JU UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA

Mubina Muratović

DIPLOMSKI RAD

Jensenova nejednakost i primjene

Tuzla, januar 2010. godine

Mentor rada: Dr. sci. Mehmed Nurkanović, vanredni profesor
Rad ima: 38 strana
Redni broj diplomskog rada:

REZIME:

Cilj ovog diplomskog rada je upoznati se sa Jensenovom nejednakošću i njenim primjenama pri dokazivanju različitih tipova nejednakosti.
Diplomski rad se sastoji od tri poglavlja.
Prvo poglavlje govori o konveksnim funkcijama i Jensenovoj nejednakosti.
U drugom poglavlju je riječ o posljedicama Jensenove nejednakosti tj. o nejednakostima koje direktno proizilaze iz Jensenove nejednakosti.
Treće poglavlje je rezervisano za primjenu Jensenove nejednakosti u rješavanju mnogih nejednakosti iz različitih oblasti matematike, s posebnim osvrtom na trigonometrijske nejednakosti.

SUMMARY:

The goal of this work for certificate degree is too meet Jensen's inequation and her usage to prove various types of inequations.
This work for certificate degree consist of three chapters.
The first chapter is about convex functions and Jensen's inequation.
The second chapter deals with Jensen's inequation consequences or about inequations directly derived from Jensen's inequation.
The third chapter is reserved for the usage of Jensen's inequation in order to solve many inequations from different mathematical areas with a special point of view on trigonometrical inequations.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Konveksne funkcije. Jensenova nejednakost **2**

1.1 Konveksne i konkavne funkcije 2
1.2 Konveksnost i diferencijabilnost 8
1.3 Nejednakosti vezane za konveksne funkcije 11
1.4 Jensenova nejednakost 12

2 Posljedice Jensenove nejednakosti **16**

3 Primjena Jensenove nejednakosti **24**

3.1 Konveksnost i konkavnost trigonometrijskih funkcija 24
3.2 Rješavanje trigonometrijskih nejednakosti 25
3.3 Rješavanje algebarskih nejednakosti 34

Literatura **39**

Uvod

Dokazivanje nejednakosti u matematici veoma je zanimljiv i kreativan posao. Pri tome dolaze do izražaja razne ideje koje često dovode do rezultata. Naravno, ko to želi realizirati mora biti solidno upućen u razna područja matematike i diferencijalnog računa.

U ovom diplomskom radu upoznat ćemo se sa Jensenovom nejednakošću koja često ima primjenu kod dokazivanja drugih nejednakosti.

Diplomski rad ima tri poglavlja.
Kako je formulacija Jensenove nejednakosti povezana sa konveksnim funkcijama, prvo ćemo definisati pojam konveksne funkcije i navesti njene osobine. Zatim ćemo govoriti o konveksnim (konkavnim) funkcijama koje su uz to još i diferencijabilne i još polazati da postoji bliska veza izmedju pojma konveksnosti (konkavnosti) i pojma izvoda.
Bitan dio ovog rada predstavljat će svakako teorem o Jensenovoj nejednakosti, kojeg ćemo formulisati i dokazati na dva načina.

Takodjer ćemo se pozabaviti nejednakostima koje direktno proizilaze iz Jensenove nejednakosti. Formulisat ćemo i dokazati težinsku nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine, Youngovu nejednakost, Hölderovu te nejednakost Minkowskog.

I najzad, pokazat ćemo kakvu primjenu ima Jensenova nejednakost.
Primjenu Jensenove nejednakosti u rješavanju trigonometrijskih i algebarskih nejednakosti ilustrirat ćemo kroz mnoštvo zadataka koji su prilagodjeni učenicima srednjih škola i studentima.

1 Konveksne funkcije. Jensenova nejednakost

1.1 Konveksne i konkavne funkcije

Prvi radovi s područja konveksnih funkcija potječu od nekoliko značajnijih matematičara prošlog i pretprošlog stoljeća. Tako se smatra da je austrijski matematičar O. Stolz (1842. – 1905.) u svom članku iz 1893. godine prvi uveo pojam konveksne funkcije. Medjutim, pravo značenje konveksnih funkcija iznio je tek danski matematičar J. L. W. V. Jensen (1859. – 1925.) u svojim člancima iz 1905. i 1906. godine.

Neka je (a, b) i interval realne prave i funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. **Grafik funkcije** f je skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \in (a, b), \quad y = f(x)\}.$$

Njenim **nadgrafom** nazvat ćemo skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \in (a, b), \quad y \geq f(x)\}.$$

Za funkciju f kažemo da je **konveksna** ako je konveksan dio njenog nadgrafika nad proizvoljnim segmentom $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.
Da bismo prethodnu geometrijsku definiciju iskazali u analitičkom obliku, pokazat ćemo da ako su x_1 i x_2 dvije proizvoljne tačke takve da je $x_1 < x_2$, tada tačka $x \in \mathbb{R}$ pripada segmentu$[x_1, x_2]$ ako i samo ako je

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Zaista ako je $\quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad i \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tada je

$$x_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x$$
$$x \leq \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 + \lambda_2)x_2 = x_2$$

Ovo znači da je

$$x \in [x_1, x_2].$$

Obrnuto, ako je $x \in [x_1, x_2]$, tada sistem

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

po (λ_1, λ_2) ima jedinstveno rješenje

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \qquad \textbf{i} \qquad \lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

pri čemu je očigledno $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$.

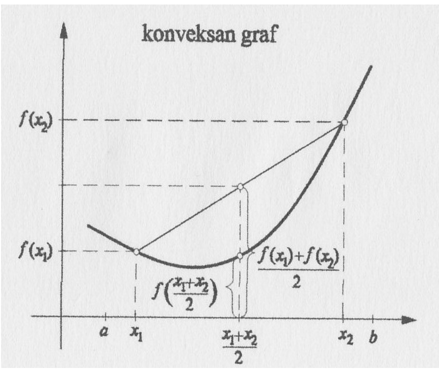
Definicija 1.1 *Realna funkcija f je **konveksna** na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ako je*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad (x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \tag{1}$$

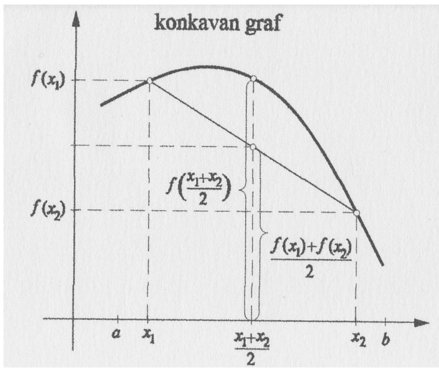
Definicija 1.2 *Realna funkcija f je **konkavna** na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ako je*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad (x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \tag{2}$$

Definicije 1. i 2. možemo zgodno interpretirati geometrijski na slijedeći način.



