Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Sistemi linearnih diferentnih jednadžbi - II

Neautonomni (vremenski varijantni) sistemi

Sistem oblika

$$X_{n+1} = A\,(n)\,X_n, \tag{1}$$

gdje je $A(n) = (a_{ij}(n))$ $k \times k$ nesingularna matrična funkcija, nazivamo *homogenim linearnim sistemom diferentnih jednadžbi* koji je ***neautonoman*** ili ***vremenski varijantan***.

Odgovarajući nehomogeni sistem je dat sa

$$X_{n+1} = A\,(n)\,X_n + B_n, \tag{2}$$

gdje je $B_n \in \mathbb{R}^k$.

Ako za neko $n_0 \geqslant 0$ specificiramo da je $X_{n_0} = \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)^T$, tada se sistem (1) zove problemom početnih vrijednosti (skr. PPV). Mi ćemo uglavnom koristiti da je $n_0 = 0$.

Teorem 1 *Za svako $X_{n_0} \in \mathbb{R}^k$ i $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ postoji jedinstveno rješenje X_n sistema diferentnih jednadžbi (1) oblika*

$$X_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] X_{n_0}, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Definicija 2 *Za rješenja $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k}$ sistema (1) se kaže da su **linearno nezavisna** za $n \geqslant n_0 \geqslant 0$ ako*

$$C_1 X_{n,1} + C_2 X_{n,2} + \ldots + C_k X_{n,k} = \mathbf{0},$$

za sve $n \geqslant n_0$, povlači da je $C_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Teorem 3 *Postoji k linearno nezavisnih rješenja sistema (1) za $n \geqslant n_0$.*

Lema 4 ***(Princip linearnosti)*** *Neka su $X_{n,1}$ i $X_{n,2}$ rješenja sistema (1), i neka je c konstanta. Tada vrijedi:*
i) $X_{n,1}$+$X_{n,2}$ je rješenje sistema (1),
ii) $cX_{n,1}$ je rješenje sistema (1).

Posljedica 1 *Skup S svih rješenja sistema (1) je vektorski prostor dimenzije k.*

Iz prethodnog slijedi da se bilo koje rješenje X_n sistema (1), odnosno proizvoljni elemenat vektorskog prostora S, može napisati kao linearna kombinacija vektora baze tog prostora. Dakle, bilo koju linearnu kombinaciju baze prostora S zvaćemo općim rješenjem sistema (1).

Definicija 5 *Pretpostavimo da je $\{X_{n,i} \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ linearno nezavisan skup rješenja sistema (1). Opće rješenje sistema (1) definira se sa*

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} C_i X_{n,i}\ , \tag{3}$$

gdje su $C_i \in \mathbb{R}$ i $C_1^2 + ... + C_k^2 \neq 0$.

Teorem 6 ***(Formula varijacije konstanti)*** *Jedinstveno rješenje problema početnih vrijednosti*

$$X_{n+1} = A(n)X_n + B_n, \quad X_{n_0} = \boldsymbol{\alpha} \tag{4}$$

dato je sa

$$X_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) \boldsymbol{\alpha} + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) B_r.$$

Posljedica 2 *Za autonomne sisteme, kada je A konstantna matrica, rješenje problema (4) je dato sa*

$$X_n = A^{n-n_0}\boldsymbol{\alpha} + \sum_{r=n_0}^{n-1} A^{n-r-1} B_r. \tag{5}$$

Primjer 7 *Riješiti sistem $X_{n+1} = AX_n + B_n$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Može se pokazati da je

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n-1} n & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

Iz toga slijedi, prema formuli (5),

$$\begin{aligned}
X_n &= A^n X_0 + \sum_{r=0}^{n-1} A^{n-r-1} B_r \\
&= \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n-1} n & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{bmatrix} (-1)^{n+r+1} & 0 \\ (-1)^{n+r}(n-r-1) & (-1)^{n+r+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{bmatrix} (-1)^{n+r+1} \\ (-1)^{n+r}(n-2r-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \sum\limits_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \\ \sum\limits_{r=0}^{n-1} (-1)^r (n-2r-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n - 1}{2} \\ -n\frac{(-1)^n - 1}{2} + (-1)^n n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2} \\ (-1)^{n+1} + n\frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \end{bmatrix}. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Sada ćemo pokazati kako se skalarna diferentna jednadžba k-tog reda može transformirati u k-dimenzionalni sistem diferentnih jednadžbi prvog reda. Naime, u skalarnoj diferentnoj jednadžbi k-tog reda

