≫ПП23

Dr. sc. Mehmed Nurkanović

Dr. sc. Omer Kurtanović

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

Prvo izdanje

Tuzla, 2013.

Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović
Doc. dr. sc. Omer Kurtanović

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

Recenzenti:
Dr. sc. Husein Pašagić, profesor emeritus
Ekonomski fakultet Univerziteta u Bihaću

Dr. sc. Tihomir Hunjak, redoviti profesor
Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin

Izdavač:
"PrintCom", d.o.o., grafički inženjering, Tuzla

Za izdavača:
Jasmin Hadžimehmedović

Korektura, kompjuterska obrada teksta i naslovna strana:
Autori

Crteži:
Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović
Prof. dr. sc. Zehra Nurkanović

Štampa:
"PrintCom", d.o.o., grafički inženjering, Tuzla

Tiraž:
500 primjeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

Objavljivanje i upotrebu ovog udžbenika odobrio je Senat Univerziteta u Bihaću Odlukom broj 06-3416/2013 od 04.07.2013. godine.

Zehri i Senadi

Predgovor

Savremeni pristup obradi određenih matematičkih sadržaja u primijenjenim naučnim disciplinama, posebno u slučaju ekonomije, zahtijeva veliki stepen simbioze teorijske komponente i komponente primjene u praksi. Nakon što se u jednoj cjelini uvedu osnovni matematički pojmovi, glavne tvrdnje i metodi, neophodno je pristupiti njihovoj adekvatnoj primjeni u ekonomskoj praksi. Na taj način bi čitaoci osjetili razloge izučavanja uvedenih teorijskih osnova i samim tim bi prestala potreba za pitanjima tipa: "Čemu ovo služi, odnosno zbog čega učimo ove stvari iz matematike?". Novi programski sadržaji predmeta Matematika za ekonomiste kako na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Bihaću tako i na ostalim javnim univerzitetima u Bosni i Hercegovini, posebno u Tuzli, Mostaru i Sarajevu, upravo su i koncipirani na ovaj način - da se nakon teorijskih osnova uvode primjeri primjene u ekonomskoj praksi. Ova knjiga je pokušaj, nadamo se i uspješan, da se to i ostvari i tako studentima znatno olakša prihvatanje novog gradiva, te da se izbjegne suhoparnost matematičkih udžbenika koji su oskudijevali primjerima iz prakse.

Nastojali smo da izbjegnemo isuviše precizan pristup u obradi matematičkih sadržaja, ali da ipak sve bude korektno napisano, posebno ponekad izbjegavajući precizne definicije koristeći opisni način njihovog uvođenja. Većinu tvrdnji smo naveli bez dokaza (osim njih nekolicine), nastojeći da izbjegnemo bespotrebno opterećivanje studenata matematičkom teorijom, ali smo zato skoro u svakoj sekciji naveli po jedan ili više odgovarajućih primjera primjene obrađenih matematičkih sadražaja u ekonomskoj praksi. Skoro na kraju svake sekcije navedeni su zadaci za samostalan rad kako bi studenti mogli adekvatno da savladaju pređeno gradivo i da se što bolje pripreme za ispit.

Knjiga Matematika za ekonomiste ima sedam poglavlja. U prvom poglavlju obrađeni su osnovni elementi matričnog računa i sistemi linearnih algebarskih jadnedžbi, a kao oblici primjene u ekonomiji navedeni su: model tržišne ravnoteže, model nacionalnog dohotka i input-output (međusektorska) analiza. U drugom poglavlju razmatraju se realne funkcije jedne realne varijable, posebno sve elementarne funkcije i njihove osobine, kao i primjena funkcija u ekonomiji: funkcija potražnje, funkcija ponude, funkcija troškova, te funkcije prihoda i dobiti (i njihove glavne karakteristike), a na kraju su razmatrani nizovi, općenito, a onda i posebno: aritmetički i geometrijski niz, te pojam granične vrijednosti niza. Predmetom izučavanja u trećem poglavlju je diferencijalni račun funkcija jedne varijable i primjena u ekonomiji (posebno granične funkcije, optimizacija i elastičnost). U okviru četvrtog poglavlja razmatran je diferencijalni račun funkcija dvije i više varijabli i njegova primjena u ekonomiji. Integralni račun (neodređeni i određeni integral) razmatrani su detaljno u petom poglavlju i, naravno, primjena integralnog računa u ekonomiji. U posljednja dva poglavlja razmatrani su metematički modeli u ekonomiji: kontinuirani, u obliku diferencijalnih jednadžbi, i diskretni, u obliku diferentnih jednadžbi. Ovi posljednji su bitna novina na našim prostorima u literaturi ovakve namjene, a sadrže niz zanimljivih primjera iz ekonomske prakse kao što su: izračunavanje kamate na štedne uloge, izrada amortizacionog plana otplate zajma, model paukova mreža, model pregovora menadžnenta i radnika i slično.

Nadamo se da će, ovako koncipirana, knjiga Matematika za ekonomiste biti od koristi studentima pri savladavanju istoimenog predmeta kao i nekih drugih predmeta s kojima će imati priliku da se susretnu u toku studija.

Recenzentima, emeritusu prof. dr. Huseinu Pašagiću i prof. dr. Tihomiru Hunjaku, najiskrenije se zahvaljujemo na uloženom trudu i korisnim sugestijama koje su doprinijele kvalitetnijem izgledu ove knjige.

Duboko smo svjesni, naravno, činjenice da postoje i neki propusti u pisanju ove knjige, te se unaprijed zahvaljujemo svim pažljivim čitaocima na argumentiranim primjedbama koje mogu poslati na mail adrese: *mehmed.nurkanovic@untz.ba* i *omer.kurtanovic@hotmail.com.*

Tuzla - Bihać, juni 2013. godine *Autori*

Sadržaj

Poglavlje 1

Matrični račun i sistemi linearnih algebarskih jednadžbi

1.1 Matrice i determinante

1.1.1 Pojam matrice

Promatrajmo mjesečne prikaze prodaje različitih tipova automobila na različitim prodajnim mjestima za mjesece oktobar i novembar:

	A1	A2	A3	A4
P1	20	15	9	10
P2	15	10	6	5
P3	5	3	2	4

Tabela 1.1 - Oktobar

	A1	A2	A3	A4
P1	15	12	7	8
P2	16	8	3	2
P3	6	2	1	2

Tabela 1.2 - Novembar

Uočavamo da su tabele veoma pregledne i da iz njih precizno možemo ustanoviti koliko je kojeg tipa automobila (A1, A2, A3, A4) prodano na pojedinim prodajnim mjestima (P1, P2, P3). Vidimo da su nam u vertikalnim kolonama raspoređene količine prodatih automobila pojedinog tipa, a da su u horizontalnim redovima poredane količine prodatih automobila po prodajnim mjestima. Tako možemo pročitati da su nam u prvoj koloni (za oktobar i novembar, redom) sljedeći podaci

$$\begin{array}{ccc} 20 & & 15 \\ 15 & \text{i} & 16 \\ 5 & & 6 \end{array}$$

a da su, recimo u drugom horizontalnom redu (za oktobar i novembar, redom) sljedeći podaci

$$\begin{array}{cccc} 15 & 10 & 6 & 5 \\ & \text{i} & & \\ 16 & 8 & 3 & 2 \end{array}$$

Naravno, u praksi se susrećemo sa znatno većim tabelama, tj. s većim brojem vertikalnih kolona i horizontalnih redova i to za svaki od 12 mjeseci u godini. Rad s tako velikim brojem podataka je danas znatno olakšan upotrebom računara. No, operateru koji radi s ovakvim tabelama često nisu potrebni prvi red horizontalno (s podacima o tipovima automobila) i prva kolona vertikalno (s podacima o prodajnim mjestima) u tabeli, jer ih obično znaju "napamet". Dakle, oni bi se sigurno dobro snašli i s podacima iz ovih tabela ako bismo izbrisali horizontalne i vertikalne linije, kao i objašnjenja o tipovima automobila i prodajnim mjestima. Drugim riječima, čak i ovakav raspored podataka za oktobar i novembar

$$\begin{array}{cccc} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\textbf{Tabela 1.1A}} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\textbf{Tabela 1.2A}} \end{array} \tag{1.1}$$

bi njima bio razumljiv i praktičan za manipulaciju. Pogotovo takav raspored podataka je praktičan za unos u računar i manipulaciju tim podacima. Jedino, kako ne bi pri bliskom zapisivanju susjednih tabela došlo do miješanja njihovih podataka, podatke iz (1.1) ćemo, za svaku tabelu posebno, po konvenciji, staviti ili u malu ili u srednju zagradu i dobiti unutar njih pravougaone sheme brojeva. Ovo znači da Tabeli 1.1 možemo jednoznačno pridružiti sljedeću pravougaonu shemu brojeva

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

a Tabeli 1.2 sljedeću pravougaonu shemu

$$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ovakve pravougaone sheme brojeva zvat ćemo *matricama.* Matrice označavamo velikim slovima abecede kao, na primjer, u našem slučaju:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

U svakoj od navedenih matrica tačno znamo koji se elementi nalaze kako u pojedinim *kolonama* tako i u pojedinim horizontalnim redovima (koje ćemo ubuduće zvati *vrstama*). Svaki pojedini podatak u matrici nazivamo *elementom* matrice. Jasno je da je položaj svakog elementa date matrice potpuno određen rednim brojem kolone i rednim brojem vrste u kojima se on nalazi. Tako se, broj 3 u matrici A nalazi u 3. vrsti i 2. koloni, a u matrici B isti broj se nalazi u 2. vrsti i 3. koloni. Zbog toga broj 3 iz matrice A možemo općenito označiti sa $a_{32} = 3$, dok ga kao element matrice B možemo zapisati kao $b_{23} = 3$. Dakle, prvi broj u indeksu označava redni broj vrste, a drugi broj u indeksu označava redni broj kolone u kojima se element nalazi. Općenito, matrica može imati, kao i odgovarajuća joj tabela, proizvoljan broj vrsta i proizvoljan broj kolona, recimo m vrsta i n kolona. Za takvu matricu kažemo da je formata $m \times n$. U našem primjeru matrice A i B su obje formata 3×4.

Sada možemo dati sljedeću definiciju matrice.

Definicija 1.1 *Matrica A formata $m \times n$ je pravougaona shema elemenata a_{ij} koji su poredani u m vrsta i n kolona.*

Elementi a_{ij} su obično realni ili kompleksni brojevi u općem slučaju, no kod nas će oni biti realni brojevi budući da nas zanima primjena u ekonomiji i da se oslanjamo na odgovarajuće tabele pri formiranju matrice. Općenito, oznaka a_{ij} znači da se element matrice A nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni. Matricu A formata $m \times n$ eksplicitno ćemo pisati u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

ili kraće kao

$$A = [a_{ij}]\,, \ \ (i \in \{1, 2, ..., m\}\,, j \in \{1, 2, ..., n\})\,. \tag{1.3}$$

Tako imamo, na primjer, da je:

- matrica $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ formata 2×3;

- matrica $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ formata 1×4;

- matrica $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ formata 3×1.

Matrici formata $1 \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

dat ćemo i naziv *matrica vrsta* ili *vektor vrsta*, dok ćemo matrici formata $m \times 1$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

dati i naziv *matrica kolona* ili *vektor kolona.*

U specijalnom slučaju, kada je $m = n$, matrica ima jednak broj vrsta i kolona, pa se ona tada naziva *kvadratnom matricom.* Kvadratne matrice igraju vrlo značajnu ulogu u matričnom računu i njegovoj primjeni u rješavanju sistema linearnih algebarskih jednadžbi. Zato ćemo istaknuti neke važne činjenice vezane za kvadratne matrice.

Za kvadratnu matricu formata $n \times n$ kraće ćemo reći da je kvadratna matrica reda n, uz obavezno naglašavanje riječi "kvadratna". Koristit ćemo, u skladu s (1.2), općeniti zapis kvadratne matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

U kvadratnoj matrici (1.4) elementi $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ čine *glavnu dijagonalu* matrice A, a njihov zbir

$$TrA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

nazivamo *tragom* kvadratne matrice A.

Navedimo sada neke specijalne kvadratne matrice. Matricu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

tj. kvadratnu matricu čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli nazivamo *gornjom trougaonom matricom*. Analogno se definira i *donja trougaona matrica* kao kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Ukoliko su svi elementi kvadratne matrice jednaki nuli, osim onih na dijagonali, tj. $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$, odnosno ako je

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

tada matricu nazivamo *dijagonalnom matricom.* Specijalno, ako je u dijagonalnoj matrici $d_i = d \neq 0$ za sve $i \in \{1, 2, ..., n\}$, onda matricu nazivamo *skalarnom matricom,* a ako je u skalarnoj matrici $d = 1$, tj.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

matricu nazivamo *jediničnom matricom* i označavat ćemo je sa I ili sa I_n ako želimo naglasiti kojeg je reda (formata).
Osim toga, matricu bilo kojeg formata čiji su svi elementi jednaki 0 nazivamo *nula matricom* i označavamo sa $\boldsymbol{O}_{m \times n}$. Tako je nula matrica formata 3×2 oblika

$$\boldsymbol{O}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kod matrica je važno definirati relaciju jednakosti.