Sl.1



Sl.2

Ili u opštem slučaju

Definicija 1.3 *Za funkciju $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je **konveksna** ako za svake dvije tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ i za svaka dva nenegativna realna broja λ_1, λ_2 za koje je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ vrijedi*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

*Funkcija f je **konkavna** ako je funkcija $-f$ konveksna, tj. ako uvijek vrijedi* *obrnuta nejednakost*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Ako (pri uslovu $x_1 \neq x_2$) jednakost vrijedi samo u slučaju kad je $\lambda_1 = 0$ ili $\lambda_2 = 0$, za funkciju kažemo da je konveksna (tj. strogo konkavna).

Primjer 1.1 *Funkcija $f(x) = ax + b$ je konveksna (i konkavna) na realnoj pravoj jer je za $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ako vrijedi:*

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + b = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)b \\ &= \lambda_1(ax_1 + b) + \lambda_2(ax_2 + b) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Primjer 1.2 *(a) Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo konveksna na $\mathbb{R}$, što slijedi iz*

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lambda_1^2 x_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2^2 x_2^2 \\ &= \lambda_1(1-\lambda_2)x_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2(1-\lambda_1)x_2^2 \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1\lambda_2(x_1 - x_2)^2 < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \end{aligned}$$

za $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad i \quad x_1 \neq x_2$

(b) Funkcija $f(x) = x^3$ je konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$.
Konveksnost ćemo dokazati ukoliko dokažemo nejednakost

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 \leq \frac{x_1^3 + x_2^3}{2}, \qquad x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty\rangle$$

Data nejednakost ekvivalentna je redom slijedećim nejednakostima:

$$x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 \leq 4(x_1^3 + x_2^3),$$

$$0 \leq 3x_1^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 + 3x_2^3,$$

$$0 \leq (x + y)(x - y)^2.$$

Posljednja nejednakost je, zbog $x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty\rangle$, uvijek tačna, pa je tačna i njoj ekvivalentna polazna nejednakost. Jednakost važi ako i samo je $x_1 = x_2$. Analogno se pokazuje da je funkcija $f(x) = x^3$ konkavna na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$. $\blacktriangle$

Primjer 1.3 *Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ je konkavna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Konkavnost ćemo dokazati ukoliko dokažemo nejednakost*

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2}, \qquad x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty \rangle$$

Data nejednakost ekvivalentna je redom slijedećim nejednakostima:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2}{4},$$

$$2(x_1 + x_2) \geq x_1 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2,$$

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geq 0,$$

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$$

Posljednja nejednakost je uvijek tačna za $x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty \rangle$, pa je tačna i njoj ekvivalentna polazna nejednakost. ▲

Prije nego što dokažemo neke osobine konveksnih funkcija navest ćemo jednu preformulaciju uslova konveksnosti.

Lema 1.1 *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako za proizvoljne tačke $x_1, x_2, x \in (a, b)$, važi*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{3}$$

$\left(\textit{odnosno, } \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\right)$*. Analogno tvrdjenje važi za konkavne (strogo konkavne) funkcije.*

Dokaz
Neka je funkcija f konveksna i neka su $x_1, x_2, x \in (a, b)$, takvi da je $x_1 < x < x_2$. Napišimo x u obliku

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

tj.

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2.$$

Iz konveksnosti funkcije f slijedi nejednakost

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2), \end{aligned}$$

koju možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}_{1} f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2),$$

odakle se grupisanjem lahko dobije nejednakost (3). Lahko se dokazuje da vrijedi i obrnuto. za strogo konveksne, odnosno strogo konkavne funkcije, dokaz je analogan.⧫

Definicija 1.4 *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ i $x, y \in (a, b)$.* ***Podijeljena razlika*** *funkcije f u tačkama x, y je*

$$\Delta_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Podijeljena razlika je simetrična funkcija od x, y, tj. $\Delta_f(x, y) = \Delta_f(y, x)$.

Teorema 1.1 *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako je njena podijeljena razlika $\Delta_f(x, y)$ rastuća (strogo rastuća) po obje svoje promjenljive. Analogno važi za konkavne (strogo konakve) funkcije.*

Dokaz
Neka je funkcija f konveksna i neka su $x_1, x_2 \in (a, b)$ tako da je $x_1 < x_2$. Izaberimo proizvoljno $x \in (a, b)$ za koje je, npr. $x_1 < x < x_2$ (za ostale $x \in (a, b)$ dolaz je sličan). Prema prethodnoj lemi, iz konveksnosti funkcije f slijedi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Drugačije zapisano,

$$\Delta_f(x_1, x) = \Delta_f(x, x_1) \leq \Delta_f(x_2, x), \tag{4}$$

što znači da je funkcija Δ_f rastuća po svom prvom argumentu. Zbog njene simetričnosti, ona je rastuća i po svom drugom argumentu.
Obrnuto, ako je Δ_f rastuća po obje svoje promjenljive, tada za $x_1 < x < x_2$ važi nejednakost (4), odakle slijedi (3), dakle i konveksnost funkcije f na (a, b).♦

Teorema 1.2 *Ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna, tada je f neprekidna na (a, b).*

Dokaz
Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna i neka je $x_0 \in (a, b)$. Za fiksirano $y \in (a, b), \Delta_f(y, x)$, posmatrano kao funkcija od $x \in (a, x_0)$, rastuća je (prema prethodnoj teoremi) i ograničena odozgo brojem $\Delta_f(y, x_0)$, pa postoji granična vrijednost

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \Delta_f(y, x)$$

i važi

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \Delta_f(y, x) \leq \Delta_f(y, x_0),$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{f(y) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)}{y - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

Odavde za $y \in (a, x_0)$ dobivamo

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0),$$

pa je

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Analogno se dokazuje da je i

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

pa je funkcija f neprekidna u (proizvoljnoj) tački x_0 intervala (a, b).♦

1.2 Konveksnost i diferencijabilnost

U ovom dijelu će biti riječi o konveksnim (konkavnim) funkcijama koje su uz to još i diferencijabilne i pokazat ćemo da postoji bliska veza izmedju pojma konveksnosti (konkavnosti) i pojma izvoda. Primijetimo prvo da ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u nekoj tački $x \in (a, b)$, onda je

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \Delta_f(y, x) \tag{5}$$

Teorema 1.3 *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna. Da bi f bila konveksna (strogo konveksna) u (a, b) potrebno je i dovoljno da f' raste (strogo raste)u (a, b).*

Dokaz
Izvest ćemo dokaz za slučaj kada je f konveksna funkcija (u slučaju stroge konveksnosti dokaz je analogan). Neka je f konveksna funkcija i neka su $x_1, x_2 \in (a, b)$, takve da je $x_1 < x_2$. Za proizvoljno $x \in (a, b)$ za koje je $x_1 < x < x_2$, prema teoremi 1.1 vrijedi

$$\Delta_f(x, x_1) \leq \Delta_f(x, x_2).$$

Odavde na osnovu (5), kada $x \to x_1$, dobivamo

$$f'(x_1) \leq \Delta_f(x_1, x_2),$$

a kada $x \to x_2$,

$$\Delta_f(x_2, x_1) \leq f'(x_2).$$

Dakle,

$$f'(x_1) \leq \Delta_f(x_1, x_2) \leq f'(x_2)$$

i funkcija f' je rastuća.

