Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Metod operatora

Ovaj metod u nekim situacijama daje najbrži način određivanja partikularnog rješenja nehomogene linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Osnovna ideja metoda je da, startajući od diferentne jednadžbe

$$P_k(E)x_n = r_n, \tag{1}$$

gdje je

$$P_k(E) = E^k + p_1E^{k-1} + p_2E^{k-2} + \ldots + p_kI,$$

određujemo partikularno rješenje pomoću relacije

$$x_n^{(p)} = [P_k(E)]^{-1} r_n.$$

Pri tome je $[P_k(E)]^{-1}$ inverzni operator operatora $P_k(E)$, to jest operator koji ima osobinu $[P_k(E)]^{-1} P_k(E)r_n = r_n$.

Teorem 1 *Operator $[P_k(E)]^{-1}$ je linearan.*

Teorem 2 *Neka je $P_k(b) \neq 0$. Tada je*

$$[P_k(E)]^{-1} b^n = \frac{b^n}{P_k(b)}. \tag{2}$$

Uočimo da se prethodni teorem može primijeniti i u slučajevima kada treba naći $[P_k(E)]^{-1} \sin\alpha n$ ili $[P_k(E)]^{-1} \cos\alpha n$. Dovoljno je napisati

$$\cos\alpha n = \frac{e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}}{2}, \quad \sin\alpha n = \frac{e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n}}{2i},$$

a onda primijeniti formulu (2) i linearnost operatora $[P_k(E)]^{-1}$.

Teorem 3 *Vrijedi relacija*

$$[P_k(E)]^{-1} b^n r_n = b^n [P_k(bE)]^{-1} r_n. \tag{3}$$

Primjer 4 *Odrediti $\left(E^2 - 4E + 4I\right)^{-1} 2^n$.*

Rješenje. Kako je $P_2(E) = E^2 - 4E + 4I$ i $P_2(2) = 0$, to se u ovom slučaju ne može primijeniti formula (2), jer nije zadovoljena pretpostavka Teorema 2. Međutim, možemo primijeniti formulu (3), uzimajući $r_n = 1$ i $b = 2$:

$$\begin{aligned}
[P_2(E)]^{-1} 2^n \cdot 1 &= 2^n [P_2(2E)]^{-1} (1) = 2^n \left[4E^2 - 8E + 4I\right]^{-1} (1) \\
&= 2^n \left[4(I+\Delta)^2 - 8(I+\Delta) + 4I\right]^{-1} (1) = 2^n \left[4\Delta^2\right]^{-1} (1) \\
&= \frac{2^n}{4}\Delta^{-1}\left[\Delta^{-1}(1)\right] = \frac{2^n}{4}\Delta^{-1}n^{(1)} + C_1 = \frac{2^n}{4}\frac{n^{(2)}}{2} + C_1n + C_2 \\
&= \frac{n(n-1)2^n}{8} + C_1n + C_2. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Na sljedećem primjeru ilustrirat ćemo primjenu metoda operatora pri rješavanju nehomogenih linearnih diferentnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Primjer 5 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 5 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n.$$

Rješenje. Jednadžba može biti napisana u obliku

$$\left(E^2-4E+4I\right)x_n=5\cdot 2^n+4\cdot 3^n.$$

Partikularno rješenje je dato sa (koristeći (3) i (2) te Primjer 4)

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= \left(E^2-4E+4I\right)^{-1}\left(5\cdot 2^n+4\cdot 3^n\right) \\ &= 5\left(E^2-4E+4I\right)^{-1}2^n\cdot 1+4\left(E^2-4E+4I\right)^{-1}3^n \\ &= 5\cdot 2^n\left[(2E)^2-4\left(2E\right)+4I\right]^{-1}(1)+4\cdot\frac{3^n}{P_2(3)} \\ &\overset{P_2(3)=1}{=} \frac{5}{8}n\left(n-1\right)2^n+4\cdot 3^n. \end{aligned}$$

Kako je komplementarno rješenje $(C_1+C_2n)\,2^n$ (C_1, C_2 proizvoljne konstante), to je opće rješenje date jednadžbe dato sa

$$x_n=c_1 2^n+c_2 n\cdot 2^n+\frac{5}{8}n^2\cdot 2^n+4\cdot 3^n,$$

pri čemu smo uzeli da je $c_1=C_1$ i $c_2=C_2-\frac{5}{8}$. ♣

Primjedba 6 *Metod operatora može se uspješno koristiti za* ***snižavanje reda linearne diferentne jednadžbe****. Naime, pretpostavimo da je diferentna jednadžba k-tog reda data u obliku*

$$\left(E-\lambda_1 I\right)\left(E-\lambda_2 I\right)...\left(E-\lambda_k I\right)x_n=r_n.$$

Uvodeći smjenu $y_n=\left(E-\lambda_2 I\right)...\left(E-\lambda_k I\right)x_n$, dobit ćemo jednadžbu

$$\left(E-\lambda_1 I\right)y_n=r_n,$$

koja je prvog reda i koju znamo riješiti. Nakon toga, problem rješavanja polazne jednadžbe se svodi na rješavanje jednadžbe $(k-1)$-og stepena

$$\left(E-\lambda_2 I\right)...\left(E-\lambda_k I\right)x_n=y_n$$

s već poznatim nizom y_n.