Definicija 1.2 *Za matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ kažemo da su jednake ako su one istog formata i ako su im odgovarajući elementi međusobno jednaki (tj. ako je $a_{ij} = b_{ij}$, za sve $i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$).*

Primjer 1.1 *Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da matrice A i B budu jednake ako je*

$$A = \begin{bmatrix} a - b & 3a \\ a + b & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2a + b & 2b \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Prema definiciji jednakosti dviju matrica slijedi, pošto su one istog formata, da mora biti

$$\begin{aligned} a - b &= -2a + b, \\ 3a &= 2b, \\ a + b &= 5. \end{aligned}$$

Prva i druga jednadžba su ekvivalentne i iz njih imamo da je $b = \frac{3}{2}a$, pa zamjenom u trećoj jednadžbi, dobijemo

$$\frac{5}{2}a = 5,$$

odakle je $a = 2$ i $b = 3$. ♣

1.1.2 Operacije s matricama

Sabiranje matrica

Pretpostavimo da treba napraviti zbirni izvještaj prodaje automobila po prodajnim mjestima za mjesece oktobar i novembar iz prethodne sekcije. Sasvim je jasno da će nova tabela imati podatke koji predstavljaju zbireve odgovarajućih podataka iz odvojenih tabela po mjesecima, tj. imat ćemo

	A1	A2	A3	A4
P1	35	27	16	18
P2	31	18	9	7
P3	11	5	3	6

Tabela 1.3 - Zbirni izvještaj

Njoj se može pridružiti jednoznačno sljedeća matrica

$$C = \begin{bmatrix} 35 & 27 & 16 & 18 \\ 31 & 18 & 9 & 7 \\ 11 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

koja, adekvatno tome, predstavlja zbir matrica A i B koje odgovaraju Tabeli 1.1 i Tabeli 1.2, odnosno vrijedi

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 27 & 16 & 18 \\ 31 & 18 & 9 & 7 \\ 11 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je da *ima smisla sabirati samo matrice istog formata* (po ugledu na odgovarajuće tabele). *Pravilo sabiranja* za matrice A i B istog formata $m \times n$ se može matematičkom simbolikom zapisati na sljedeći način:

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \;\; (i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.8}$$

Analogno se izvodi i oduzimanje matrica istog formata tako što izvršimo oduzimanje odgovarajućih elemenata tih matrica u navedenom smjeru, tj. vrijedi

$$A - B = C \Leftrightarrow a_{ij} - b_{ij} = c_{ij} \;\; (i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.9}$$

Primjer 1.2 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 5 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \ i \ B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Odrediti $A + B$ *i* $A - B$.

Rješenje. Prema navedenim pravilima za sabiranje i oduzimanje matrica, pošto su one istog formata, imamo

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & -10 & 5 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+10 & -10+5 & 5+(-3) \\ -4+0 & 2+(-5) & -5+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 2 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & -10 & 5 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-10 & -10-5 & 5-(-3) \\ -4-0 & 2-(-5) & -5-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -15 & 8 \\ -4 & 7 & -13 \end{bmatrix}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Množenje matrica

Navedimo prvo pravilo množenja matrice skalarom (brojem). Opet ćemo se poslužiti tabelom iz prethodne sekcije. Neka treba napraviti tabelu plana prodaje automobila po prodajnim objektima za mjesec decembar tako da prodaja bude udvostručena u odnosu na mjesec oktobar. Jednostavno zaključujemo da sve podatke u Tabeli 1.1 treba udvostručiti, tj. pomnožiti sa 2. Dakle, tražena tabela s planom dvostrukog uvećanja prodaje u odnosu na mjesec oktobar bit će

	A1	A2	A3	A4
P1	40	30	18	20
P2	30	20	12	10
P3	10	6	4	8

Tabela 1.4 - Plan za decembar

Njoj pridružena matrica je

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 40 & 30 & 18 & 20 \\ 30 & 20 & 12 & 10 \\ 10 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 20 & 2\cdot 15 & 2\cdot 9 & 2\cdot 10 \\ 2\cdot 15 & 2\cdot 10 & 2\cdot 6 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= 2\cdot \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2A. \end{aligned}$$

Prema tome, *matricu množimo skalarom (brojem) tako da svaki element te matrice pomnožimo tim skalarom (brojem)*, tj.

$$C = kA \Leftrightarrow c_{ij} = ka_{ij} \;\; (i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.10}$$

Znatno je složenije izvesti pravilo množenja matrice matricom, a koje ima praktičnog (i samim tim logičnog) smisla. U tu svrhu razmotrimo ovakav zadatak:

Data je tabela pregleda cijena pojedinih tipova automobila i troškova njihovog skladištenja

	Cijena ($)	Troškovi skl. ($)
A1	20000	100
A2	25000	120
A3	32000	170
A4	35000	150

Tabela 1.5

Napraviti preglednu tabelu ukupnih vrijednosti prodatih automobila i ukupnih troškova skladištenja po pojedinim prodajnim objektima za mjesec oktobar.

Tražena pregledna tabela treba da je oblika

	Uk. vrijednost ($)	Uk. troškovi skl. ($)
P1		
P2		
P3		

Tabela 1.6

Da bismo dobili ukupnu vrijednost svih prodatih automobila na prodajnom mjestu P1 za mjesec oktobar treba broj prodatih automobila svakog tipa pojedinačno u tom prodajnom objektu pomnožiti s njegovom cijenom i rezultate sabrati:

P1	20	15	9	10

Cijena ($)
20000
25000
32000
35000

Uk. vrij. za P1: $20 \cdot 20000 + 15 \cdot 25000 + 9 \cdot 32000 + 10 \cdot 35000 = 1413000.$

Uočavamo pravilo:

Da bismo dobili vrijednost u prvoj vrsti i prvoj koloni Tabele 1.6 (rezultujuće tabele) množili smo odgovarajuće elemente prve vrste Tabele 1.1 i prve kolone Tabele 1.5, a onda ih sabrali (taj zbir ćemo zvati ***kanonskim proizvodom*** *prve vrste iz Tabele 1.1 i prve kolone iz Tabele 1.6).*

Analogno dobijamo ostale elemente u prvoj koloni Tabele 1.6:

$$\begin{array}{ll} \text{Uk. vrij. za P2:} & 15 \cdot 20000 + 10 \cdot 25000 + 6 \cdot 32000 + 5 \cdot 35000 = 917000, \\ \text{Uk. vrij. za P3:} & 5 \cdot 20000 + 3 \cdot 25000 + 2 \cdot 32000 + 4 \cdot 35000 = 379000. \end{array}$$

Po istom principu popunjavamo i elemente druge kolone u Tabeli 1.6. Tako vrijednost u prvoj vrsti i drugoj koloni Tabele 1.6 dobijamo kao zbir proizvoda odgovarajućih elemenata prve vrste iz Tabele 1.1 i druge kolone iz Tabele 1.5:

P1	20	15	9	10

Troškovi skl. ($)
100
120
170
150

$$\text{Uk. vrij. tr. skl. za P1: } 20 \cdot 100 + 15 \cdot 120 + 9 \cdot 170 + 10 \cdot 150 = 6830.$$

Analogno dobijamo i ostale vrijednosti u drugoj koloni Tabele 1.6:

$$\begin{array}{ll} \text{Uk. vrij. tr. skl. za P2:} & 15 \cdot 100 + 10 \cdot 120 + 6 \cdot 170 + 5 \cdot 150 = 4470, \\ \text{Uk. vrij. tr. skl. za P3:} & 5 \cdot 100 + 3 \cdot 120 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 = 1800. \end{array}$$

Popunjena Tabela 1.6 izgleda ovako:

	Uk. vrijednost ($)	Uk. troškovi skl. ($)
P1	1413000	6830
P2	917000	4470
P3	379000	1800

Tabela 1.6A

Rezultate u Tabeli 1.6A smatrat ćemo proizvodom Tabele 1.1 i Tabele 1.5. Ako pređemo na njima pridružene matrice (matrica A za Tabelu 1.1, matrica B za

Tabelu 1.5 i matrica C za Tabelu 1.6A), imat ćemo:

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20000 & 100 \\ 25000 & 120 \\ 32000 & 170 \\ 30000 & 150 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 20 \cdot 20000 + 15 \cdot 25000 \\ +9 \cdot 32000 + 10 \cdot 35000 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \cdot 100 + 15 \cdot 120 \\ +9 \cdot 170 + 10 \cdot 150 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 15 \cdot 20000 + 10 \cdot 25000 \\ +6 \cdot 32000 + 5 \cdot 35000 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 \cdot 100 + 10 \cdot 120 \\ +6 \cdot 170 + 5 \cdot 150 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \cdot 20000 + 3 \cdot 25000 \\ +2 \cdot 32000 + 4 \cdot 35000 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \cdot 100 + 3 \cdot 120 \\ +2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1413000 & 6830 \\ 917000 & 4470 \\ 379000 & 1800 \end{bmatrix} = AB.
\end{aligned}
$$

Općenito pravilo za množenje matrica A i B ($AB = C$):

P1. *Dvije se matrice mogu množiti samo ako prva od njih (A) ima onoliko kolona koliko druga (B) ima vrsta , npr. da su formata $A_{m\times p}$ i $B_{p\times n}$.*

P2. *Element* c_{ij} rezultujuće matrice C je kanonski proizvod i-te vrste prve matrice, matrice $A_{m\times p}$, i j-te kolone druge matrice, matrice $B_{p\times n}$, tj.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} \quad (i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}) \tag{1.11}$$

ili skraćeno

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.12}$$

Uočimo da je tada rezultujuća matrica C formata $m \times n$, tj. vrijedi

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}. \tag{1.13}$$

Pravilo P2 se može ilustrirati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

Primjer 1.3 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad i \;\; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati: AB i BA.

Rješenje. a) Za proizvod AB prvo provjerimo pravilo P1. Imamo $A_{2\times3}$ i $B_{3\times2}$, što znači da taj proizvod postoji i jednak je određenoj matrici $C_{2\times2}$. Sad primijenimo pravilo P2:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot2+2\cdot0+0\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+0\cdot(-1) \\ (-2)\cdot2+3\cdot0+1\cdot2 & (-2)\cdot0+3\cdot2+1\cdot(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Pravilo P1 je zadovoljeno za proizvod $B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}$, tako da je rezultujuća matrica $C_{3\times3}$. Prema pravilu P2 imamo

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot1+0\cdot(-2) & 2\cdot2+0\cdot3 & 2\cdot0+0\cdot1 \\ 0\cdot1+2\cdot(-2) & 0\cdot2+2\cdot3 & 0\cdot0+2\cdot1 \\ 2\cdot1+(-1)(-2) & 2\cdot2+(-1)\cdot3 & 2\cdot0+(-1)\cdot1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Napomena 1.1 *Primijetimo da u prethodnom primjeru* ***ne vrijedi zakon komutacije za množenje matrica****, jer je $AB \neq BA$. Može se čak dogoditi da jedan proizvod postoji, a drugi ne. I u slučaju kvadratnih matrica ne vrijedi zakon komutacije za množenje. Šta više, matrica A formata $m\times n$, za $m \neq n$, ne može se pomnožiti sama sa sobom, tj. ne postoji proizvod $AA = A^2$. Taj proizvod postoji samo ako je matrica A kvadratna matrica.*

Napomena 1.2 *Jedinična matrica I ima važnu osobinu u operaciji množenja s nekom drugom matricom s kojom se može pomnožiti. Naime, kao što broj 1 igra ulogu neutralnog elementa za množenje realnih brojeva, tj. da za svaki realan broj a vrijedi $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, tako i jedinična matrica igra ulogu neutralnog elementa za množenje matrica, tj. vrijedi:*

$$A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}, \quad I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}, \quad I_n \cdot A_{n\times n} = A_{n\times n} \cdot I_n = A_{n\times n}.$$

Također, nula matrica ima važnu osobinu neutralnog elementa pri sabiranju matrica (kao što broj 0 igra ulogu neutralnog elementa za sabiranje realnih brojeva: $a + 0 = 0 + a = a$, $a \in \mathbb{R}$), tj. vrijedi

$$\boldsymbol{O}_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n} + \boldsymbol{O}_{m\times n} = A_{m\times n}$$

za bilo koju matricu $A_{m\times n}$.

Koristeći pravila (1.8) i (1.10), može se pokazati da operacije sabiranja matrica i množenje matrice skalarom imaju sljedeće osobine.

Za proizvoljne matrice A, B, C istog formata $m \times n$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:

1. $A + B = B + A$ *(komutativnost sabiranja matrica),*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(asocijativnost sabiranja matrica),*
3. $A + \boldsymbol{O}_{m\times n} = \boldsymbol{O}_{m\times n} + A$ *(nula matrica je neutralni element za sabiranje matrica),*
4. $A + (-A) = (-A) + A = \boldsymbol{O}_{m\times n}$ *(egzistencija suprotne matrice),*
5. $(\alpha\beta)\, A = \alpha\, (\beta A)$,
6. $(\alpha + \beta)\, A = \alpha A + \beta A$,
7. $\alpha\, (A + B) = \alpha A + \alpha B$,
8. $1 \cdot A = A$.

U matematici se skup koji ima ovakvih osam osobina naziva *vektorskim prostorom,* pa zbog toga skup svih matrica istog formata čini vektorski prostor.

Slično ovome i operacija množenja ima neka bitna svojstva. Pretpostavimo da su matrice A, B, C odgovarajućih formata. Tada vrijedi:

1. $A\,(BC) = (AB)\,C$ *(asocijativnost množenja matrica),*
2. $A\,(B + C) = AB + AC$ *(distributivnost slijeva množenja matrica prema sabiranju),*

3. $(B+C)\,A = BA+CA$ *(distributivnost zdesna množenja matrica prema sabiranju),*

4. $A \cdot \boldsymbol{O}_{m\times n} = \boldsymbol{O}_{m\times n} \cdot A = \boldsymbol{O}_{m\times n}$.

Vidjeli smo da množenje matrica nije komutativno, te zbog toga *moramo strogo voditi računa da li se množenje nekom matricom obavlja s lijeve ili s desne strane* (što će posebno doći do izražaja prilikom rješavanja matričnih jednadžbi nešto kasnije).

Napomena 1.3 *Napomenimo da dijeljenje matrica ne postoji i* ***nema nikakva smisla pisati količnik dvije matrice, npr.*** $\dfrac{A}{B}$.