Obrnuto, pretpostavimo da f' raste i da su x_1, x_2, x proizvoljni brojevi iz intervala (a, b), tako da je $x_1 < x < x_2$. prema Lagrangeovoj teoremi o srednjoj vrijednosti, primijenjenoj na funkciji f na segmentu $[x_1, x]$, odnosno $[x, x_2]$, dobijamo

$$\Delta_f(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad x_1 < c_1 < x$$

odnosno

$$\Delta_f(x, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \qquad x < c_2 < x.$$

Kako je $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, to je

$$\Delta_f(x_1, x) \leq \Delta_f(x, x_2),$$

tj. ispunjena je nejednakost (4), što znači da je funkcija f konveksna.♦

Slično se pokazuje tvrdjenje da je diferencijabilna funkcija f konkavna (strogo konkavna) ako i samo ako izvod f' opada (strogo opada) na (a, b). Koristeći poznati kriterij monotonosti, odavde neposredno dobivamo slijedeću tvrdnju.

Teorema 1.4 *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ima u svakoj tački $x \in (a, b)$ drugi izvod. Da bi f bila konveksna (konkavna) na (a, b), potrebno je i dovoljno da bude $f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$. Ako je $f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0)$ za $x \in (a, b)$, tada je f strogo konveksna (strogo konkavna) na (a, b).*♦

Primjedba 1.1 *Ako je f strogo konveksna na (a, b), nije obavezno $f''(x) > 0$ za $x \in (a, b)$. Npr. funkcija $f(x) = x^4$ je strogo konveksna na $\mathbb{R}$, ali je $f''(x) = 12x^2$ i $f''(0) = 0$.*

Primjer 1.4 *Ispitati konveksnost funkcije $f(x) = x^\alpha$ na intervalu $(0, +\infty)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.*

Rješenje
Kako je

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2},$$

to je na tom intervalu $f''(x)$ uvijek stalnog znaka:

1. Za $\alpha < 0$ ili $\alpha > 1$, $f''(x) > 0$ pa je funkcija f strogo konveksna,
2. Za $0 < \alpha < 1$, $f''(x) < 0$ pa je funkcija f strogo konkavna.▲

Uslov konveksnosti diferencijabilne funkcije može se iskazati i na slijedeći način:

Teorema 1.5 *Diferencijabilna funkcija f na intervalu (a, b) je konveksna (konkavna) ako i samo ako tačke njenog grafika nisu ispod (iznad) tačaka tangente konstruisane u proizvoljnoj tački tog grafika. Funkcija je strogo konveksna (strogo konkavna) ako i samo ako su tačke njenog grafika iznad (ispod) tačaka tangente konstruisane u proizvoljnoj tački grafika, ne uključujući i* *tačku dodira.*

Dokaz

Pretpostavimo da je f konveksna. Neka je u proizvoljnoj tački $x_0 \in (a,b)$ povučena tangenta

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

na krivu $y = f(x)$. Dakle, tangenta na krivu povučena je u tački $(x_0, f(x_0))$. Za proizvoljno $x \in (a,b)$ vrijedi

$$f(x) - Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{6}$$

Ako primijenimo Lagrangeovu teoremu na funkciju f na intervalu $[x_0, x]$ (ili $[x, x_0]$), imamo da je

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

za neko c izmedju x_0 i x, pa (6) postaje

$$f(x) - Y(x) = \underbrace{(f'(c) - f'(x_0)}_{\geq 0}\underbrace{(x - x_0)}_{\geq 0}.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi da ako je f konveksna, tj. f' raste, onda je $f(x) - Y(x) \geq 0$, tj. tačke grafika funkcije f nisu ispod tačaka tangente povučene u proizvoljnoj tački $(x_0, f(x_0))$ tog grafika. Obrnuto vrijedi

$$f(x) - Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0,$$

onda je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \quad za \quad x_0 < x$$

i

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \quad za \quad x < x_0.$$

Za $x_1 < x < x_2$ iz prethodnog dobivamo

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2},$$

što znači da je funkcija f konveksna na (a,b).♦

1.3 Nejednakosti vezane za konveksne funkcije

Prema samoj definiciji konveksnosti jasno je da je taj pojam usko vezan sa odredjenim tipom nejednakosti. Ustvari, čim za neku funkciju dokažemo (npr. pomoću izvoda) da je konveksna (konkavna), automatski dobijamo da važi odgovarajuća definiciona nejednakost. na ovaj način mogu se dokazati mnoge važne nejednakosti.

Primjer 1.5 *U primjeru 1.4 vidjeli smo da je funkcija* $f(x) = x^\alpha$ *na intervalu* $(0, +\infty)$ *strogo konveksna ako je* $a > 1$ *ili* $a < 0$, *a strogo konkavna ako je* $0 < a < 1$. Dakle, za $x_1, x_2 > 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad i \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ važe slijedeće nejednakosti:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^a \leq \lambda_1 x_1^a + \lambda_2 x_2^a, \quad za \quad a > 1 \tag{7}$$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^a \geq \lambda_1 x_1^a + \lambda_2 x_2^a, \quad za \quad 0 < a < 1$$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^a \leq \lambda_1 x_1^a + \lambda_2 x_2^a, \quad za \quad a < 0 \tag{8}$$

Ako u nejednakost (8) stavimo $a = -b$, $b > 0$, dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^b} \leq \lambda_1 \frac{1}{x_1^b} + \lambda_2 \frac{1}{x_2^b},$$

tj.

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^b \geq \frac{x_1^b x_2^b}{\lambda_1 x_2^b + \lambda_2 x_1^b}.$$

Kombinujući posljednju nejednakost sa (7), dobivamo da za $a > 1$ važi

$$\frac{x_1^a x_2^a}{\lambda_1 x_2^a + \lambda_2 x_1^a} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^a \geq \lambda_1 x_1^a + \lambda_2 x_2^a.$$

Npr. za $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ i $a = 2$ dobivamo dvostruku nejednakost

$$\sqrt{\frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}},$$

gdje desna nejednakost predstavlja nejednakost izmedju aritmetičke i kvadratne sredine dva pozitivna broja. ▲

1.4 Jensenova nejednakost

Konveksne funkcije definisane su nejednakošću

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

za $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 = 1$. Pokazat ćemo da odgovarajuća nejednakost važi i za kombinacije više sabiraka.

Teorema 1.6 ***(Jensenova[1] nejednakost)*** *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ nenegativni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$. tada za sve $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ vazi nejednakost*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \tag{9}$$

Ako je funkcija f strogo konveksna, tada jednakost važi ako i samo ako su svi x_i jednaki medju sobom ili su svi λ_i osim jednog jednaki 0.

