*

$$x_n = n\Delta x_n + f(\Delta x_n), \tag{12}$$

gdje je $f$ neka nelinearna funkcija.

Uvođenjem smjene $y_n = \Delta x_n$ u (12), dobija se

$$x_n = ny_n + f(y_n), \tag{13}$$

a djelovanjem diferentnog operatora na obje strane jednadžbe (13),

$$\Delta x_n = y_n = (n+1)\, y_{n+1} - ny_n + f(y_{n+1}) - f(y_n). \tag{14}$$

Koristeći činjenicu da je

$$(n+1)\, y_{n+1} = (n+1)\,\Delta y_n + (n+1)\, y_n,$$
$$y_{n+1} = \Delta y_n + y_n,$$

iz (14) imamo

$$(n+1)\,\Delta y_n + f(y_n + \Delta y_n) - f(y_n) = 0.$$

Odavde slijedi

$$\Delta y_n = 0, \tag{15}$$

ili

$$n + 1 + \frac{f(y_n + \Delta y_n) - f(y_n)}{\Delta y_n} = 0. \tag{16}$$

Prva mogućnost (15) daje

$$y_n = c \quad (c \text{ je konstanta}),$$

pa iz (13) slijedi jedno moguće rješenje jednadžbe (12):

$$x_n = nc + f(c).$$

Druga mogućnost, jednakost (16), dovest će nas do drugog rješenja jednadžbe (12).

**Primjer 6** *Riješiti jednadžbu*

$$x_n = n\Delta x_n + (\Delta x_n)^2.$$

**Rješenje**. Data jednadžba je očito Clairautovog tipa, gdje je $f(\Delta x_n) = (\Delta x_n)^2$. Uvođenjem smjene $y_n = \Delta x_n$ , dobija se

$$x_n = ny_n + (y_n)^2,$$

odakle, djelovanjem operatora $\Delta$, imamo

$$(n+1)\,\Delta y_n + 2y_n \Delta y_n + (\Delta y_n)^2 = 0.$$

Odavde slijedi da je ili

$$\Delta y_n = 0 \quad \text{i} \quad x_n = nc + c^2,$$

ili je

$$\Delta y_n + 2y_n + n + 1 = y_{n+1} + y_n + n + 1 = 0.$$

Rješenje posljednje jednadžbe je

$$y_n = c\,(-1)^n - \frac{n}{2} - \frac{1}{4},$$

a to daje drugo rješenje date jednadžbe

$$x_n = \left[c\,(-1)^n - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{n^2}{4}. \qquad \clubsuit$$

- **Tip V** *Razni tipovi.*

Ovdje ćemo navesti nekoliko primjera nekih drugih nelinearnih jednadžbi koje se mogu transformirati u linearne.

**Primjer 7** *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2}x_{n+1}x_n = A^2\left(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n\right),$$

*gdje je $A$ data konstanta.*

**Rješenje**. Koristit ćemo sljedeću činjenicu iz trigonometrije

$$\begin{aligned}\tan a \tan b \tan c &= \tan a + \tan b + \tan c \\ &\Rightarrow \tan\left(a+b+c\right) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b\left(1+\tan c\right)} = 0.\end{aligned}$$

To nam sugerira da u datoj jednadžbi uvedemo smjenu

$$x_n = A\tan y_n,$$

nakon čega se dobije

$$\tan\left(y_{n+2} + y_{n+1} + y_n\right) = 0,$$

odnosno,

$$y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = n\pi, \quad \left(n \in \mathbb{Z}\right).$$

Dobili smo linearnu diferentnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima, koju znamo riješiti. Njeno rješenje je

$$y_n = C_1\cos\frac{2n\pi}{3} + C_2\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{\left(n-1\right)\pi}{3}.$$

Konačno je

$$x_n = A\tan\left[C_1\cos\frac{2n\pi}{3} + C_2\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{\left(n-1\right)\pi}{3}\right]. \qquad \clubsuit$$

**Primjer 8** *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

**Rješenje**. Data se jednadžba može napisati u obliku

$$x_n^2 = \frac{1 + x_{n+1}}{2}, \tag{17}$$

što nas podsjeća na poznatu relaciju

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Zbog toga uvedimo smjenu $x_n = \cos y_n$. Iz (17) dobijamo

$$\cos^2 y_n = \frac{1+\cos y_{n+1}}{2},$$

odnosno,

$$\cos y_{n+1} = \cos 2y_n,$$

odakle je

$$y_{n+1} = 2y_n + 2k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Rješavanjem ove linearne jednadžbe prvog reda i vraćanjem smjene varijabli, konačno se dobije rješenje polazne jednadžbe

$$x_n = \cos\left(c \cdot 2^n\right), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gdje je $c$ proizvoljna konstanta. $\clubsuit$

**Primjer 9** *a) Riješiti nelinearnu diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

*uz početne uvjete $x_0 = a$.*

*b) Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

**Rješenje**: *a)* Jednadžbu (18) možemo napisati u obliku

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}. \tag{14}$$

Smjenom

$$x_n = \coth t_n \quad (\coth t_n = \frac{e^{2t_n} + 1}{e^{2t_n} - 1})$$

jednadžbu (14) svodimo na

$$\begin{aligned}
\coth t_{n+1} &= \frac{\left(\frac{e^{2t_n}+1}{e^{2t_n}-1}\right)^2 + 1}{2\frac{e^{2t_n}+1}{e^{2t_n}-1}} \\
&= \frac{\left(e^{2t_n} + 1\right)^2 + \left(e^{2t_n} - 1\right)^2}{2\left(e^{2t_n} - 1\right)\left(e^{2t_n} + 1\right)} \\
&= \frac{e^{4t_n} + 1}{e^{4t_n} - 1} \\
&= \coth(2t_n).
\end{aligned}$$

Posljednja jednadžba ekvivalentna je sa

$$t_{n+1} = 2t_n,$$

odakle je

$$t_n = t_0 \cdot 2^n,$$

gdje je $t_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}$. Vratimo li smjenu, dobijamo da je rješenje promatrane jednadžbe (18) oblika

$$x_n = \coth(t_0 \cdot 2^n), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

*b)* Na osnovu rješenja pod a) postaje očito da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \coth(t_0 \cdot 2^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{t_0\cdot 2^{n+1}} + 1}{e^{t_0\cdot 2^{n+1}} - 1} = 1. \qquad \clubsuit$$

**Zadaci za vježbu:**
3.2.34, 3.2.40
i
3.3.39-3.3.47