Definicija 1.3 *Ako je A kvadratna matrica reda n, onda definiramo m-ti stepen matrice A ($m \in \mathbb{N}$) na sljedeći način:*

$$A^1 = A \quad i \quad A^m = A \cdot A^{m-1} \text{ za } m \geq 2.$$

Također, po definiciji smatramo da je $A^0 = I_n$.

Primjer 1.4 *Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i polinom $P(x) = x^2 - 2x + 3$. Izračunati $P(A)$.*

Rješenje. Kako možemo pisati da je $P(x) = x^2 - 2x + 3x^0$ i imajući na umu da je $A^0 = I_2$, vidimo da je

$$P(A) = A^2 - 2A + 3I.$$

Izračunajmo prvo matricu A^2:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je sada

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - 2A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Transponirana matrica

Definicija 1.4 *Ako je matrica A formata $m \times n$, tj. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, tada za matricu $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ kažemo da je **transponirana matrica** matrice A.*

Dakle, transponirana matrica A^T se dobije kad u matrici A odgovarajuće vrste zamijene mjesta s odgovarajućim kolonama (prva vrsta s prvom kolonom, druga vrsta s drugom kolona, itd.). Na primjer, matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ima transponiranu matricu

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Osobine transponiranja matrice:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
2. $\left(A^T\right)^T = A$,
3. $(AB)^T = B^T A^T$.

Primjer 1.5 *Zadane su matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$. *Izračunati $A^T B^T - B^T A^T$.*

Rješenje. Odredimo prvo transponirane matrice datim matricama:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} A^T B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -12 \\ 8 & 13 & 16 \\ 4 & 24 & 29 \end{bmatrix}, \\ B^T A^T &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -12 \\ 8 & 13 & 16 \\ 4 & 24 & 29 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa je

$$A^TB^T - B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -12 \\ 8 & 13 & 16 \\ 4 & 24 & 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -8 & -12 \\ 8 & 13 & 16 \\ 4 & 24 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \clubsuit$$

$\circ \quad \circ \quad \circ$

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da matrice A i B budu jednake ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2a+b & 2a \\ 1 & a-b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a+3b & 1+b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Napišite matricu $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, ako je $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Odrediti realne parametre a i b tako da matrica $D = \begin{bmatrix} 2a^2-1 & 0 & 0 \\ a^3-8 & 2e^{ab} & a-b \\ 0 & -a+b & 0 \end{bmatrix}$ bude dijagonalna.

4. Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a^2-9 & a+b & 0 \\ b^2-1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bude skalarna.

5. Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da matrica $A = \begin{bmatrix} 5a-b^2 & 2b+3 & 9 \\ a^2-16 & 2 & -1 \\ b^2-a-5 & 4-a & 1 \end{bmatrix}$ bude gornja trougaona.

6. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odrediti: a) AB, b) BA.

7. Izračunati $AB - BA$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati $A^T B^T - B^T A^T$.

9. Za kvadratnu matricu A kažemo da je idempotentna ako je $A^2 = A$. Za koje je vrijednosti realnih parametara a i b matrica $A = \begin{bmatrix} b & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ idempotentna?

10. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i polinom $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Izračunati $P(A)$.

11. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Izračunati $f(A) \cdot f\left(B^T\right)$ ako je $f(x) = (x+1)(2x-1)$.

1.1.3 Pojam determinante

Pretpostavimo da treba riješiti matričnu jednadžbu

$$AX = B,$$

gdje su A i B kvadratne matrice istog reda n. Budući da ne postoji operacija dijeljenja matrica, postavlja se pitanje kako odrediti nepoznatu matricu X. Da imamo takav problem u skupu realnih brojeva, u slučaju jednadžbe $ax = b$, za $a \neq 0$, njeno rješenje bismo mogli napisati u obliku

$$x = a^{-1} b.$$

Vođeni ovom analogijom, pokazat ćemo kasnije da i rješenje date matrične možemo zapisati u obliku

$$X = A^{-1} B,$$

pri čemu ćemo matricu A^{-1} zvati *inverznom matricom* matrice A. Važnu ulogu u izračunavanju inverzne matrice igrat će jedan poseban matematički pojam koji zovemo *determinanta.* Stoga je neophodno posebno se pozabaviti pojmom determinante i njenim osobinama.

Mi ćemo da izbjegnemo preciznu definiciju determinante pomoću permutacija koja je vrlo komplicirana i navest ćemo njenu opisnu definiciju.

Neka je A kvadratna matrica reda n. *Determinanta te matrice je broj, u oznaci* $\det A$ ili $|A|$, *koji se na jednoznačan način pridružuje matrici* A. Taj jednoznačan način pridruživanja objasnit ćemo postepeno. Prvo naglasimo da samo kvadratna matrica ima determinantu i da je determinanta broj, za razliku od odgovarajuće matrice koja je pravougaona shema brojeva, tj. cio blok brojeva.

U slučaju da je A kvadratna matrica reda 1, tj. ima samo jedan element, onda je determinanta te matrice jednaka upravo tom elementu.

Za kvadratnu matricu drugog reda, tj. matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ definiramo njenu determinantu na sljedeći način:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.15}$$

Drugim riječima, ona se dobije oduzimanjem proizvoda elemenata matrice A po sporednoj dijagonali od proizvoda njenih elemenata na glavnoj dijagonali.

Ubuduće treba strogo razlikovati pravougaonu shemu brojeva u uglastoj zagradi (što je matrica), od one u uspravnim zagradama (što je determinanta).

Primjer 1.6 *Izračunati determinante sljedećih matrica:*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad b)\ B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Imamo:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = 26,$

b) $\det B = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 0 \cdot 5 = 2.$ ♣

Determinantu kvadratne matrice trećeg reda definiramo na sljedeći način:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

To se može iskazati tzv. *Sarrusovim pravilom*, prema kojem se determinanti dopišu zdesna prva i druga kolona i zatim se sa predznakom "+" računaju proizvodi elemenata na glavnoj dijagonali i na pravcima koji su s njom paralelni, dok se sa predznakom "−" računaju proizvodi elemenata sa sporedne dijagonale i sa dva pravca njoj paralelna, a zatim se svi tako dobijeni proizvodi saberu:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Primjer 1.7 *Izračunati determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Prema Sarrusovom pravilu, imamo

$$\begin{aligned} \det A &= \left| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{array} = 1 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)\,(-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 2 \\ &\quad - (-1) \cdot 4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 0 \\ &= -14. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Napomena 1.4 *Sarusovim pravilom se mogu izračunavati samo determinante kvadratnih matrica trećeg reda. U slučaju matrica višeg reda ovo se pravilo* ***ne može koristiti*** *i tada se koristi tzv. Laplaceov razvoj. No, prije toga moramo se upoznati s još nekim pojmovima.*

Definicija 1.5 *Determinanta reda* $n-1$ *koja se iz determinante* n*-tog reda dobije izostavljanjem jedne vrste i jedne kolone naziva se* ***subdeterminantom*** *te determinante. Izostavljanjem* i*- te vrste i* j*-te kolone determinante* n*-tog reda, u čijem se presjeku nalazi element* a_{ij}*, dobije se subdeterminanta koj se naziva* ***minorom elementa*** a_{ij}*, u oznaci* M_{ij}*.*

Primjer 1.8 *Izračunati sve minore determinante* $\left| \begin{array}{lrr} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right|$.

Rješenje. Prema gornjoj definiciji, imamo

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4;\ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12;\ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6; \\
M_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4;\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4;\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \\
M_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2;\ M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6;\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1. \quad \clubsuit
\end{aligned}
$$

Definicija 1.6 ***Algebarskim komplementom*** *ili* ***kofaktorom*** *elementa a_{ij} determinante* $\det A$*, odnosno matrice A, nazivamo broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Primjer 1.9 *Odrediti algebarske komplemente svih elemenata matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Rješenje. U skladu s prethodne dvije definicije, imamo

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 20;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 5; \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;\ A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17; \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4;\ A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1. \quad \clubsuit
\end{aligned}
$$

Sada smo u mogućnosti da navedemo opće pravilo za izračunavanje vrijednosti determinante bilo kojeg reda.

Teorem 1.1 ***(Laplaceov razvoj)*** *a) Vrijednost determinante kvadratne matrice A reda n jednaka je zbiru proizvoda elemenata proizvoljne vrste i njima odgovarajućih kofaktora, tj.*

$$
\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \quad (i \in \{1, 2, ..., n\}), \tag{1.16}
$$

što je tzv. Laplaceov razvoj po i-toj vrsti.

b) Vrijednost determinante kvadratne matrice A reda n jednaka je zbiru proizvoda elemenata proizvoljne kolone i njima odgovarajućih kofaktora, tj.

$$
\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} \quad (j \in \{1, 2, ..., n\}), \tag{1.17}
$$

što je tzv. Laplaceov razvoj po j-toj koloni.

Budući da je i u jednom i u drugom razvoju izbor vrste ili kolone po kojoj se razvoj odvija proizvoljan, očigledno je najbolje izabrati onu vrstu ili kolonu u kojoj imamo najviše nula. Naime, tada i ne treba tražiti kofaktor elementa koji je jednak nuli, jer odgovarajući proizvod je nula.

Primjer 1.10 *Izračunati vrijednost determinante matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Uočavamo da je najveći broj nula u trećoj koloni, pa ćemo izvršiti Laplaceov razvoj upravo po toj koloni:

$$\det A = 0 \cdot A_{13} + (-1) \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = -A_{23} + A_{33}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} A_{23} &= -\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right. = -(-2 - 24 + 0 - 18 - 24 - 0) = 68, \\ A_{33} &= +\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right. = -5 + 0 + 54 - 45 - 0 - 6 = -2, \end{aligned}$$

pa je

$$\det A = -68 - 2 = -70. \quad \clubsuit$$

Primjer 1.11 *Izračunati vrijednost determinante jedinične matrice, kao i gornje trougaone matrice.*

Rješenje. Koristeći Laplaceov razvoj po prvoj koloni imamo

$$\det I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = \det I_{n-1} = ... = \det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dakle, vrijedi

$$\det I_n = 1. \tag{1.18}$$

Analogno postupimo i u slučaju gornje trougaone matrice:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
&= a_{11}
\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}
\begin{vmatrix}
a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \ldots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, *vrijednost determinante gornje trougaone* (isto vrijedi i za donju trougaonu) *matrice jednak je proizvodu elemenata glavne dijagonale matrice.* ♣

Primijetimo da se na ovaj način izračunavanje determinante n-tog reda svodi na izračunavanje n (sub)determinanti reda $n-1$. Također smo vidjeli da je Laplaceov razvoj najjednostavnije izvesti po onoj vrsti ili koloni determinante u kojoj ima najviše nula. Pokazuje se da se korištenjem nekih osobina determinanti može postići da, ne mijenjajući vrijednost determinante, dobijemo što veći broj nula u nekoj njenoj vrsti ili koloni. Zbog toga je vrlo korisno poznavati sljedeće osobine determinanti (koje navodimo bez dokaza).

Osobine determinanti

1. $\det A^T = \det A$, za bilo koju kvadratnu matricu A.

2. Ako dvije vrste (kolone) zamijene svoja mjesta, determinanta promijeni predznak.

3. Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli.

4. Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone). Specijalno, determinanta je jednaka nuli ako su joj dvije vrste (kolone) istovjetne.

5. Determinantu množimo brojem različitim od nule tako da tim brojem pomnožimo sve elemente *samo* jedne vrste (kolone) (ekvivalentno, zajednički faktor svih elemenata jedne vrste (kolone) može se izvući ispred determinante).

6. Vrijednost determinante se ne mijenja ukoliko elementima jedne vrste (kolone) dodamo odgovarajuće elemente neke druge vrste (kolone) prethodno pomnožene nekim brojem.

7. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, tada je $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Primjer 1.12 *Koristeći samo osobine determinanti, odrediti vrijednost determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Dodamo li elementima druge vrste odgovarajuće elemente prve vrste prethodno pomnožene brojem 2, zatim ako dodamo elementima četvrte vrste odgovarajuće elemente prve vrste i ako elementima pete vrste dodamo odgovarajuće elemente prve vrste prethodno pomnožene brojem -5, vrijednost determinante se neće promijeniti (osobina 6.) i vrijedi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -10 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

jer su druga i četvrta vrsta determinante istovjetne (osobina 4.). ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Izračunati determinante sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a+2b & 5a+b \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Koristeći Sarrusovo pravilo, izračunati determinante sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Odrediti algebarske komplemente svih elemenata svake od matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Izračunati vrijednost determinante matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Izračunati vrijednost determinante matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 555 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Koristeći samo osobine determinanti, izračunati vrijednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 6 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Riješiti jednadžbe:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x+3 & x+5 & x \\ x+1 & x+3 & x-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x-4 & -3 & x+2 & 0 \\ x-1 & -1 & x+1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Izračunati $\det A + 2 \det A^T$ ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$.

1.1.4 Inverzna matrica

Već smo vidjeli da se pojam inverzne matrice pojavljuje pri rješavanju matrične jednadžbe $AX = B$, budući da dijeljenje matrica ne postoji i da ga na odgovarajući način treba zamijeniti množenjem. Stoga navedimo prvo preciznu definiciju inverzne matrice, a zatim ćemo vidjeti na koji se način ona izračunava i kako se primjenjuje u rješavanju linearnih matričnih jednadžbi.