Dokaz

Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom.
Za $n = 2$ tvrdjenje se svodi na definicionu nejednakost za konveksne funkcije i važi po pretpostavci.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljnih $n - 1$ brojeva x, intervala (a, b), i proizvoljnih $n - 1$ nenegativnih koeficijenata λ čiji je zbir 1.
Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ proizvoljni elementi iz (a, b) i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ nenegativni realni brojevi za koje je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Neka je $\mu = \lambda_2 + ... + \lambda_n$. Tada su $\frac{\lambda_2}{\mu}, ..., \frac{\lambda_n}{\mu}$ nenegativni brojevi čiji je zbir

[1] J. L. Jensen (1859. – 1925.), danski matematičar

1, pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) &= f\left(\lambda_1 x_1 + \mu\Big(\frac{\lambda_2}{\mu}x_2 + ... + \frac{\lambda_n}{\mu}x_n\Big)\right)\\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + \mu f\left(\frac{\lambda_2}{\mu}x_2 + ... + \frac{\lambda_n}{\mu}x_n\right)\\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + \mu\left[\frac{\lambda_2}{\mu}f(x_2) + ... + \frac{\lambda_n}{\mu}f(x_n)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),
\end{aligned}
$$

pri čemu prva nejednakost slijedi na osnovu definicione nejednakosti konveksnosti ($\lambda_1 + \mu = 1$), a druga po induktivnoj pretpostavci. Jednakost važi ako i samo ako su svi x_i jednaki medju sobom ili su svi λ_i osim jednog jednaki nuli. ⧫
Odgovarajuća funkcija važi za konkavne (strogo konkavne) funkcije.

Važi i slijedeća formulacija ovog teorema

Teorema 1.7 ***(Jensenova nejednakost)*** *(i) Ako je realna funkcija f konveksna na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $x_1, x_2, ..., x_n \in \langle a,b\rangle$, onda vrijedi nejednakost*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \tag{10}$$

(ii) Ako je realna funkcija f konkavna funkcija na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $x_1, x_2, ..., x_n \in \langle a,b\rangle$, onda vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \tag{11}$$

Dokaz
(i) Metodom matematičke indukcije najprije dokažimo tvrdnju za $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Za $k = 1$ nejednakost vrijedi prema definiciji konveksne funkcije.

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za $n = 2^k$, tj. da za sve $t_1, t_2, ..., t_{2^k} \in \langle a, b\rangle$ imamo

$$f\left(\frac{t_1 + t_2 + ... + t_{2^k}}{2^k}\right) \geq \frac{f(t_1) + f(t_2) + ... + f(t_{2^k})}{2^k} \tag{12}$$

i dokažimo da vrijedi i za $n = 2^{k+1}$.
Stavimo li $l = 2^k$, tada je $n = 2l$. Za sve $x_1, x_2, ..., x_n \in \langle a, b\rangle$,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) &= f\left(\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{2l} x_i\right)\\
&= f\left(\frac{\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_l}{l} + \dfrac{x_{l+1} + x_{l+2} + ... + x_{2l}}{l}}{2}\right)\\
&\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2}\left(f\Big(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} x_i\Big) + f\Big(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} x_{l+i}\Big)\right)\\
&\overset{(12)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} f(x_i) + \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} f(x_{l+i})\right)\\
&= \frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{2l} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).
\end{aligned}$$

Ako (10) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi i za $n - 1$. Naime, tada je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \leq$$

$$\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + f\Big(\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n-1}\Big)}{n}$$

Odakle se sredjivanjem dobije

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n-1}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})}{n-1}.$$

Tako smo tzv. povratnom ili regresivnom indukcijom dokazali Jensenovu nejednakost za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Iz definicije 1.1 i definicije 1.3 direktno slijedi da je f konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $-f$ konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Stoga je dovoljno primijeniti (2) na funkciju $-f$. ♦

2 Posljedice Jensenove nejednakosti

Kao direktna posljedica Jensenove nejednakosti slijede mnoge danas poznate nejednakosti, kao npr. težinska nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine, Youngova nejednakost, Hölderova nejednakost, nejednakost Minkowskog i mnoge druge. U nastavku ćemo neke od njih navesti i dokazati.

Posljedica 2.1 ***(Težinska nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine)*** *Ako su x_i pozitivni, a λ_i nenegativni realni brojevi, gdje $i = 1, ..., n$ i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tada važi*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n.$$

Jednakost važ i ako i samo ako su svi x_i jednaki medju sobom, ili su svi λ_i osim jednog jednaki nuli. Specijalno, ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$, dobivamo klasičnu nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine za n nenegativnih brojeva

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Dokaz
Primjenjujući Jensenovu nejednakost na strogo konveksnu funkciju $f(x) = e^x$ i brojeve $\ln x_1, ..., \ln x_n$, dobivamo

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} &= \prod_{i=1}^{n} e^{\ln x_i^{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \ln x_i} \\ &= e^{\lambda_1 \ln x_1} ... e^{\lambda_n \ln x_n} = {}^{\lambda_1 \ln x_1 + ... + \lambda_n \ln x_n} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i} \overset{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\ln x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i . \blacklozenge \end{aligned}$$

Ako su x_i pozitivni brojevi, primjenjujući nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine na brojeve $\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}$ dobivamo **težinsku nejednakost**

izmedju geometrijske i harmonijske sredine

$$\frac{1}{\frac{\lambda_1}{x_1}+\frac{\lambda_1}{x_2}+...+\frac{\lambda_1}{x_n}} \leq x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_n^{\lambda_n}$$

odnosno njenu klasičnu varijantu (za $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

Posljedica 2.2 *Ako su x_i pozitivni, a λ_i nenegativni realni brojevi, $i = 1,...,n$, i nisu svi λ_i jednaki nuli, tada važi*

$$\left(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}} \leq \frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}$$

Jednakost važi ako i samo ako su svi x_i jednaki medju sobom ili su svi λ_i osim jednog jednaki nuli.

Dokaz
Dokaz je isti kao u prethodnoj posljedici, osim što brojeve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ treba zamijeniti brojevima $\frac{\lambda_1}{\Lambda}, \frac{\lambda_2}{\Lambda}, ..., \frac{\lambda_n}{\Lambda}$, gdje je

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n. \blacklozenge$$

Slično se može preformulisati i težinska nejednakost harmonijske i geometrijske sredine. Ove nejednakosti imaju više primjena, kao što ćemo vidjeti u slijedećim primjerima.

Primjer 2.1 *Funkcija $f(x) = x^a$ za $a > 1$ je strogo konveksna na intervalu $(0, +\infty)$. Za $a = 2$ ona je konveksna na $\mathbb{R}$, pa za prozvoljne realne brojeve $x_1, ..., x_n$ i nenegativne $\lambda_1, ..., \lambda_n$ za koje je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, važi **težinska nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine***

$$(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + ... + \lambda_nx_n)^2 \leq \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + ... + \lambda_nx_n^2.$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$, dobijamo njenu klasičnu varijantu

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}.$$

Jednakost važi ako i samo kao su svi x_i jednaki medjusobno.