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = b_n \tag{6}$$

uvedimo smjene

$$\begin{aligned}
y_n^{(1)} &= x_n, \\
y_n^{(2)} &= x_{n+1} = y_{n+1}^{(1)}, \\
y_n^{(3)} &= x_{n+2} = y_{n+1}^{(2)}, \\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots \\
y_n^{(k)} &= x_{n+k-1} = y_{n+1}^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(1)} &= y_n^{(2)}, \\
y_{n+1}^{(2)} &= y_n^{(3)}, \\
\vdots &= \vdots \\
y_{n+1}^{(k-1)} &= y_n^{(k)}, \\
y_{n+1}^{(k)} &= -p_k(n)y_n^{(1)} - p_{k-1}(n)y_n^{(2)} - \ldots - p_1(n)y_n^{(k)} + b_n.
\end{aligned}$$

Primjedba 8 *Naravno, moguće je i obrnuto, tj. sistem od k linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda svesti na linearnu diferentnu jednadžbu k-tog reda.*

Primjer 9 *Svođenjem na linearnu diferentnu jednadžbu, riješiti sljedeći sistem diferentnih jednadžbi*

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} - v_n = 2n \\ -u_n + v_{n+1} = 2n+2 \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Rješenje. Iz druge jednadžbe dobijamo

$$u_n = v_{n+1} - 2n - 2,$$

a nakon uvrštavanja u prvu jednadžbu imamo

$$v_{n+2} - v_n = 4n + 4, \tag{7}$$

što je nehomogena linearna diferentna jednadžba drugog reda. Njena karakterisična jednadžba je

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

čiji su korijeni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, pa je njeno komplementarno rješenje

$$v_n^{(c)} = C_1 + C_2(-1)^n.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$v_n^{(p)} = a_1 n + a_2 n^2,$$

jer je $\lambda_1 = 1$ karakteristični korijen, a desna strana jednadžbe (7) se može napisati kao: $(4n+4) \cdot 1^n$. Zamjenom u jednadžbu (7), dobije se

$$v_n^{(p)} = n^2$$

pa je opće rješenje jednadžbe (7) dato sa

$$v_n = C_1 + C_2(-1)^n + n^2.$$

Vraćanjem smjene, imamo

$$u_n = C_1 + C_2(-1)^{n+1} + n^2 - 1. \qquad \clubsuit$$

Primjer 10 *Sljedeću diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^n$$

riješiti prevođenjem u odgovarajući sistem jednadžbi i rješavanjem tog sistema.

Rješenje. Uvedimo smjene

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= x_n, \\ y_n^{(2)} &= x_{n+1} = y_{n+1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Tako dobijemo sljedeći sistem diferentnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)} &= y_n^{(2)}. \\ y_{n+1}^{(2)} &= -2y_n^{(1)} + 3y_n^{(2)} + 2^n. \end{aligned}$$

Neka je $Y_n = \left[y_n^{(1)}, y_n^{(2)}\right]^T$, pa taj sistem možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$Y_{n+1} = AY_n + B_n,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 2^n \end{bmatrix}.$$

Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem dolazi se do matrice

$$A^n = \begin{bmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Prema tome, rješenje dobijenog sistema je dato sa

$$\begin{aligned} Y_n = \begin{bmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{bmatrix} &= A^n Y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} B_k \\ &= \begin{bmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+n\cdot 2^{n-1}-2^n \\ 1+n\cdot 2^n - 2^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odavde, vraćanjem smjene $y_n^{(1)} = x_n$ (i pri tome $y_0^{(1)} = x_0$ i $y_0^{(2)} = x_1$), dobijamo da je opće rješenje date diferentne jednadžbe

$$x_n = (2-2^n)x_0 + (2^n-1)x_1 + 1 + n\cdot 2^{n-1} - 2^n,$$

gdje su x_0 i x_1 proizvoljne konstante. ♣

Zadaci za vježbu:

4.2.6, 4.2.16-4.2.18

i

4.3.1-4.3.3, 4.3.18-4.3.21