Definicija 1.7 *Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako postoji kvadratna matrica X reda n za koju vrijedi*

$$AX = XA = I_n,$$

*tada ćemo je zvati **inverznom matricom** matrice A.*

Ukoliko postoji inverzna matrica matrice A, označavat ćemo je sa A^{-1}. Dakle, u tom slučaju vrijedi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{1.19}$$

Insistiranje na činjenici da je A kvadratna matrica ima potpuno opravdanje. Naime, iz same definicije inverzne matrice, tj. iz (1.19) i pravila P1. za množenje matrica, slijedi da matrice A i A^{-1} moraju imati sljedeću osobinu: koliko jedna od njih ima vrsta, druga mora imati isti broj kolona, što je moguće samo ako su one kvadratne matrice istog reda. Prema tome, *samo kvadratna matrica može imati inverznu matricu.* Međutim, važno je napomenuti da nema svaka kvadratna matrica svoju inverznu matricu. Zbog toga ćemo za kvadratnu matricu koja ima svoju inverznu matricu reći da je *regularna.* U suprotnom ćemo za nju reći da je *singularna.*
No, kako znati da li je data kvadratna matrica regularna prije nego odredimo da li ima inverznu matricu? Naime, iz (1.19) i osobine 7. determinanti, imamo

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1,$$

odakle slijedi da mora biti $\det A \neq 0$. Zbog toga je upravo uvjet $\det A \neq 0$ kriterij regularnosti matrice A, odnosno ako je determinanta kvadratne matrice različita od 0, matrica je regularna.

Navedimo sada najvažnije osobine inverzne matrice u obliku sljedećih tvrdnji.

Teorem 1.2 *Ako je kvadratna matrica A regularna, inverzna matrica A^{-1} je jedinstvena.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da, osim inverzne matrice A^{-1}, postoji još jedna inverzna matrica B ($B \neq A^{-1}$) matrice A. Tada, prema (1.19), vrijedi

$$AB = BA = I. \tag{1.20}$$

Pomnožimo li s lijeve strane (1.19) sa B, imamo

$$BAA^{-1} = BI = B. \tag{1.21}$$

Iz (1.20) je $BA = I$, te zamjenom u (1.21), dobijemo

$$IA^{-1} = B,$$

odnosno $A^{-1} = B$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $B \neq A^{-1}$. Dakle, ta pretpostavka nije tačna, tj. zaista je A^{-1} jedinstvena inverzna matrica. ■

Teorem 1.3 *a) Pretpostavimo da je kvadratna matrica A regularna. Tada vrijedi:*
1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, *tj matrica A je inverzna matrica matrici* A^{-1},
2. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.
b) Osim toga, ako su A i B regularne kvadratne matrice, tada vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dokaz. a) 1. Slijedi neposredno iz definicije inverzne matrice, odnosno poređenjem (1.19) sa

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = I.$$

2. Dokaz izostavljamo.
b) Prema definiciji inverzne matrice, treba pokazati da vrijedi

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = I.$$

Zaista, koristeći zakon asocijativnosti za množenje matrica, imamo:

$$\begin{aligned} \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

■

Prije nego kažemo na koji se način izračunava inverzna matrica neophodno je uvesti pojam *adjungirane matrice.*

Definicija 1.8 *Ako u kvadratnoj matrici* $A = [a_{ij}]$ *njene elemente* a_{ij} *zamijenimo odgovarajućim kofaktorima* A_{ij}, *dobit ćemo matricu* $cof\,(A) = [A_{ij}]$, *koju ćemo zvati* ***kofaktorskom matricom*** *matrice A. Matricu* $adj\,A = (cof\,(A))^{T}$ *nazivamo* ***adjungiranom matricom*** *matrice A.*

Sljedeći teorem, kojeg navodimo bez dokaza, daje nam formulu za izračunavanje inverzne matrice.

Teorem 1.4 *Ako je A regularna matrica reda n, tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\,A. \tag{1.22}$$

Primjer 1.13 *Naći inverznu matricu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Data matrica je regularna, jer je $\det A = 7 \neq 0$. Kofaktori matrice A su:

$$A_{11} = 3,\ A_{12} = -2,\ A_{21} = -(-2) = 2,\ A_{22} = 1,$$

pa imamo

$$cof\,(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema (1.22), tražena inverzna matrica je

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}. \quad \clubsuit$$

Napomena 1.5 *Zbog mogućnosti greške u izvođenju računanja inverzne matrice, korisno je napraviti provjeru jednakosti $A^{-1}A = I$. Tako bi u prethodnom primjeru ta provjera izgledala ovako:*

$$A^{-1}A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Znači da je u ovom slučaju dobijena inverzna matrica dobro izračunata.

Primjer 1.14 *Odrediti inverznu matricu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Kako je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 0 - 12 + 0 - 0 - 3 - 8 = -23 \neq 0,$$

matrica A je regularna. Izračunajmo kofaktore:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

Dalje je

$$cof\,(A) = \begin{bmatrix} -3 & 10 & -1 \\ 8 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adjA = (cof\,(A))^T = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 10 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix},$$

pa je tražena inverzna matrica

$$A^{-1} = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 10 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Provjeru ostavljamo čitateljima da je izvedu. ♣

Linearne matrične jednadžbe

Pokazat ćemo kako riješiti najjednostavnija dva oblika linearnih matričnih jednadžbi:

$$AX = B \ \text{ i } \ XA = B,$$

gdje su A i B date matrice i A je regularna, a X nepoznata matrica.

Uočimo prvo da se ove dvije jednadžbe istinski razlikuju, jer im lijeve strane nisu jednake u općem slučaju, budući da ne vrijedi zakon komutacije za množenje matrica. Zbog toga ih moramo zasebno i rješavati.

Riješimo prvo jednadžbu

$$AX = B. \tag{1.23}$$

Neophodno je da nam na lijevoj strani ostane samo matrica X, tj. treba se nekako "osloboditi" matrice A. Iskoristit ćemo drugu jednakost u (1.19). Dakle datu jednadžbu treba pomnožiti matricom A^{-1}, *ali s lijeve strane*, pa imamo

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

to jest

$$IX = A^{-1}B,$$

odnosno

$$X = A^{-1}B. \tag{1.24}$$

U slučaju druge jednadžbe

$$XA = B \tag{1.25}$$

neophodno je pomnožiti je *s desne strane* matricom A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1},$$

odakle je

$$XI = BA^{-1},$$

odnosno

$$X = BA^{-1}. \tag{1.26}$$

Uočimo da je vrlo važno procijeniti s koje strane treba izvršiti množenje inverznom matricom.

Primjer 1.15 *Naći nepoznatu matricu X iz jednadžbe*

$$AXB = C$$

ako su A i B regularne matrice (koje ne moraju biti istog reda - zašto?).

Rješenje. Pomnožimo prvo datu jednadžbu matricom A^{-1} s lijeve strane:

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C,$$

odakle je

$$XB = A^{-1}C.$$

Nakon množenja matricom B^{-1} s desne strane, posljednja jednadžba postaje

$$XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

odnosno

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Naravno, matrica C mora imati onoliko vrsta koliko matrica A ima kolona, odnosno onoliko kolona koliko matrica B ima vrsta. ♣

Primjer 1.16 *Riješiti matričnu jednadžbu*

$$2XA + 3X = B,$$

ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Data se jednadžba može napisati u obliku

$$X\,(2A + 3I) = B.$$

Neka je

$$C = 2A + 3I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},$$

pa posljednja jednadžba sada izgleda ovako

$$XC = B.$$

Nakon množenja matricom C^{-1} s desne strane, imamo

$$XCC^{-1} = BC^{-1},$$

odnosno

$$X = BC^{-1}.$$

Odredimo sada C^{-1}:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} adjC = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^T.$$

Tražena rješenje je

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{45} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 18 & 17 \end{bmatrix}. \quad \clubsuit$$

1.1.5 Linearna (ne)ovisnost matrica

Vrste i kolone proizvoljne matrice možemo smatrati odvojenim blokovima brojeva, tj. možemo ih smatrati matricama vrstama ili matricama kolonama. Zbog toga je pojam linearne ovisnosti ili neovisnosti vrsta ili kolona matrice (koji je bitan pri izračunavanja ranga matrice, o čemu će biti riječi u narednoj sekciji) ekvivalentan linearnoj ovisnosti ili neovisnosti odgovarajućih matrica vrsta ili matrica kolona.

Definicija 1.9 *Za matrice vrste (matrice kolone) $A_1, A_2, ..., A_n$ kažemo da su **linearno neovisne** ako za realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ iz jednakosti*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n = \boldsymbol{O} \tag{1.27}$$

*slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. U suprotnom, tj. ako matrice vrste (matrice kolone) nisu linearno neovisne, onda za njih kažemo da su **linearno ovisne**.*

U jednakosti (1.27) simbol $\boldsymbol{O}$ označava nula matricu vrstu (nula matricu kolonu). Naravno da se gornja definicija odnosi i na matrice proizvoljnog formata, ali tim se pitanjem nećemo baviti u ovoj knjizi.
Primijetimo da se linearna ovisnost matrica iz Definicije 1.9 postiže u slučaju kad iz jednakosti (1.27) slijedi da je bar jedan od koeficijenata $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ različit od nula.

Primjer 1.17 *Ispitati linearnu (ne)ovisnost matrica*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Formirajmo jednakost (1.27) u slučaju datih matrica:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Koristeći se pravilima množenja matrice skalarom, dobijamo da se prethodna jednakost može napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ 4\alpha_3 \\ 3\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno, sabiranjem matrica na lijevoj strani, dobijamo

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti dviju matrica, odavde slijedi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0, \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

odakle je

$$\alpha_1 = -\alpha_3 \;\text{ i }\; \alpha_2 = -\alpha_3,$$

iz čega slijedi da ne moraju svi koeficijenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ uvijek biti jednaki 0. Naime, možemo imati i ovakav izbor: $\alpha_3 = 1$, odakle onda slijedi da su: $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = -1$, što znači da su date matrice linearno ovisne. ♣

Primjer 1.18 *Ispitati linearnu (ne)ovisnost matrica:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Analogno prethodnom primjeru, imamo da iz jednakosti

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3\alpha_2 + 5\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno dobijamo sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0, \\ 3\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe posljednjeg sistema dobijamo

$$\alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_3,$$

pa zamjenom u trećoj jednadžbi, imamo

$$8\alpha_3 = 0,$$

tj. $\alpha_3 = 0$, kao jedinu mogućnost za α_3. Zbog toga je i $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, što znači da su date matrice linearno neovisne. ♣

1.1.6 Rang matrice

Pojam ranga matrice može se uvesti na različite načine, ali svi su oni međusobno ekvivalentni. Mi ćemo ovdje taj pojam uvesti pomoću pojma linearne neovisnosti vrsta, odnosno kolona, promatrane matrice. No, prije toga, navedimo sljedeću činjenicu (bez dokaza).

Teorem 1.5 *Maksimalan broj linearno neovisnih vrsta promatrane matrice jednak je maksimalnom broju linearno neovisnih kolona te matrice.*

Imajući na umu prethodnu činjenicu, dat ćemo sljedeću definiciju ranga matrice.

Definicija 1.10 *Pod pojmom* ***ranga matrice*** $A = [a_{ij}]$ *formata* $m \times n$*, podrazumijevamo maksimalan broj linearno neovisnih vrsta (kolona) te matrice.*

Rang matrice A označavat ćemo sa $r(A)$, $rang(A)$ ili $rangA$. Za matricu A formata $m \times n$ jasno je da vrijedi

$$rangA \leq \min\{m, n\}.$$

Pri izračunavanju ranga date matrice koristit ćemo tzv. *elementarne transformacije matrice*, koje podrazumijevaju sljedeće:

1. međusobnu zamjenu mjesta dvije vrste (kolone) matrice,
2. množenje svih elemenata bilo koje vrste (kolone) matrice nekim realnim brojem različitim od nule,
3. dodavanje elementima jedne vrste (kolone) odgovarajućih elemenata neke druge vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim brojem.

Primjenom elementarnih transformacija na datu matricu A, dobit će se nova matrica B koja ima isti rang kao i matrica A. Pri tome kažemo da su matrice A i B *ekvivalentne*, u oznaci $A \sim B$.
Za praktično određivanje ranga matrice ovdje ćemo koristiti samo elementarne transformacije matrice pomoću vrsta (razlog za to je praktične prirode, budući da je taj način znatno pogodniji pri rješavanju sistema linearnih jednadžbi, v. narednu sekciju). Ideja je da se data matrica A, čiji rang tražimo, elementarnim transformacijama svede na ekvivalentnu matricu B tzv. *trapeznog oblika*, što podrazumijeva da su joj svi elementi $b_{ij} = 0$ za $i > j$ (trapezni oblik podrazumijeva da svaka naredna vrsta matrice ima bar jednu vodeću nulu više od prethodne vrste). Iz trapeznog oblika ekvivalentne matrice moguće je lahko odrediti njen rang, odnosno rang polazne matrice. Naime, *broj vrsta* matrice B kod kojih nisu svi elementi jednaki nuli predstavlja *rang* matrice B, odnosno *rang* matrice A.

Primjer 1.19 *Odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Koristeći elementarne transformacije matrice, imamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} IIv-2Iv \\ \sim \\ IIIv-3Iv \\ IVv-5Iv \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} IIIv-2IIv \\ \sim \\ IVv-3IIv \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{IVv-IIIv}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posljednja matrica je trapeznog oblika i ima samo jednu vrstu sa svim nulama. Broj preostalih vrsta je 3 i to je rang polazne matrice. Dakle, $rangA = 3$. ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Provjeriti regularnost sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2a+b & 2a \\ 1 & a-b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a+3b & 1+b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Za koje vrijednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ su sljedeće matrice regularne:

$$A = \begin{bmatrix} 2a+1 & 2a+4 \\ 1 & a-2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2+3b & 1+b \\ 5 & -1 \end{bmatrix}?$$

3. Odrediti inverznu matricu svake od sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Odrediti inverznu matricu svake od sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & - & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Riješiti matrične jednadžbu $AX = B$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Riješiti matrične jednadžbu $XA = B$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -10 & 3 & 0 \\ 8 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

7. Naći nepoznatu matricu X iz jednadžbe $AXB = C$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Riješiti matričnu jednadžbu

$$2AX - 3A = 2B + X$$

ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}.$$

9. Riješiti matričnu jednadžbu

$$(adjA)\, AX - X = (\det A)\, I$$

ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Ispitati linearnu (ne)ovisnost matrica:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

11. Ispitati linearnu (ne)ovisnost matrica:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

12. Odrediti rang sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 9 & -2 & 10 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. Odrediti vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a+1 & a+2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ima minimalan rang.