Primjer 2.2 *Dokazati da za svaki prirodan broj n važi nejednakost*

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq 1^1 2^2 ... n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Rješenje

Primjenjujući težinsku nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine u obliku iz posljedice 2.2 na brojeve $x_i = \lambda_i, \quad i = 1, ..., n$ dobivamo

$$(1^1 2^2 ... n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3},$$

što je ekvivalentno desnoj od dvije nejednakosti koje dokazujemo. Slično se dobiva i lijeva nejednakost ako se koristi nejednakost izmedju harmonijske i geometrijske sredine. Jednakost važi ako i samo je $n = 1$. ▲

Primjer 2.3 *Neka su fiksirani pozitivni brojevi $a_1, ..., a_n$. Za $s \in \mathbb{R}$ definišimo pomoću*

$$M_s(a_1, ..., a_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^s + ... + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}, & za\ s \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 ... a_n} & , za\ s = 0, \end{cases}$$

sredinu reda s brojeva $a_1, ..., a_n$. tada $M_s(a_1, ..., a_n)$, kao funkcija od s, ima slijedeće osobine:

a) *funkcija $M_s(a_1, ..., a_n)$ je neprekidna u tački $s = 0$;*

b) *ako brojevi $a_1, ..., a_n$ nisu svi jednaki medjusobno, funkcija $M_s(a_1, ..., a_n)$ je strogo rastuća funkcija od s;*

c)

$$\lim_{s \to -\infty} M_s(a_1, ..., a_n) = \min(a_1, ..., a_n),$$
$$\lim_{s \to +\infty} M_s(a_1, ..., a_n) = \max(a_1, ..., a_n).$$

Harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina su sa $M_s(a_1, ..., a_n)$ povezane na slijedeći način

$$H_n(a_1, ..., a_n) = M_{-1}(a_1, ..., a_n),$$

$$\begin{aligned} G_n(a_1,...,a_n) &= M_0(a_1,...,a_n), \\ A_n(a_1,...,a_n) &= M_1(a_1,...,a_n), \\ K_n(a_1,...,a_n) &= M_2(a_1,...,a_n). \end{aligned}$$

Iz ovog primjera slijedi da je

$$M_{-1} \leq M_{-0} \leq M_1 \leq M_2,$$

tj.

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n.$$

Rješenje

a) Neka je $f(s) = \ln M_s(a_1,...,a_n) = \frac{1}{s} \ln \frac{a_1^s + ... + a_n^s}{n}$ za $s \neq 0$. Primjenom Lopitalovog pravila dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} f(s) &= \lim_{s\to 0} \frac{\ln \frac{a_1^s+...+a_n^s}{n}}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{n}{a_1^s+...+a_n^s} \cdot \frac{a_1^s \ln a_1+...+a_n^s \ln a_n}{n}}{1} \\ &= \frac{1}{n}(\ln a_1 + ... + \ln a_n) = \ln \sqrt[n]{a_1...a_n} \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{s\to 0} M_s(a_1,...,a_n) = e^{\lim_{s\to 0} f(s)} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1...a_n}} = \sqrt[n]{a_1...a_n} = M_0(a_1,...,a_n).$$

b) Neka je $r < s$ i neka su brojevi s i r pozitivni (za ostale slučajeve dokaz je sličan). Tada je $\frac{s}{r} > 1$, pa je funkcija

$$f(x) = x_{\frac{s}{r}}, \quad x > 0,$$

strogo konveksna. Na osnovu Jensenove nejednakosti,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

primijenjene na brojeve $x_i = a_i^r$ i koeficijente $\lambda_i = \frac{1}{n}$, dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{s}{r}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i^r)^{\frac{s}{r}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i)^s,$$

odnosno $M_r(a_1,...,a_n) \leq M_s(a_1,...,a_n)$. Jednakost važi ako i samo ako važi u Jensenovoj nejednakosti, tj. ako i samo ako je $a_1^r = ... = a_n^r$, što je zbog $r \neq 0$ ekvivalentno sa $a_1 = ... = a_n$.
c) Neka je $\max(a_1,...,a_n) = a_k$. Tada je

$$\frac{a_k}{n^{\frac{1}{s}}} \leq M_s(a_1,...,a_n) \leq a_k.$$

Kako je

$$\lim_{s\to\infty} n^{\frac{1}{s}} = 1, \quad \text{to je} \quad \lim_{s\to\infty} M_s(a_1,...,a_n) = a_k.$$

Slično se dokazuje i drugo tvrdjenje. ▲

Teorema 2.1 ***(Youngova[2] nejednakost)*** *Neka su $p,q \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ realni brojevi takvi da je*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

i x, y nenegativni realni brojevi.

(a) Ako je $p > 1$ i $q > 1$, tada važi nejednakost

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy; \tag{1}$$

(b) Ako je $p < 1, \quad x > 0, \quad y > 0$, Važi nejednakost

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \leq xy. \tag{2}$$

U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je $x^p = y^q$.

Dokaz
Posmatrajmo funkciju $f(x) = \ln x$ u oblasti $D = (0, +\infty)$. Kako je $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ za svako $x \in D$, prema definiciji konveksne funkcije, uzevši da je $\lambda_1 = \dfrac{1}{p}, \quad \lambda_2 = \dfrac{1}{q}, \quad x_1 = x^p, \quad x_2 = y^q$, dobija se

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln x^q = \ln xy,$$

[2]W.Young (1882 – 1946), engleski matematičar

odakle očigledno slijedi nejednakost (1). ♦

Teorema 2.2 ***(Hölderova*** [3] ***nejednakost)*** *Neka su* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *proizvoljne n-torke pozitivnih realnih brojeva i* $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *takvi da je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Tada*

(a) Ako su p, q *pozitivni važi nejednakost*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

(b) Ako je $p \in \mathbb{R}^-$ *ili* $q \in \mathbb{R}^-$*, važi obrnuta nejednakost tj.*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

U oba slučaja nejednakost vrijedi ako i samo su a^p *i* b^q *proporcionalni.*

Dokaz

(a) Označimo sa $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$ *i* $B = \sum_{k=1}^{n} b_k^q$. Nejednakost (3) može se zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^p}{A} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{b_k^q}{A} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 1$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ u oblasti $D = (0, +\infty)$. Kako je

$$f''(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)x^{\frac{1}{p}-2} = -\frac{1}{pq}x^{\frac{1}{p}-2} \leq 0, \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad x \in D,$$

f je konkavna funkcija u oblasti D. Zato ako primijenimo teorem 1.1, uzevši da je $\lambda_k = \frac{b_k^q}{B}$ i $x_k = \frac{a_k^p}{b_k^q}$, dobijamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^q}{B} \cdot \frac{a_k^p}{b_k^q} \right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^q}{B} \left(\frac{a_k^p}{b_k^q} \right)^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow \frac{1}{B^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{n} b_k^{q-\frac{q}{p}} \cdot a_k$$