Primjer 7 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=n.$$

Rješenje. Data se jednadžba može pisati u obliku

$$\left(E-3I\right)\left(E-2I\right)x_n=n.$$

Zamjenom $y_n=\left(E-2I\right)x_n$, dobijamo jednadžbu

$$\begin{aligned} &\left(E-3I\right)y_n=n \\ &\quad\Leftrightarrow y_{n+1}-3y_n=n \\ &\quad\Leftrightarrow \frac{y_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{y_n}{3^n}=\frac{n}{3^{n+1}} \\ &\quad\Leftrightarrow \Delta\left(\frac{y_n}{3^n}\right)=\frac{n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} y_n &= 3^n\Delta^{-1}\left(\frac{n}{3^{n+1}}\right)+c_1\cdot 3^n=3^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{3^{k+1}}+c_1\cdot 3^n \\ &= 3^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{3^k}+c_1\cdot 3^n=3^{n-1}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{3}{4}\right)+c_1\cdot 3^n \\ &= -\frac{n}{2}-\frac{1}{4}+C_1\cdot 3^n. \end{aligned}$$

(Za izračunavanje sume $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^k}$ pogledati objašnjenje niže dato za sumu $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.)

Dakle,

$$(E-2I)\,x_n = -\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^n.$$

Kao i maloprije, dobija se opće rješenje polazne jednadžbe

$$\begin{aligned}
x_n &= 2^n \Delta^{-1} \left(\frac{-\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^n}{2^{n+1}} \right) + c_2 \cdot 2^n \\
&= 2^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-\frac{k}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^k}{2^{k+1}} + c_2 \cdot 2^n \\
&= 2^n \left(-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{C_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \right) + c_2 \cdot 2^n \\
&= \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n,
\end{aligned}$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Uočimo da su druga i treća suma u zagradi sume geometrijskog niza, a da smo prvu sumu u zagradi mogli izračunati koristeći formulu parcijalnog sumiranja ovako:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} &= \left| \begin{array}{c} x_k = k \Longrightarrow \Delta x_k = 1 \\ \Delta y_k = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \Longrightarrow y_k = \Delta^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\frac{1}{2}-1} = -2\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{array} \right| \\
&= \left[-2k \left(\frac{1}{2}\right)^k \right]_1^n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = -\frac{2n}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer 8 *Metodom operatora riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = \left(2n^2 - n + 1\right) 5^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,.$$

Rješenje. Datu jednadžbu napišimo u obliku

$$\left(E^2 - 5E + 6I\right) x_n = \left(2n^2 - n + 1\right) 5^n.$$

Partikularno rješenje je dato sa

$$x_n^{(p)} = \left(E^2 - 5E + 6I\right)^{-1} \left(2n^2 - n + 1\right) 5^n.$$

Prema (3) , te zbog $E = I + \Delta$, imamo

$$\begin{aligned}
x_n^{(p)} &= 5^n \left(25E^2 - 25E + 6I\right)^{-1} \left(2n^2 - n + 1\right) \\
&= 5^n \left[25\,(I+\Delta)^2 - 25\,(I+\Delta) + 6I\right]^{-1} \left(2n^2 - n + 1\right) \\
&= 5^n \left[6I + 25\Delta + 25\Delta^2\right]^{-1} \left(2n^2 - n + 1\right) \\
&= 5^n \left[6\left(I + \frac{5}{3}\Delta\right)\left(I + \frac{5}{2}\Delta\right)\right]^{-1} \left(2n^2 - n + 1\right) \\
&= \frac{5^n}{6} \left(I - \frac{5}{3}\Delta + \frac{25}{9}\Delta^2 - \ldots\right) \left(I - \frac{5}{2}\Delta + \frac{25}{4}\Delta^2 - \ldots\right) \left(2n^2 - n + 1\right) \\
&= \frac{5^n}{6} \left(I - \frac{25}{6}\Delta + \frac{25 \cdot 19}{36}\Delta^2 + \ldots\right) \left(2n^2 - n + 1\right) \\
&= \frac{5^n}{6} \left[2n^2 - n + 1 - \frac{25}{6}\,(4n+1) + \frac{25 \cdot 19}{36} \cdot 4\right] \\
&= \frac{5^n}{6} \left(2n^2 - \frac{53}{3}n - \frac{893}{18}\right).
\end{aligned}$$

S druge strane, komplementarno rješenje date jednadžbe je $x_n^{(c)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$ (C_1, C_2 proizvoljne konstante). Prema tome, njeno opće rješenje je

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + \frac{5^n}{6}\left(2n^2 - \frac{53}{3}n - \frac{893}{18}\right). \qquad \clubsuit$$

Naravno, ovaj se metod može koristiti i za iznalaženje partikularnih rješenja izostavljanjem proizvoljnih konstanti, odnosno, u tom slučaju nešto brže, primjenom antidiferentnog operatora.

Zadaci za vježbu:
3.2.24-3.2.26 (metodom operatora)
i
3.3.15-3.3.17 (metodom operatora)