1.2 Sistemi linearnih algebarskih jednadžbi

Razmatrat ćemo sistem linearnih algebarskih jednadžbi u općem (tzv. pravougaonom) obliku sa m jednadžbi i n nepoznanica $x_1, x_2, ..., x_n$ kao skup jednadžbi oblika:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.28}$$

gdje su a_{ij} i b_i ($i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$) dati realni brojevi. Brojevi a_{ij} se zovu koeficijentima uz nepoznanice, dok za brojeve b_i kažemo da su slobodni članovi. Ako je barem jedan od slobodnih članova različit od nule, sistem ćemo zvati *nehomogenim,* a ako je $b_1 = ... = b_m = 0$, za sistem kažemo da je *homogeni.* O homogenim sistemima bit će posebno riječi na kraju ove sekcije.

Definicija 1.11 *Svaka uređena n-torka realnih brojeva* $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *sa osobinom da sistem (1.28) bude zadovoljen ako* x_1 *zamijenimo sa* ξ_1, x_2 *sa* ξ_2, ... , x_n *sa* ξ_n*, nazivamo* ***rješenjem*** *sistema (1.28).*

Definicija 1.12 *Za sistem (1.28) kažemo da je* ***saglasan*** *ili* ***rješiv*** *(moguć ili neprotivrječan) ako ima rješenje. Ukoliko sistem (1.28) nema rješenja, za njeg kažemo da je* ***nesaglasan*** *(protivrječan ili nemoguć)*

Vrlo je važno upamtiti sljedeće: *sistem (1.28), u slučaju da je saglasan, može imati ili samo jedno rješenje (kažemo jedinstveno rješenje) ili beskonačno mnogo rješenja (dakle,* ***nikad*** *dva, tri, ... , tj. konačno mnogo rješenja).*
Riješiti sistem (1.28) znači ili naći sva njegova rješenja ako je saglasan ili ustanoviti da on nije saglasan. Za dva sistema linearnih algebarskih jednadžbi čija se rješenja u potpunosti poklapaju (tj. imaju isti skup rješenja) kažemo da su *ekvivalentni.*

Sistem (1.28) se može napisati i u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

odnosno u obliku matrične jednadžbe

$$AX = B,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Specijalno, kad je $m = n$, sistem (1.28) je kvadratni i posebno ćemo ga razmatrati u sklopu ove opće teorije o sistemima linearnih algebarskih jednadžbi.
Prvi zadatak pri rješavanju sistema (1.28) jeste ustanoviti da li je on saglasan ili nije. Nakon toga, ako je saglasan, pristupa se zaključivanju o broju njegovih rješenja i određivanju tih rješenja. U tu svrhu uključit ćemo matrični račun u igru te pitanje saglasnosti sistema ustanoviti korištenjem tzv. *Kronecker*[1]*-Capellievog*[2] *teorema.*

1.2.1 Kronecker-Capelliev teorem

Označimo sa $A_p = (A \mid B)$ *proširenu matricu* sistema (1.28) koja ima $n+1$ kolonu, pri čemu se prvih n kolona poklapa s odgovarajućim kolonama matrice A, dok je

[1] L. Kronecker, njemački matematičar, 1823-1891.
[2] A. Capelli, italijanski matematičar, 1855-1910.

$(n+1)$-va kolona identična matrici koloni B. Dakle,

$$A_p = (A \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Teorem 1.6 ***(Kronecker-Capelli)*** *Sistem (1.28) je saglasan ako i samo ako je*

$$rangA = rangA_p. \tag{1.29}$$

Dakle, ako je uvjet (1.29) zadovoljen, tada sistem (1.28) ima rješenje. Ostaje pitanje da li taj sistem ima jedinstveno rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja i kako ih odrediti. Pretpostavit ćemo da je $m \geq n$ (razmatranje u slučaju $m \leq n$ je slično). Označimo li rang matrice A, odnosno matrice A_p, sa r, tj.

$$rangA = rangA_p = r,$$

tada su moguća dva slučaja:

1. $r = n$ (sistem (1.28) ima jedinstveno rješenje),
2. $r < n$ (sistem (1.28) ima beskonačno mnogo rješenja).

1. Slučaj: $r = n$

Ovo znači da se, nakon primjene elementarnih transformacija samo vrsta, matrica A_p svela na matricu oblika:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right],$$

gdje imamo $m - n$ posljednjih vrsta sa svim nulama. To, pak, znači da se sistem (1.28) sveo na ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & \vdots & \\ a'_{nn}x_n & = & b'_n, \end{array} \tag{1.30}$$

pri čemu mora biti $a_{ii} \neq 0$ za sve $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Uočimo da je sistem (1.30) kvadratni sistem, tj. ima jednak broj jednadžbi i nepoznanica. Sistem ovog oblika se jednostavno rješava "natraške". Naime, najednostavnija je posljednja jednadžba tog sistema i iz nje se odmah izračuna nepoznanica x_n. Pretposljednja jednadžba sistema sadrži dvije nepoznanice, x_n i x_{n-1}. No, zamjenom dobijene vrijednosti za x_n, pretposljednja jednadžba ima samo jednu nepoznanicu x_{n-1}, koju jednostavno izračunamo. Nastavljajući ovaj postupak, krećući se prema prvoj jednadžbi sistema (1.30), izračunamo i preostale nepoznanice: $x_{n-2}, ..., x_2, x_1$. Time zaključujemo da sistem (1.28) ima jedinstveno rješenje. Metod koji smo koristili da dobijemo sistem (1.30) nazivamo *Gaussovim*[3] *metodom.*

Primjer 1.20 *Dat je sistem linearnih algebarskih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga Gaussovim metodom.

Rješenje. Primijenimo Kronecker-Capelliev teorem, što znači da treba prvo odrediti rang matrica A i A_p. Imamo

$$A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} IIv - 2Iv \\ \sim \\ IIIv - 3Iv \\ IVv - 3Iv \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} 5IIIv - 4IIv \\ \sim \\ IVv - IIv \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dakle, $rangA = rangA_p = 3$, pa je sistem saglasan. Na osnovu ovoga vidimo da je dati sistem ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ -5x_2 + 4x_3 &= -1 \\ -6x_3 &= -6. \end{aligned}$$

[3] J.C.F. Gauss, njemački matematičar, 1777-1855.

Iz posljednje jednadžbe slijedi da je $x_3 = 1$. Zamjenom te vrijednosti u drugu jednadžbu posljednjeg sistema, imamo

$$-5x_2 + 4 = -1,$$

odakle je $x_2 = 1$. Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti $x_2 = 1$ i $x_3 = 1$ u prvu jednadžbu, dobije se

$$x_1 + 2 - 1 = 2,$$

odakle je $x_1 = 1$. Prema tome, dati sistem ima jedinstveno rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$. ♣

No, primijetimo da smo sistem (1.30) mogli riješiti i nekim drugim metodom, budući da je to kvadratni sistem. Navešćemo još dva metoda: *matrični metod* i *metod determinanti* (*Cramerov metod*) za rješavanja kvadratnih sistema. Kvadratni sistem je oblika

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.31}$$

On se može napisati u obliku matrične jednadžbe

$$AX = B, \tag{1.32}$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Teorem 1.7 *Kvadratni sistem linearnih algebarskih jednadžbi (1.31) ima jedinstveno rješenje ako je matrica A regularna.*

Dokaz. Budući da je matrica A regularna, postoji njoj inverzna matrica A^{-1}. Množenjem sa A^{-1} matrične jednadžbe (1.32) s lijeve strane, imamo

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

odnosno

$$X = A^{-1}B,$$

a to i jeste jedinstveno rješenje sistema (1.31) (jer je matrica A^{-1} jedinstvena). ■

Dakle, ako dati kvadratni sistem zapišemo u obliku matrične jednadžbe i ako je zadovoljena pretpostavka prethodnog teorema, rješavanjem matrične jednadžbe dobijemo i rješenje datog sistema. Taj postupak je poznat kao *matrični metod* rješavanja kvadratnog sistema linearnih algebarskih jednadžbi.

Primjer 1.21 *Dat je sistem*

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z &= 5 \\ x-2y+z &= -1 \\ 5x+y-3z &= 6. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga matričnim metodom.

Rješenje. Kako je

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 3 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right. = 12+15-4-40-2+9=-10,$$

matrica A je regularna, pa dati sistem ima jedinstveno rješenje u obliku

$$X = A^{-1}B.$$

Izračunajmo inverznu matricu A^{-1}. Odredimo prvo njene kofaktore

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 8,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 14,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7. \end{aligned}$$

Dalje je

$$cof\,(A) = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 5 & 14 & 13 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj A = (cof\,(A))^T = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 8 & 14 & -6 \\ 11 & 13 & -7 \end{bmatrix},$$

pa je tražena inverzna matrica

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 8 & 14 & -6 \\ 11 & 13 & -7 \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednadžbe je

$$X = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 8 & 14 & -6 \\ 11 & 13 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno rješenje datog sistema je $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$. ♣

Drugi metod za rješavanje kvadratnog sistema (1.31) je *metod determinanti* ili *Cramerov metod*, a baziran je na sljedećem Cramerovom[4] teoremu.

Teorem 1.8 ***(Cramer)*** *Ako je* $\det A \neq 0$*, sistem (1.32), odnosno (1.31), ima jedinstveno rješenje* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *dato sa*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k \in \{1, 2, ..., n\},$$

gdje se matrica A_k *(*$k \in \{1, 2, ..., n\}$*) dobije zamjenom* k*-te kolone matrice* A *kolonom slobodnih članova, tj. matricom* B*.*

Dokaz. Prema Teoremu 1.7 i Laplaceovom razvoju determinante po proizvoljnoj koloni (1.17), imamo

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odavde, koristeći definiciju jednakosti matrica, slijedi

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{1.33}$$

■

Primjer 1.22 *Dat je sistem jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

[4] G. Cramer, švicarski matematičar, 1704-1752.

Ispitati saglasnost datog sistema i u slučaju saglasnosti riješiti ga Cramerovim metodom.

Rješenje. Provjerimo da li je $\det A \neq 0$, jer ako to bude zadovoljeno, sistem će biti saglasan, a ako ne, onda treba koristiti Kronecker-Capelliev teorem. Kako je

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & -2 \end{array}\right. = 30 + 8 - 4 + 5 + 8 + 24 = 71 \neq 0,$$

dati sistem je saglasan i ima jedinstveno rješenje. Izračunajmo determinante $\det A_k$ za $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\det A_1 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -2 \end{array}\right. = 120 + 0 + 2 - 0 + 32 - 12 = 142,$$

$$\det A_2 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right. = 6 + 16 + 0 + 1 - 0 + 48 = 71,$$

$$\det A_3 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right. = 0 - 2 - 16 + 20 - 2 - 0 = 0.$$

Dakle, prema (1.33), traženo rješenje je

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{142}{71} = 2, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{71}{71} = 1, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{0}{71} = 0. \quad \clubsuit$$

Napomena 1.6 *Vrlo često se Cramerov metod koristi u diskusiji rješenja kvadratnog sistema linearnih algebarskih jednadžbi s parametrima. U tom slučaju imamo sljedeću diskusiju:*

1. *Ako je* $\det A \neq 0$, *sistem ima jedinstveno rješenje dato u obliku (1.33).*

2. *Ako je* $datA = 0$, *a barem jedna* $\det A_k \neq 0$ $(k \in \{1, 2, ..., n\})$, *sistem je protivrječan, tj. nema rješenja.*

3. *Ako je* $\det A = \det A_1 = ... = \det A_n = 0$, *sistem je neodređen, tj. ili ima beskonačno mnogo rješenja ili uopće nema rješenja (što se provjerava direktno primjenom Kronecker-Capellievog teorema, zamjenom dobijenih vrijednosti za parametre u dati sistem).*

Odgovarajući primjer sa diskusijom rješenja navest ćemo nešto kasnije u okviru 2. Slučaja.

2. Slučaj: $r < n$
Ovo znači da se, nakon primjene elementarnih transformacija samo vrsta, matrica A_p svela na matricu oblika:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right],$$

gdje imamo $m-r$ posljednjih vrsta sa svim nulama. Znači da se sistem (1.28) sveo na ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1r}x_r + a'_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + ... + a'_{2r}x_r + a'_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{rn}x_n &= b'_r. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Ovaj sistem se može svesti na kvadratni, smatrajući da imamo $s = n - r$ nepoznanica "viška". Možemo pod tih s nepoznanica smatrati $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ koje nazivamo *slobodnim* i možemo im pridružiti proizvoljne realne vrijednosti: $x_{r+1} = \alpha_1, x_{r+2} = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_s$. Tako dobijemo sljedeći kvadratni sistem

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1r}x_r &= b'_1 - a'_{1,r+1}\alpha_1 - ... - a'_{1n}\alpha_s \\ a'_{22}x_2 + ... + a'_{2r}x_r &= b'_2 - a'_{2,r+1}\alpha_1 - ... - a'_{2n}\alpha_s \\ &\vdots \\ a'_{rr}x_r &= b'_r - a'_{r,r+1}\alpha_1 - ... - a'_{rn}\alpha_s. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Sada se sistem (1.35) može riješiti ili Cramerovim metodom ili matričnim metodom. Svaka od nepoznanica $x_1, x_2, ..., x_r$ bit će izražena preko slobodnih nepoznanica (koje mogu uzimati proizvoljne realne vrijednosti, dakle njih beskonačno mnogo), pa sistem (1.28) u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 1.23 *Dat je sistem jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2\\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -3\\
3x_1 - x_2 - 3x_3 + 8x_4 &= -1\\
x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5.
\end{aligned}
$$

Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga proizvoljnim metodom.