[3] O. Hölder (1859-1937), njemački matematičar

Kako je $q - \frac{q}{p} = 1 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, iz prethodne nejednakosti slijedi

$$B^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(b) Pretpostavimo da je $p < 0$. Označimo sa $P = -\frac{p}{q} \quad \text{i} \quad Q = \frac{1}{q}$. Tada su P, Q pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$.
Sada možemo primijeniti nejednakost (3) dokazanu pod (a) na n-torke $u = (u_1, u_2, ..., u_n), \quad v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ pozitivnih realnih brojeva odredjenih sa $u_k = a_k^{-q}, \quad v_k = (a_k b_k)^q, \quad k = 1, ..., n$. Dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^q = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^P \right)^{\frac{1}{P}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^Q \right)^{\frac{1}{Q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{-\frac{q}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{q},$$

odakle slijedi nejednakost (4).♦

Teorema 2.3 ***(Nejednakost Minkowskog[4])*** *Neka su $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ proizvoljne n-torke pozitivnih realnih brojeva i $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.*

(a) Ako je $p > 1$ važi nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}; \tag{5}$$

(b) Ako je $p < 1$ i brojevi $a_k > 0, k = 1, 2, ..., n$, važi obrnuta nejednakost tj.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}; \tag{6}$$

U oba slučaja nejednakost važi ako i samo ako je $\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

[4] H. Minkowski (1864-1909), njemački matematičar

Dokaz
Pretpostavimo da nisu svi brojevi $x_k, y_k, \quad 1 \leq k \leq n$ jednaki nuli, jer u suprotnom nejednakost je trivijalna i neka je $q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ takav da je $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Ako na oba sabirka desnoj strani identiteta

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k + b_k)^{p-1}$$

primijenimo Hölderovu nejednakost, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p \quad &\leq \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \quad \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Kako je $(p-1)q = p$, dijeljenjem prethodne nejednakosti sa
$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, dobija se nejednakost (5).
Tvrdjenje pod (b) pokazuje se slično.♦

3 Primjene Jensenove nejednakosti

3.1 Konveksnost i konkavnost trigonometrijskih funkcija

Kada je riječ o trigonometrijskim funkcijama onda zbog njihove periodičnosti ne možemo govoriti općenito o konveksnosti ili konkavnosti. Medjutim, na pojedinim intervalima možemo promatrati konveksnost ili konkavnost trigonometrijskih funkcija. Tako imamo

Posljedica 3.1.1 *Funkcija* $f(x) = \sin x$ *je konkavna na intervalu* $[0, \pi]$.
Tvrdnja posljedice nam je lahko razumljiva sjetimo li se grafa sinusoide. Strogi dokaz nam daje teorem 1.4 prema kojem za $f(x) = \sin x$ *dobivamo* $f''(x) = -\sin x < 0,\ x \in [0, \pi]$.
Konkavnost smo elementarno mogli dokazati, ukoliko dokažemo nejednakost

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}, \qquad x_1, x_2 \in [0, \pi] \tag{1}$$

Posljedica 3.1.2 *Funkcija* $f(x) = \cos x$ *je konkavna na intervalu* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Slično kao kod posljedice 3.1.1

Posljedica 3.1.3 *Funkcija* $f(x) = tgx$ *je konveksna na intervalu* $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.
Prema teoremu 1.4 dobivamo $f''(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x} > 0$, *za* $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Kod većine težih i složenijih nejednakosti navedene posljedice nam ne mogu osigurati konveksnost ili konkavnost odredjene funkcije, jer se najčešće radi o kompoziciji funkcija ili kombinaciji različitih trigonometrijskih funkcija. Medjutim, uvijek vrijede teoremi o Jensenovoj nejednakosti pa njihovom upotrebom bez većih teškoća možemo riješiti širok spektar zadataka.

3.2 Rješavanje trigonometrijskih nejednakosti

Zadatak 3.1 *Neka su α, β, γ uglovi trougla. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6$$

Rješenje
Prema nejednakosti izmedju harmonijske i aritmetičke sredine je

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}} \leq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} \geq \frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \tag{2}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}$$

Kako su α, β, γ uglovi trougla odatle slijedi

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

pa je

$$\frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6 \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi za

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{\beta}{2} = \sin\dfrac{\gamma}{2}$, odakle je $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\gamma}{2}$ odnosno $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$. ■

Zadatak 3.2 *Neka su α, β, γ uglovi trougla. Dokažite da vrijedi*

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

Rješenje
Prema nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine,

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2} =$$
$$= 8\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 \leq 8\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^6$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

Stoga je

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

Jednakost vrijedi za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ $\blacksquare$.

Zadatak 3.3 *Neka su α, β, γ uglovi trougla. Dokazati da vrijedi*

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Rješenje
Iskoristimo nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine za pozitivne brojeve $\cos\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\gamma}{2}$, a zatim Jensenovu nejednakost za funkcije $f(x) = \cos x$ koja je konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Imamo

$$cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3$$

$$\leq \cos^3 \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Jednakost vrijedi za $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \cos\dfrac{\beta}{2} = \cos\dfrac{\gamma}{2}$ tj. za $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$ $\blacksquare$

Zadatak 3.4 *Neka su α, β, γ uglovi oštrouglog trougla. Dokazati da vrijedi*

$$tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma \geq 9$$

Rješenje
Prema nejednakosti izmedu kvadratne i aritmetičke sredine je

$$tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma \geq 3\Big(\frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}{3}\Big)^2$$

Funkcija $f(x) = tgx$ je konveksna na intervalu $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, pa je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}{3} \geq tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.5 *Dokazati da u oštrouglom trouglu vrijedi*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + tg\alpha + tg\beta + tg\gamma \geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right).$$

Rješenje
Uglovi α, β, γ su iz intervala $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \sin x + tgx, \qquad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Budući da je $f''(x) = \dfrac{2-\cos^3 x}{\cos^3 x}\sin x > 0, \quad$ za $\quad \forall x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, to je funkcija f strogo konveksna na intervalu $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, pa prema Jensenovoj nejednakosti imamo

$$\frac{(\sin\alpha + tg\alpha) + (\sin\beta + tg\beta) + (\sin\gamma + tg\gamma)}{3}$$

$$\geq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)+tg\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),$$

tj.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+tg\alpha+tg\beta+tg\gamma \geq 3\left(\sin\frac{\pi}{3}+tg\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}.\right). \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.6 *Neka su* $0 \leq \alpha_i \leq \dfrac{\pi}{2}, 1 \leq i \leq n$. *Dokazati nejednakosti*

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+...+\sin\alpha_n \leq n\cdot\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\right) \tag{4}$$

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot...\cdot\sin\alpha_n \leq \sin^n\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\right) \tag{5}$$

Rješenje
Za funkciju $f(\alpha_i)=\sin\alpha_i, 0<\alpha_i<\dfrac{\pi}{2}, i=1,...,n$ vrijedi $f''(\alpha_i)=-\sin\alpha_i<0$ tj. funkcija je konkavna pa nejednakost (4) dobijamo ako na funkciju $f(x)=\sin x$ primjenimo Jensenovu nejednakost.
Za nejednakost (5), takodjer prema Jensenovoj nejednakosti imamo

$$\ln(\sin\alpha_1)+\ln(\sin\alpha_2)+...+\ln(\sin\alpha_n) \leq n\cdot\ln\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\right)$$

tj.

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot...\cdot\sin\alpha_n \leq \sin^n\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\right)$$

jer je za $f(x)=\ln\sin x$ na intervalu $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right)=-\frac{1}{\sin^2 x}<0 \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.7 *Dokazati nejednakost*

$$\sqrt[44]{tg1^\circ \cdot tg2^\circ \cdot ... \cdot tg44^\circ} < tg22^\circ 30' < \frac{tg1^\circ + tg2^\circ + ... + tg44^\circ}{44}$$

Rješenje

Budući da je funkcija $f(x) = \ln tgx$ konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ jer je

$$f''(x) = (\ln tgx)'' = -4 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} < 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle,$$

to prema Jensenovoj nejednakosti možemo pisati

$$\ln tg1^\circ + \ln tg2^\circ + ... + \ln tg44^\circ \leq 44 \ln tg \left(\frac{1^\circ + 2^\circ + ... + 44^\circ}{44} \right),$$

$$\frac{1}{44} \ln(tg1^\circ \cdot tg2^\circ \cdot ... \cdot tg44^\circ) \leq \ln tg22^\circ 30'$$

te konačno dobivamo

$$\sqrt[44]{tg1^\circ \cdot tg2^\circ \cdot ... \cdot tg44^\circ} < tg22^\circ 30' \tag{6}$$

Zbog konveksnosti funkcije $g(x) = tgx$ (posljedica 3.1.3) na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$, prema Jensenovoj nejednakosti dobivamo

$$\frac{tg1^\circ + tg2^\circ + ... + tg44^\circ}{44} > tg \left(\frac{1^\circ + 2^\circ + ... + 44^\circ}{44} \right) = tg22^\circ 30' \tag{7}$$

Iz nejednakosti (6) i (7) direktno proizlazi tražena dvostruka nejednakost.
■

Zadatak 3.8 *Ako su* $x, y, z \in \mathbb{R}$ $\left(0 \leq x, y, z < \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ *dokazati nejednakost*

$$tg^n x \cdot tg^n y + tg^n y \cdot tg^n z + tg^n z \cdot tg^n x \geq \frac{1}{3^{n-1}} (tgx \cdot tgy + tgy \cdot tgz + tgz \cdot tgx)^n$$

Rješenje
Za $n = 1$ vrijedi jednakost. Neka je $n \geq 2$ i $f(x) = x^n$, $x > 0$
Budući da je $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $x > 0$, to možemo primijeniti Jensenovu nejednakost, te slijedi

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

a samim time i

$$\frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{3} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^n \tag{8}$$

Kako za brojeve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $0 \leq x, y, z < \frac{\pi}{2}$ to je $tgx \geq 0$, $tgy \geq 0$, $tgz \geq 0$.
Supstitucijom $x_1 = tgx \cdot tgy$, $x_2 = tgy \cdot tgz$, $x_2 = tgz \cdot tgx$ u nejednakost (8) dobivamo

$$\frac{tg^n x \cdot tg^n y + tg^n y \cdot tg^n z + tg^n z}{3} \geq \left(\frac{tgx \cdot tgy + tgy \cdot tgz + tgz \cdot tgx}{3}\right)^n$$

odakle slijedi tražena nejednakost. $\blacksquare$

Zadatak 3.9 *Neka su α, β, γ uglovi trougla i $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$ctg^n \frac{\alpha}{2} + ctg^n \frac{\beta}{2} + ctg^n \frac{\gamma}{2} \geq 3^{\frac{n+2}{2}}$$

Rješenje
Za funkciju $f(x) = ctg^n x$ dobivamo

$f''(x) = n(n-1)ctg^{n-2}x \cdot \dfrac{1}{\sin^4}x + 2nctg^{n-1}x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$, $\forall x$ i $n \in \mathbf{N}$ Budući da je funkcija $f(x)$ prema teoremu o konveksnosti konveksna iz Jensenove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} ctg^n\frac{\alpha}{2}+ctg^n\frac{\beta}{2}+ctg^n\frac{\gamma}{2} &= 3\left(\frac{1}{3}ctg^n\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}ctg^n\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}ctg^n\frac{\gamma}{2}\right)\\ &\geq 3ctg^n\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\\ &= 3ctg^n\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)=3ctg^n\frac{\pi}{6}=3^{\frac{n+2}{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Zadatak 3.10 *Nek su a, b, c dužine stranica, α, β, γ nasuprotni uglovi, a R poluprečmik opisane kružnice oštrouglog tougla. Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{\cos\alpha}+\frac{b^2}{\cos\beta}+\frac{c^2}{\cos\gamma}\geq 18R^2.$$

Rješenje

Kako je prema teoremu o sinusima

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

data nejednakost je ekvivalenta sa

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\geq\frac{9}{2}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Kako je

$$f'(x)=2\sin x+\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \quad i \quad f''(x)=2\cos x+\frac{3\sin^2 x}{\cos x}+\frac{2\sin^4 x}{\cos^3 x},$$

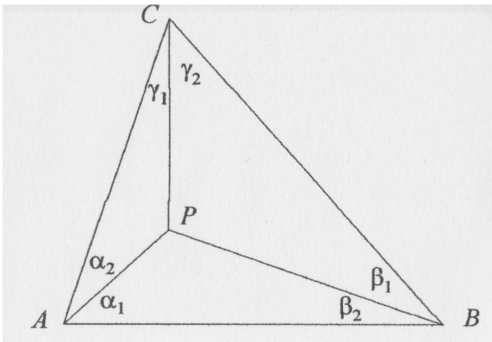
to je

$f''(x)>0$ za $x\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, pa je f konveksna na $\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\geq 3\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}=3\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{9}{2},$$

što je i trebalo dokazati. $\blacksquare$

Zadatak 3.11 *Neka je P unutrašnja tačka trougla ABC. Dokažite da je bar jedan od uglova $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ manji ili jednak* $30°$.