Rješenje. Prvo ispitajmon saglasnost datog sistema. U tu svrhu imamo

$$
A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -2 & 5 & -3\\ 3 & -1 & -3 & 8 & -1\\ 1 & -5 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right]
\begin{array}{c} IIv-2Iv\\ \sim\\ IIIv-3Iv\\ IVv-Iv \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & 0 & -1 & -7\\ 0 & -7 & 0 & -1 & -7\\ 0 & -7 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{c} IIIv-IIv\\ \sim\\ IVv-IIv \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & 0 & -1 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],
$$

odakle je $rangA = rangA_p = 2 < 4 = n$. Koristeći ovo, dobijamo sistem koji je ekvivalentan datom:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2\\
-7x_2 \qquad\quad - x_4 &= -7,
\end{aligned}
$$

u kojem imamo 2 "viška" nepoznanice. Ovdje kao slobodne nepoznanice možemo uzeti x_3 i x_4 i pridružiti im proizvoljne realne brojeve: $x_3 = \alpha_1, x_4 = \alpha_2$. Tako dobijemo kvadratni sistem

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 2 + \alpha_1 - 3\alpha_2\\
-7x_2 &= -7 + \alpha_2.
\end{aligned}
$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x_2 = \dfrac{7-\alpha_2}{7}$, pa uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu, dobijamo $x_1 = \dfrac{7\alpha_1 - 19\alpha_2}{7}$. Dakle, dati sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika

$$
(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{7\alpha_1 - 19\alpha_2}{7}, \frac{7-\alpha_2}{7}, \alpha_1, \alpha_2\right),
$$

gdje su α_1 i α_2 proizvoljni realni brojevi. ♣

Navedimo sada najavljeni primjer diskusije rješenja sistema linearnih algebarskih jednadžbi s parametrima.

Primjer 1.24 *U ovisnosti o realnom parametru m diskutirati rješenje sistema jednadžbi*

$$\begin{aligned} (m+1)\,x_1 - mx_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} m+1 & -m & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5\,(m+1)\,, \det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4\,(m+1)\,,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\,(m+1)\,, \det A_3 = \begin{vmatrix} m+1 & -m & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m+1.$$

Diskusija:

1. Ako je $\det A = 5\,(m+1) \neq 0$, tj. $m \neq -1$, dati sistem ima jedinstveno rješenje dato sa

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{4\,(m+1)}{5\,(m+1)} = \frac{4}{5},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4\,(m+1)}{5\,(m+1)} = \frac{4}{5}, \\ x_3 &= \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{m+1}{5\,(m+1)} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

2. Ako je $m = -1$, dati sistem je oblika

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Za njeg vrijedi

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{IIv \leftrightarrow Iv}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \\ &\overset{IIIv+Iv}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \overset{IIIv+IIv}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \end{aligned}$$

tj. $rangA = rangA_p = 2 < 3 = n$, pa sistem (1.36) ima beskonačno mnogo rješenja i on je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Uzimajući varijablu x_3 za slobodnu kao $x_3 = \alpha$, gdje je α proizvoljan realan broj, imamo

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= -2 - 2\alpha \\ x_2 &= 1 - \alpha, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je rješenje sistema (1.36) svaka uređena trojka brojeva $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1+3\alpha}{2}, 1-\alpha, \alpha\right)$, α proizvoljan realan broj. ♣

1.2.2 Homogeni sistemi

Kako smo na početku ove sekcije naveli, homogeni kvadratni sistem linearnih algebarskih jednadžbi ima oblik

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Očigledno je da ovaj sistem uvijek ima jedno rješenje $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$, koje nazivamo *trivijalnim rješenjem* homogenog sistema (1.37). Prema Cramerovom teoremu, trivijalno rješenje će biti i jedino rješenje sistema (1.37) ako je $\det A \neq 0$. No, ako je $\det A = 0$, sistem ima beskonačno mnogo rješenja, dakle, i netrivijalnih.

Primjer 1.25 *Odrediti parametar k tako da sistem*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ kx + y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalnih rješenja.

Rješenje. Da bi sistem imao netrivijalnih rješenja mora biti $\det A = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4k + 11 = 0,$$

odnosno $k = -\dfrac{11}{4}$. ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Dat je sistem linearnih algebarskih juednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga Gaussovim metodom.

2. Dat je sistem

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 4z &= -2 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= -1. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga matričnim metodom.

3. Dat je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i u slučaju saglasnosti riješiti ga Cramerovim metodom.

4. Dat je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\
x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 4 \\
3x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 3.
\end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i u slučaju saglasnosti riješiti ga proizvoljnim metodom.

5. Dat je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned}
5x_1 - 8x_2 + 10x_3 - 5x_4 &= 2 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\
x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 4 \\
3x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 3.
\end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i u slučaju saglasnosti riješiti ga proizvoljnim metodom.

6. U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje sistema jednadžbi

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \\
x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\
ax_1 + x_2 + x_3 &= 1.
\end{aligned}$$

7. Odrediti realni parametar m tako da sistem

$$\begin{aligned}
x - 2y + mz &= 0 \\
x + y - 2mz &= 0 \\
2x + 4y + 3z &= 0
\end{aligned}$$

ima netrivijalnih rješenja.

1.3 Primjene u ekonomiji

Razmotrit ćemo primjenu matričnog računa u rješavanju sistema linearnih algebarskih jednadžbi u nekim jednostavnijim modelima u ekonomiji: linearni model tržišne ravnoteže, model nacionalnog dohotka i međusektorski model (input-output analiza).

1.3.1 Model tržišne ravnoteže

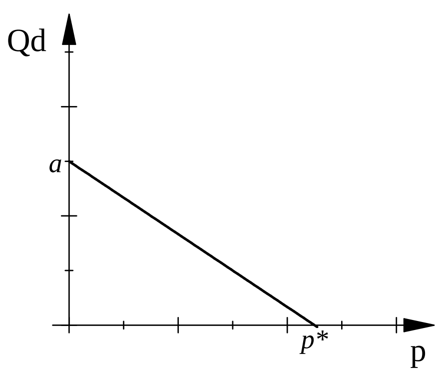
Nejjednostavniji model tržišne ravnoteže je linearni model. Mi ćemo prvo razmotriti model tržišne ravnoteže u slučaju jedne robe, a zatim i više roba. To podrazumijeva ispitivanje određivanja cijene robe na odvojenom tržištu.
Dakle, u slučaju razmatranja jedne robe razmotrimo sljedeće varijable: količina potražnje robe (Q_d), količina ponude robe (Q_s) i cijenu te robe (p). Naravno, na samom početku postavlja se pitanje nametanja uvjeta ravnoteže. Ovdje ćemo taj uvjet označiti kao: *višak potražnje je jednak nuli, tj.*

$$Q_d - Q_s = 0. \tag{1.38}$$

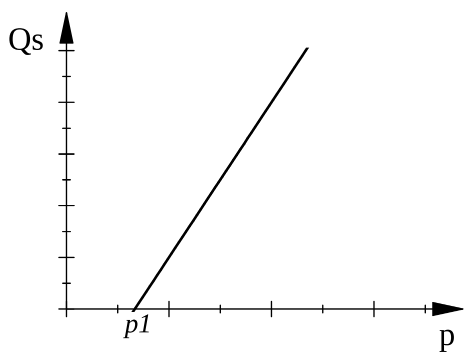
Pretpostavit ćemo da su Q_d i Q_s linearne funkcije cijene p, što je najjednostavniji slučaj i upravo to i daje naziv modelu - linearni. Logično je zahtijevati da je potražnja opadajuća funkcija cijene, tj. s porastom cijene p opada interes (kupaca) za potražnjom te robe na tržištu, tako da na određenom nivou cijene p^* ta potražnja postaje 0. Također, smatrat ćemo da je potražnja maksimalna i iznosi neku vrijednost a ($a > 0$) u slučaju kad je cijena $p = 0$. Linearna funkcija potražnje Q_d u ovom slučaju ima oblik

$$Q_d(p) = a - bp, \quad (a > 0, b > 0),$$

tj. funkcija potražnje ima negativan nagib $-b$ (koeficijent koji stoji uz neovisnu varijablu p) i presjek s vertikalnom osom u a, v. Sliku TR1.



Slika TR1: Funkcija potražnje (linearna)

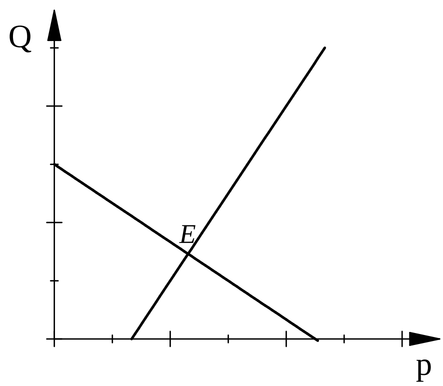


Slika TR2: Funkcija ponude (linearna)

S druge strane, zahtijevat ćemo da je ponuda rastuća funkcija cijene p, tj. da s porastom cijene raste i ineteres za ponudom robe na tržištu od strane ponuđača robe (proizvođača, odnsono prodavca). Jasno je da se ponuđaču isplati nuditi robu na tržištu tek kad ona dostigne određeni nivo p_1. Zbog toga će linearna funkcija ponude u ovom slučaju biti oblika

$$Q_s(p) = -c + dp, \quad (c > 0, d > 0),$$

tj. funkcija ponude ima pozitivan nagib d i presjek s horizontalnom osom u $p_1 = \frac{c}{d}$, v. Sliku TR2.



Slika TR3: Ekvilkibrijum

Uočimo da je kod obje funkcije neovisna varijabla cijena p i ona je predstavljena na horizontalnoj osi, dok je funkcija količine (ponude ili potražnje) predstavljena na vertikalnoj osi. Ta će praksa ubuduće biti vrlo česta.
Prema tome, matematička interpretacija linearnog modela tržišne ravnoteže je:

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_s, \\ Q_d(p) &= a - bp, \\ Q_s(p) &= -c + dp. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Odavde se može dobiti samo jedna jednadžba (s jednom nepoznanicom p):

$$a - bp = -c + dp,$$

odnosno

$$(b + d)\, p = a + c.$$

Kako je $b + d \neq 0$, jasno je da je tržišna ravnotežna cijena

$$\overline{p} = \frac{a + c}{b + d}. \tag{1.40}$$

Primijetimo da je $\overline{p} > 0$, što je i logično.
S druge strane, ravnotežnu količinu $\overline{Q}$ dobijamo ako ravnotežnu cijenu uvrstimo u drugu ili treću jednadžbu našeg modela (1.39). Tako je

$$\overline{Q} = -c + d\frac{a+c}{b+d} = \frac{-c\,(b+d) + d\,(a+c)}{b+d} = \frac{ad-bc}{b+d}.$$

Naravno, zahtijevamo da je $\overline{Q} > 0$, da bi ovaj model imao ekonomskog smisla. To znači da treba da je $ad > bc$. Na taj smo način, uz taj uvjet, dobili jedinstvenu tačku tržišne ravnoteže ili tržišni ekvilibrijum: $E = \left(\overline{p}, \overline{Q}\right) = \left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{ad-bc}{b+d}\right)$, koja se nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema (Slika TR3).

Nešto složeniji slučaj tržišne ravnoteže imamo sa dvije ili više roba. Kako nam ovdje nije cilj razmatranja formiranja matematičkog modela, nego samo njegovo rješavanje kad nam je poznat, tako razmotrimo sljedeći linearni model:

$$\begin{aligned} Q_{d1} &= Q_{s1}, \\ Q_{d1} &= \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \\ Q_{s1} &= \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, \\ Q_{d2} &= Q_{s2}, \\ Q_{d2} &= \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2, \\ Q_{s2} &= \delta_0 + \delta_1 p_1 + \delta_2 p_2. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Ovo je sistem linearnih algebarskih jednadžbi s četiri nepoznanice: p_1, p_2, Q_1, Q_2 i njegovim rješavanjem dobiju se ravnotežne cijene $\overline{p}_1$ i $\overline{p}_2$, te ravnotežne količine ponude, odnosno potražnje, $\overline{Q}_1$ i $\overline{Q}_2$. Sistem (1.41) se jednostavno svodi na sistem od dvije nepoznanice (p_1 i p_2)

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 &= \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, \\ \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 &= \delta_0 + \delta_1 p_1 + \delta_2 p_2, \end{aligned}$$

koji se može predstaviti u uobičajenoj formi

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1)\, p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, p_2 = \beta_0 - \alpha_0, \\ (\gamma_1 - \delta_1)\, p_1 + (\gamma_2 - \delta_2)\, p_2 = \gamma_0 - \delta_0. \end{cases} \tag{1.42}$$

Riješimo ga matričnim metodom. Naime, sistem (1.42) može se napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \\ \gamma_0 - \delta_0 \end{bmatrix}.$$

Ako pretpostavimo da je

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix} = (\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_2 - \delta_2) - (\alpha_2 - \beta_2)(\gamma_1 - \delta_1) \neq 0,$$

matrica

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix}$$

će biti invertibilna, pa sistem (1.42) ima jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \\ \gamma_0 - \delta_0 \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