Sl.3

Rješenje
Označimo uglove ovako $\alpha_1 = \angle PAB$, $\beta_1 = \angle PBC$, $\gamma_1 = \angle PCA$, $\alpha_2 = \angle CAP$, $\beta_2 = \angle ABP$ i $\gamma_2 = \angle BCP$ (slika 3). Pretpostavimo suprotno tj. da su uglovi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ veći od $30°$. Kako je $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 180°$, tada je zbog $\alpha_1 > 30°$, $\beta_1 < 150°$ i $\gamma_1 < 150°$. Analogno, zbog $\beta_1 > 30°$ je $\alpha_1 < 150°$ i $\gamma_1 < 150°$, a zbog $\gamma_1 > 30°$ je $\alpha_1 < 150°$ i $\beta_1 < 150°$. Dakle, $30° < \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 < 150°$, pa je

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 > \frac{1}{8} \tag{9}$$

Dalje slijedi $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 90°$ i $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < 90°$. Prema nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine i Jensenovoj nejednakosti je

$$\begin{aligned}\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 &\leq \left(\frac{\sin\alpha_2 + \sin\beta_2 + \sin\gamma_2}{3}\right)^3 \\ &\leq \sin^3\frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3} \leq \sin^3 30° = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} \geq 8. \tag{10}$$

Množenjem (9) i (10) dobivamo

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} > 1 \tag{11}$$

Primjenom teorema o sinusima na trouglove ABP, BCP, CAP, redom dobivamo

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\mid PB\mid}{\mid PA\mid}\cdot\frac{\mid PC\mid}{\mid PB\mid}\cdot\frac{\mid PA\mid}{\mid PC\mid}=1,$$

što znači da (11) ne vrijedi. Dakle medju uglovima $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ koji postoji barem jedan koji nije veći od $30°$, čime smo dokazali tvrdnju zadatka. ■

Zadatak 3.12 *Neka su α,β,γ uglovi trougla. Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$$

Rješenje
Posmatrajmo funkciju

$$f(x)=tg^2\frac{x}{2},\quad x\in\langle 0,\pi\rangle.$$

Imamo

$$f'(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}},\quad \text{te}\quad f''(x)=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+3\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^4\frac{x}{2}}$$

Kako je $f''(x)>0$ za svako $x\in\langle 0,\pi\rangle$, to je f konveksna na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$. Stoga, na osnovu Jensenove nejednakosti imamo

$$\frac{1}{3}\left(tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}\right)\geq tg^2\left(\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}\right),\quad \text{tj.}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}\geq 3tg^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right).$$

Zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ vrijedi

$$tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}\geq 3tg^2\frac{\pi}{6},\quad \text{tj.}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1.\quad ■$$

3.3 Rješavanje algebarskih nejednakosti

Zadatak 3.1 *Dokazati da za svaki* $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ *vrijedi nejednakost*

$$x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}.$$

Rješenje
Za $x = 0$ data nejednakost očigledno vrijedi. Kako je funkcija $f(x) = x^5$ konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\left(\frac{x + (1-x)}{2}\right)^5 \leq \frac{x^5 + (1-x)^5}{2},$$

odakle slijedi

$$x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}. \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.2 *Neka su* a, b, c *pozitivni realni brojevi takvi da je* $a+b+c = 1$. *Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Rješenje
Posmatrajmo funkciju $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$. Kako je $f'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$, to je $f''(x) = 2\left(1 + \frac{3}{x^4}\right) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle f je konveksna na čitavoj domeni (a ne samo na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$). Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 3 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\right)^2$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right)^2 = 3 \cdot \frac{100}{9} = \frac{100}{3}. \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.3 *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Rješenje

Data nejednakost ekvivalenta je sa

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq \frac{a+b+c}{3} \ln(abc).$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x \ln x$. Kako je $f'(x) = \ln x + 1 \quad i \quad f''(x) = \frac{1}{x}$, to je $f''(x) > 0 \quad za \quad x > 0$, pa je f konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{a+b+c}{3} \ln \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3}$$

odakle dobivamo redom

$$(a+b+c) \ln \frac{a+b+c}{3} \leq \ln a^a + \ln b^b + \ln c^c,$$

$$\ln \Big(\frac{a+b+c}{3} \Big)^{a+b+c} \leq \ln(a^a b^b c^c),$$

$$\Big(\frac{a+b+c}{3} \Big)^{a+b+c} \leq a^a b^b c^c.$$

Kako je prema nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

konačno dobivamo

$$a^a b^b c^c \geq \big((abc)^{\frac{1}{3}} \big)^{a+b+c} = (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}. \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.4 *Neka su a, b, c dužine stranica trougla, a s njegov poluobim. Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq s,$$

Rješenje

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \dfrac{x^2}{2s - x}$. Kako je $f'(x) = \dfrac{4sx^2}{(2s-x)^2}$ i $f''(x) = \dfrac{8s^2}{(2s-x)^3}$, to je $f''(x) > 0$ za $0 < x < 2s$. Stoga je f konkavna na intervalu $\langle 0, 2s\rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{2s - \frac{a+b+c}{3}} \leq \frac{\frac{a^2}{2s-a} + \frac{b^2}{2s-b} + \frac{c^2}{2s-c}}{3}$$

odakle sredjivanjem dobivamo

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq s.$$

Jednakost vrijedi za jednakostraničan trougao.■

Zadatak 3.5 *Neka su a, b, c dužine stranica, a P površina trougla. Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Rješenje

Iz

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Kako je

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2},$$

to je

$$ab + bc + ca = 2P\Big(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\Big).$$

Stoga je

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2P\Big(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\Big).$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Vrijedi

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad i \quad f''(x) = \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x}$$

Kako je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \pi \rangle$, to je funkcija f konveksna na $x \in \langle 0, \pi \rangle$, pa prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}} \leq \frac{\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}}{3}.$$

Odatle dobivamo

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq 2\sqrt{3}.$$

Stoga je

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.6 *Neka je* $| x | \leq 1$ *i* $| y | \leq 1$. *Dokazati da vrijedi*

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

Rješenje
Posmatrajmo funkciju $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Vrijedi

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad i \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Kako je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle -1, 1 \rangle$, to je f konkavna na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti za sve $x, y \in \langle -1, 1 \rangle$ vrijedi

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}. \quad \blacksquare$$

Zadatak 3.7 *Neka su* $a_1, a_2, ..., a_n$ *pozitivni realni brojevi* $(n \geq 2)$ *takvi da vrijedi* $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. *Dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + ... + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + ... + a_n} + ... + \\ + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Rješenje

S obzirom da je $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$, datu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2 - a_k} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} \quad i \quad f''(x) = \frac{4}{(2-x)^3}$$

Kako je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, 1 \rangle$, to je f konveksna na $\langle 0, 1 \rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2 - a_k} \geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k}{2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{2 - \frac{1}{n} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n-1}{n}} = \frac{1}{2n-1}$$

odakle slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2 - a_k} \geq \frac{n}{2n-1}. \quad \blacksquare$$

Literatura

[1] Z. Kadelburg, D. Djukić, M. Lukić, I. Matić, *Nejednakosti*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.

[2] http://www.hrcak.hr - Ilija Ilišević, *Jensenova nejednakost*, Osječko matematički list 5 (2005)

[3] http://www.google.ba - Jelena Manojlović, *Nejednakosti i primene*, Prirodno-matematički fakultet, Niš

[4] http://www.google.ba - Marko Valčić, *Primjena Jensenove nejednakosti u trigonometriji*, Matematičko-fizički list, Hrvatsko matematičko i hrvatsko fizikalno društvo, 2006.

[5] http://www.hrcak.hr - Šefket Arslanagić i Alija Muminagić, *Više dokaza jedne poznate trigonometrijske nejednakosti u trokutu*, Osječko matematički list 8(2008)