Adjungirana matrica matrice A je

$$adj A = \begin{bmatrix} \gamma_2 - \delta_2 & -(\gamma_1 - \delta_1) \\ -(\alpha_2 - \beta_2) & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \gamma_2 - \delta_2 & -(\alpha_2 - \beta_2) \\ -(\gamma_1 - \delta_1) & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} adj A \\ &= \frac{1}{(\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_2 - \delta_2) - (\alpha_2 - \beta_2)(\gamma_1 - \delta_1)} \begin{bmatrix} \gamma_2 - \delta_2 & -(\alpha_2 - \beta_2) \\ -(\gamma_1 - \delta_1) & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uvedimo skraćene oznake (zbog jednostavnijeg zapisa):

$a_1 = \alpha_1 - \beta_1, a_2 = \alpha_2 - \beta_2, c_1 = \gamma_1 - \delta_1, c_2 = \gamma_2 - \delta_2, b_1 = \beta_0 - \alpha_0, b_2 = \gamma_0 - \delta_0.$

Prema (1.43), imamo

$$\begin{bmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} \begin{bmatrix} c_2 & -a_2 \\ -c_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} \begin{bmatrix} c_2 b_1 - a_2 b_2 \\ -c_1 b_1 + a_1 b_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\overline{p}_1 = \frac{c_2 b_1 - a_2 b_2}{a_1 c_2 - a_2 c_1}, \quad \overline{p}_2 = \frac{-c_1 b_1 + a_1 b_2}{a_1 c_2 - a_2 c_1}.$$

Naravno, pri tome, da bi dobijeni rezultati imali ekonomsku opravdanost, tj. da bi ravnotežne cijene bile pozitivne, neophodno je da oba brojnika imaju isti predznak kao nazivnik, tj.

$$\operatorname{sgn}(c_2 b_1 - a_2 b) = \operatorname{sgn}(-c_1 b_1 + a_1 b) = \operatorname{sgn}(a_1 c_2 - a_2 c_1) \neq 0,$$

gdje funkcija $\operatorname{sgn}(x)$ (čitamo signum od x) definirana ovako

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ -1 & \text{za } x < 0 \end{cases}.$$

Neposrednim uvrštavanjem u drugu (ili treću) i petu (ili šestu) jednadžbu polaznog sistema (1.41), dobijaju se i tržišne ravnotežne količine $\overline{Q}_1$ i $\overline{Q}_2$.

1.3.2 Model nacionalnog dohotka

Postoji mnogo modela nacionalnog dohotka, a mi ćemo ovdje razmatrati sljedeći, koji je predstavljen sistemom linearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G, \\ C &= a + b\left(Y - T_0\right), \\ G &= gY. \end{aligned}$$

Pri tome je Y varijabla nacionalnog dohotka, C je varijabla ukupne potrošnje pojedinaca i domaćinstava, a G ukupna vladina potrošnja, I_0 predstavlja nivo investiranja, T_0 označava nivo poreza (I_0 i T_0 su poznate veličine), dok su a, b, g pozitivni parametri koji zadovoljavaju uvjete: $a > 0, 0 < b < 1, 0 < g < 1$. Rješavanjem datog sistema jednadžbi dobijamo ekvilibrijum nacionalnog dohotka kao trojku $\left(\overline{Y}, \overline{C}, \overline{G}\right)$. Upotrijebimo Cramerov metod, nakon što dati model napišemo u prikladnijem obliku:

$$\begin{aligned} Y - C - G &= I_0, \\ -bY + C \qquad &= a - bT_0, \\ -gY \qquad + G &= 0. \end{aligned}$$

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - b - g,$$

i ako pretpostavimo da je $1 - b - g \neq 0$, po Cramerovom teoremu sistem ima jedinstveno rješenje. Dalje je

$$D_1 = \begin{vmatrix} I_0 & -1 & -1 \\ a - bT_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I_0 + a - bT_0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & I_0 & -1 \\ -b & a - bT_0 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - g)\left(a - bT_0\right) + bI_0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & a - bT_0 \\ -g & 0 & 0 \end{vmatrix} = g\left(a - bT_0 + I_0\right),$$

pa je

$$\overline{Y}=\frac{a-bT_0+I_0}{1-b-g},\ \overline{C}=\frac{(1-g)(a-bT_0)+bI_0}{1-b-g},\ \overline{G}=\frac{g(a-bT_0+I_0)}{1-b-g}.$$

Da bi rješenje imalo ekonomskog smisla sve komponente ekvilibrijuma nacionalnog dohotka moraju biti pozitivne. Logično je zahtijevati (tako se i radi u praksi, zašto?) da je $b+g<1$. Dodatno ograničenje na parametre je $a-bT_0+I_0>0$.

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Neka je zadan model tržišta

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_s, \\ Q_d(p) &= 14-5p, \\ Q_s(p) &= -6+10p. \end{aligned}$$

Naći ekvilibrijum tržišta $\left(\overline{p},\overline{Q}\right)$.

2. Zadane su sljedeće funkcije potražnje i ponude za model tržišta dvaju roba:

$$\begin{aligned} &Q_{d1}=18-3p_1+p_2, && Q_{d2}=12+2p_1-2p_2, \\ &Q_{s1}=-2+4p_1, && Q_{s2}=-2+3p_2. \end{aligned}$$

Odrediti ravnotežno stanje tržišta.

3. Zadan je sljedeći model nacionalnog dohotka:

$$\begin{aligned} Y &= C+I_0+G_0, \\ C &= a+b(Y-T), \quad (a>0, 0<b<1) \\ T &= d+tY, \quad (d>0, 0<t<1) \end{aligned}$$

pri čemu je T varijabla poreza, a t stopa poreza na dohodak (ostale varijable su iste kao u opisanom modelu nacionalnog dohotka). Odrediti ekvilibrijum (ravnotežno stanje) nacionalnog dohotka, koristeći: a) matrični metod, b) Cramerov metod, c) metod supstitucije.

4. Odrediti ekvilibrijum nacionalnog dohotka (sa dvije varijable):

$$\begin{aligned} Y &= C+I_0+G_0, \\ C &= 25+6Y^{\frac{1}{2}}, \\ I_0 &= 16, \\ G_0 &= 14. \end{aligned}$$

5. Dat je sljedeći model nacionalnog dohotka:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G_0, \\ C &= a + bY, \quad (a > 0, 0 < b < 1) \\ I &= iY, \qquad (0 < i < 1) \\ G_0 &= 100, \end{aligned}$$

pri čemu je I varijabla investicija. Odrediti ekvilibrijum nacionalnog dohotka. Uz koje uvjete postoji rješenje?

1.3.3 Input-output analiza

Jedna vrlo praktična primjena sistema linearnih algebarskih jednadžbi i matričnog računa općenito jeste upravo u tzv. *međusektorskom modelu* ili *input-output analizi.* Ovdje ćemo se upravo i posvetiti pitanju te primjene, a ne detaljnom proučavanju input-output analize. Napomenimo da pod *inputom* podrazumijevamo ono što ulazi u neki proces, odnosno u razmatrane sektore u ekonomiji, a pod *outputom* podrazumijevamo ono što izlazi iz razmatranog procesa, odnosno proizvode razmatranih sektora.
Historijski gledano, potreba za ovom vrstom modeliranja (odnosno analize) pojavila se ubrzo nakon izbijanja II svjetskog rata kada je američki predsjednik F. D. Roosevelt izdao nalog za proizvodnju 50 000 aviona, što je zahtijevalo istovremeno i veliku proizvodnju aluminija u državi. Tako velika proizvodnja aluminija zahtijevala je masivne sabirnice kroz koje bakar provodi struju i nepredviđene nestašice bakra prijetile su cijelom rasporedu proizvodnje. Vlada je za prevazilaženje te krize zaključila da treba zamijeniti bakar srebrom. Ali odakle dobiti toliku količinu srebra? Pozajmili su ga iz Fort Knoxa i 50 000 aviona je bilo proizvedeno, a krajnji rezultat njihove upotrebe u ratu je mnogo značajniji. Ovo nam pokazuje da se nekada, a posebno u ratnim okolnostima, ekonomija jedne države može uspješno planirati vodeći računa o proizvodnji svakog outputa iz pojedinog sektora (kao što je proizvodnja aviona zahtijevala određene količine aluminija, proizvodnja aluminija zahtijevala proizvodnju bakra i struje itd.). Gotovo svaki od proizvoda bilo kojeg sektora se koristi za uspješnu reprodukciju u ostalim sektorima i eventualno u svom sektoru. Međutim, obično se osim ovih sektora u međusektorski model uključuje i jedan tzv. "otvoreni sektor" (npr. domaćinstva) koji egzogeno predstavlja *finalnu potražnju* za proizvodom svakog pojedinog sektora i koja nije utrošak ni za jedan sektor. U tom se slučaju model naziva *otvorenim.*

Pretpostavimo sada da u jednoj ekonomiji egzistira n sektora. Uvedimo oznake:

Q_i - ukupna količina outputa i-tog sektora ($i \in \{1, 2, ..., n\}$),

Q_{ij} - količina outputa iz i-tog sektora neophodna za proces reprodukcije u j-tom sektoru ($i, j \in \{1, 2, ..., n\}$),

q_i - finalna potražnja outputa i-tog sektora ($i \in \{1, 2, ..., n\}$).

Ključna pretpostavka je: *Q_i potrošiti ili na međusektorsku potrošnju Q_{ij} ili na finalnu potražnju q_i*. Pri tome ćemo zahtijevati da imamo tržišnu ravnotežu, tj. da je ponuda jednaka potražnji. To se može predstaviti sljedećim sistemom jednadžbi

$$\left.\begin{array}{c} Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + ... + Q_{1n} + q_1 \\ Q_2 = Q_{21} + Q_{22} + ... + Q_{2n} + q_2 \\ \vdots \\ Q_n = Q_{n1} + Q_{n2} + ... + Q_{nn} + q_n \end{array}\right\}, \tag{1.44}$$

odnosno shematski sljedećom tzv. input-output (I-O) tabelom:

Q_i	Q_{ij}				q_i
Q_1	Q_{11}	Q_{12}	...	Q_{1n}	q_1
Q_2	Q_{21}	Q_{22}	...	Q_{2n}	q_2
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
Q_n	Q_{n1}	Q_{n2}	...	Q_{nn}	q_n

Uočimo sljedeću važnu činjenicu: za proizvodnju svake jedinice proizvoda u j-tom sektoru potrebna je konstantna količina proizvoda iz $i-$tog sektora. Da bi to bilo osigurano treba da su tehnološki uvjeti proizvodnje nepromjenjivi, budući da je inače svaka proizvodnja vezana za neku tehnologiju. Na taj način neophodno je uvesti pojam *tehničkih koeficijenata (tehničkih normativa). Označavat ćemo ih sa a_{ij}* ($i, j \in \{1, 2, ..., n\}$) i, budući da oni predstavljaju količinu outputa iz i-tog sektora neophodnog za uspješnu proizvodnju 1 jedinice outputa u j-tom sektoru, vrijedit će formula

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}, \quad (i, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.45}$$

Odavde neposredno slijedi da je

$$Q_{ij} = a_{ij} Q_j, \quad (i, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.46}$$

Zbog toga se sistem jednadžbi (1.44) može napisati u obliku

$$\left.\begin{array}{c} Q_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + ... + a_{1n}Q_n + q_1 \\ Q_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + ... + a_{2n}Q_n + q_2 \\ \vdots \\ Q_n = a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + ... + a_{nn}Q_n + q_n \end{array}\right\}. \tag{1.47}$$

Kao što smo već vidjeli, ovaj se sistem može prevesti u matrični oblik

$$Q = AQ + q, \tag{1.48}$$

pri čemu je

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Iz jednadžbe (1.48) slijedi

$$Q - AQ = q,$$

odnosno

$$(I - A)\, Q = q.$$

Kako matrica $I - A$ ovisi samo o tehnološkim uvjetima proizvodnje, zvat ćemo je *matricom tehnologije* i označavati sa $T = I - A$. Važno je istaknuti da je ova matrica konstantna i uvijek regularna za sve realne sisteme proizvodnje.
Dakle, jednadžba (1.48) se može pisati u obliku

$$TQ = q. \tag{1.49}$$

Formula (1.49) je poznata kao Leontiefova[5] formula i to nam je glavna jednadžba u intput-output analizi. Uočimo da u toj matričnoj jednadžbi, odnosno u sistemu od n linearnih algebarskih jednadžbi (1.47), imamo $2n$ nepoznanica, što znači da je za njihovo rješavanje neophodno imati poznatim n promjenjivih. Zbog toga mogu nastupiti tri slučaja:

1. poznat je vektor ukupnih outputa Q,
2. poznat je vektor finalne potražnje q,
3. kombinacija prethodna dva slučaja, tj. za neke sektore poznata je ukupna količina outputa, a za neke sektore poznata je količina finalne potražnje.

Razmotrimo svaki od navedeih slučajeva pojedinačno.

Slučaj 1

U ovom slučaju se za zadanu ekonomiju (i zadane tehnološke uvjete) planiraju ukupne količine outputa svih sektora. Znači da nam je u jednadžbi (1.49) poznat vektor ukupnih outputa Q, a treba prvo odrediti vektor finalne potražnje q ($q = TQ$), te na osnovu toga odrediti i sve veličine međusektorske potrošnje Q_{ij} ($i, j \in \{1, 2, ..., n\}$). Ilustrirat ćemo to sljedećim primjerom.

[5] Wassily W. Leontief, *The Structure of American Economy 1919-1939,* 2nd ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1951.

Primjer 1.26 *Pretpostavimo da je ekonomija jedne zemlje podijeljena na 3 sektora i da je odgovarajuća I-O tabela oblika*

Q_i	Q_{ij}			q_i
150	30	27	24	69
180	45	36	48	51
160	15	18	16	111

Sastaviti novu I-O tabelu ako se planira da će se ukupna proizvodnja u prvom i trećem sektoru povećati za 20%, *a u drugom sektoru smanjiti za* 10% *i ako se pri tome ne mijenjaju tehnološki uvjeti proizvodnje.*

Rješenje. Prvo treba odrediti matricu tehničkih koeficijenata A. Pošto se tehnološki uvjeti ne mijenjaju, ona je konstantna matrica, tj. ista je i za datu i za novu I-O tabelu, te je možemo odrediti na osnovu podataka iz date tabele:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{Q_1} & \frac{Q_{12}}{Q_2} & \frac{Q_{13}}{Q_3} \\ \frac{Q_{21}}{Q_1} & \frac{Q_{22}}{Q_2} & \frac{Q_{23}}{Q_3} \\ \frac{Q_{31}}{Q_1} & \frac{Q_{32}}{Q_2} & \frac{Q_{33}}{Q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.15 & 0.15 \\ 0.30 & 0.20 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo odrediti matricu tehnologije T:

$$T = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.20 & 0.15 & 0.15 \\ 0.30 & 0.20 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.80 & -0.15 & -0.15 \\ -0.30 & 0.80 & -0.30 \\ -0.10 & -0.10 & 0.90 \end{bmatrix}.$$

Kako je, prema planu, vektor novih ukupnih outputa svih sektora $Q = \begin{bmatrix} 180 \\ 162 \\ 192 \end{bmatrix}$, prema Leontiefovoj formuli (1.49) izračunavamo novi vektor finalne potražnje q:

$$q = TQ = \begin{bmatrix} 0.80 & -0.15 & -0.15 \\ -0.30 & 0.80 & -0.30 \\ -0.10 & -0.10 & 0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 \\ 162 \\ 192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.9 \\ 18 \\ 138.6 \end{bmatrix}.$$

Nove veličine međusektorske potrošnje Q_{ij} $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ izračunavamo prema formuli (1.46):

$$\begin{aligned} &Q_{11} = a_{11}Q_1 = 36, \quad Q_{12} = a_{12}Q_2 = 24.3, \quad Q_{13} = a_{13}Q_3 = 28.8, \\ &Q_{21} = a_{21}Q_1 = 54, \quad Q_{22} = a_{22}Q_2 = 32.4, \quad Q_{23} = a_{23}Q_3 = 57.6, \\ &Q_{31} = a_{31}Q_1 = 18, \quad Q_{32} = a_{32}Q_2 = 16.2 \quad Q_{13} = a_{13}Q_3 = 19.2. \end{aligned}$$

Prema tome, nova I-O tabela ima oblik

Q_i	Q_{ij}			q_i
180	36	24.3	28.8	90.9
162	54	32.4	57.6	18
192	18	16.2	19.2	138.6

Korisno je na kraju napraviti provjeru, tj. da li zaista vrijedi

$$Q_i = a_{i1}Q_1 + a_{i2}Q_2 + ... + a_{in}Q_n + q_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} + qi \quad (i \in \{1, 2, ..., n\}), \qquad (1.50)$$

za $n = 3$. U našem slučaju je to zaista zadovoljeno, jer je:

$$\begin{aligned} 36 + 24.3 + 28.8 + 90.9 &= 180, \\ 54 + 32.4 + 57.6 + 18 &= 162, \\ 18 + 16.2 + 19.2 + 138.6 &= 192. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Slučaj 2

Ukoliko se za zadanu ekonomiju (i zadane tehnološke uvjete) planiraju ukupne količine finalne potražnje za svaki sektor (tj. poznat je vektor q), tada se iz jednadžbe (1.49) može izračunati novi vektor ukupnih outputa Q, a onda na osnovu toga odrediti i sve veličine međusektorske potrošnje Q_{ij} $(i, j \in \{1, 2, ..., n\})$. Naime, iz Leontiefove formule (1.49), nakon množenja slijeva obje strane s T^{-1}, dobijemo

$$Q = T^{-1}q. \qquad (1.51)$$

U praksi se vrlo često zbog složenosti postupka, naročito u slučaju većih dimenzija, ne izračunava direktno inverzna matrica T^{-1}, nego se vrši njeno približno (aproksimativno) računanje uzimajući prvih k članova beskonačnog reda:

$$T^{-1} = (I - A)^{-1} \approx I + A + A^2 + ... + A^k.$$

Primjer 1.27 *Zadana je I-O tabela jedne dvosektorske ekonomije*

Q_i	Q_{ij}		q_i
$*$	600	1200	600
$*$	1200	1200	1200

Prvo popuniti tabelu do kraja, a zatim odrediti novi vektor ukupnih outputa ako se finalna potražnja prvog sektora poveća za 10%, a drugog sektora smanji za 10%. Također, sastaviti novu I-O tabelu, uz pretpostavku da se tehnološki uvjeti proizvodnje ne mijenjaju.

Rješenje. Kako uvjet (1.50) mora biti uvijek zadovoljen, onda u zadanoj tabeli treba dopuniti veličine Q_1 i Q_2 prema tom uvjetu:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 600 + 1200 + 600 = 2400, \\ Q_2 &= 1200 + 1200 + 1200 = 3600. \end{aligned}$$

Dakle, $Q = \begin{bmatrix} 2400 \\ 3600 \end{bmatrix}$. Sada je neophodno odrediti matricu tehničkih koeficijenata:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{11}}{Q_1} & \frac{Q_{12}}{Q_2} \\ \frac{Q_{21}}{Q_1} & \frac{Q_{22}}{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(Napomenimo, u slučaju kad su neki od tehničkih koeficijenata s beskonačno mnogo cifara iza decimalnog zareza, da ih je bolje tada izraziti u obliku razlomaka, zbog preciznijeg računanja.)
Matrica tehnologije je

$$T = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je $\det T = \dfrac{1}{3}$, a njena adjungirana matrica je $adjT = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, pa je $T^{-1} = 3 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$. Kako je prema planu novi vektor finalne potražnje $q = \begin{bmatrix} 660 \\ 1080 \end{bmatrix}$, novi vektor ukupnih outputa je, prema (1.51),

$$Q = T^{-1}q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 660 \\ 1080 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2400 \\ 3420 \end{bmatrix}.$$

Nove veličine međusektorske potrošnje Q_{ij} $(i, j \in \{1, 2\})$ izračunavamo prema formuli (1.46):

$$\begin{aligned} Q_{11} &= a_{11}Q_1 = 600, \quad Q_{12} = a_{12}Q_2 = 1140, \\ Q_{21} &= a_{21}Q_1 = 1200, \quad Q_{22} = a_{22}Q_2 = 1140. \end{aligned}$$

Dakle, nova I-O tabela izgleda ovako

Q_i	Q_{ij}		q_i
2400	600	1140	660
3420	1200	1140	1080

♣

Slučaj 3

Ovaj slučaj je kombinacija prethodna dva slučaja, tj. za neke sektore poznata je ukupna količina outputa, npr. $Q_i, i \in \{1, 2, ..., k\}$, a za preostale sektore poznata je količina finalne potražnje, tj. $q_i, i \in \{k+1, k+2, ..., n\}$. U tom se slučaju unesu dati podaci u sistem (1.47), te se nepoznanice prebace na lijeve strane jednadžbi, a poznate veličine na desne strane. Na taj način dobijamo sistem od n jednadžbi sa n nepoznanica, kojeg riješimo nekim od poznatih metoda.

Opisani postupak je najbolje ilustrirati odgovarajućim primjerom.

Primjer 1.28 *Zadana je I-O tabela jedne ekonomije sa tri sektora*

Q_i	Q_{ij}			q_i
150	30	27	24	69
180	45	36	48	51
160	15	18	16	111

Ako se planiraju nove proizvodnje u prvom i trećem sektoru: $Q_1 = 110$ i $Q_3 = 280$, a finalna potražnja drugog sektora q_2 da se ne mijenja kao ni tehnološki uvjeti proizvodnje, sastaviti novu I-O tabelu.

Rješenje. Uočimo da je data I-O tabela ista kao i u Primjeru 1.26, pa je

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.15 & 0.15 \\ 0.30 & 0.20 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad T = \begin{bmatrix} 0.80 & -0.15 & -0.15 \\ -0.30 & 0.80 & -0.30 \\ -0.10 & -0.10 & 0.90 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem podataka u sistem (1.49), dobija se

$$\begin{bmatrix} 0.80 & -0.15 & -0.15 \\ -0.30 & 0.80 & -0.30 \\ -0.10 & -0.10 & 0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 \\ Q_2 \\ 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 51 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

tj. imamo sljedeći sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 88 - 0.15Q_2 - 42 &= q_1, \\ -33 + 0.8Q_2 - 84 &= 51, \\ -11 - 0.1Q_2 + 252 &= q_3. \end{aligned}$$

Nakon prebacivanja nepoznanica na lijeve strane jednadžbi, a poznatih veličina na desne strane jednadžbi i dodatnog sređivanja, dobija se sistem

$$\begin{aligned} q_1 + 0.15Q_2 \quad &= 46, \\ 0.8Q_2 \quad &= 168, \\ 0.1Q_2 + q_3 &= 241. \end{aligned}$$

Gaussovim ili nekim drugim metodom dobije se: $Q_2 = 210$, $q_1 = 14.5$, $q_3 = 220$.
Dakle, $Q = \begin{bmatrix} 110 \\ 210 \\ 280 \end{bmatrix}$. Podaci za novu međusektorsku potražnju su:

$$\begin{array}{lll} Q_{11} = a_{11}Q_1 = 22, & Q_{12} = a_{12}Q_2 = 31.5, & Q_{13} = a_{13}Q_3 = 42, \\ Q_{21} = a_{21}Q_1 = 33, & Q_{22} = a_{22}Q_2 = 42, & Q_{23} = a_{23}Q_3 = 84, \\ Q_{31} = a_{31}Q_1 = 11, & Q_{32} = a_{32}Q_2 = 21, & Q_{13} = a_{13}Q_3 = 28. \end{array}$$

Nova I-O tabela je

Q_i	Q_{ij}			q_i
110	22	31.5	42	14.5
210	33	42	84	51
280	11	21	28	220

Čitaocu ostavljamo da izvrši odgovarajuću provjeru. ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Zadana je I-O tabela jedne ekonomije

Q_i	Q_{ij}		q_i
180	45	60	·
240	90	40	·

Ako se planiraju nove finalne potražnje $\begin{bmatrix} 60 \\ 120 \end{bmatrix}$, a tehnološki se uvjeti ne mijenjaju, sastaviti novu I-O tabelu.

2. Zadana je I-O tabela jedne ekonomije

Q_i	Q_{ij}			q_i
·	30	40	10	20
·	20	40	0	140
·	40	50	125	35

Ako se planiraju novi ukupni outputi $\begin{bmatrix} 150 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$, a tehnološki se uvjeti ne mijenjaju, sastaviti novu I-O tabelu.

3. Zadana je I-O tabela jedne ekonomije

Q_i	Q_{ij}			q_i
$\cdot$	30	40	10	20
$\cdot$	20	40	0	140
$\cdot$	30	50	60	40

Ako se planiraju novi ukupni outputi $\begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 360 \end{bmatrix}$, a tehnološki se uvjeti ne mijenjaju, sastavite novu I-O tabelu.

4. Zadana je I-O tabela jedne ekonomije

Q_i	Q_{ij}		q_i
210	35	80	$\cdot$
240	70	40	$\cdot$

Ako se planira nova finalna potražnja $\begin{bmatrix} 168 \\ 119 \end{bmatrix}$, a tehnološki se uvjeti ne mijenjaju, sastavite novu I-O tabelu.

5. Zadana je I-O tabela neke ekonomije

Q_i	Q_{ij}			q_i
200	$*$	20	100	80
$*$	20	0	200	180
400	100	200	$*$	100

Ako se planira smanjenje ukupnog outputa drugog sektora za 40% i ukupnog outputa trećeg sektora za 30%, a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastaviti novu I-O tabelu.

6. Zadana je I-O tabela jedne ekonomije

Q_i	Q_{ij}		q_i
270	$*$	45	90
180	$*$	60	30

Ako se planira nova finalna potražnja $\begin{bmatrix} 150 \\ 320 \end{bmatrix}$, a tehnološki uvjeti se ne minenjaju, sastavite novu I-O tabelu.

7. Zadana je matrica tehničkih koeficijenata jedne trosektorske ekonomije

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sastaviti odgovarajuću I-O tabelu, ako je vektor finalne potražnje $\begin{bmatrix} 80 \\ 220 \\ 120 \end{bmatrix}$.

8. Zadana je I-O tabela neke ekonomije

Q_i	Q_{ij}			q_i
150	30	40	50	$*$
$*$	50	80	50	20
250	30	60	100	$*$

Ako se planira povećanje ukupnog outputa prvog sektora za 20% , drugog sektora za 25% i smanjenje finalne potražnje trećeg sektora za 20%, a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastaviti novu I-O tabelu.

9. Zadana je matrica tehničkih koeficijenata jedne trosektorske ekonomije

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.25 & 0.15 \\ 0.3 & 0.25 & 0.25 \\ 0.15 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Sastaviti odgovarajuću I-O tabelu ako je ukupni output prvog sektora 100, ukupni output drugog sektora 120, a finalna potražnja trećeg sektora 105 jedinica.

10. Zadana je I-O tabela jedne ekonomije

Q_i	Q_{ij}		q_i
180	45	60	$\cdot$
240	90	40	$\cdot$

Ako se planira nova finalna potražnja prvog sektora da je manja za 60% nego sada, a finalna potražnja drugog sektora sada je veća za 10% nego planirana i tehnološki se uvjeti ne mijenjaju, sastavite novu I-O tabelu.

Poglavlje 2

Funkcije jedne realne varijable

2.1 Pojam i osobine funkcije

Pojam funkcije u njenom općenitom smislu najjednostavnije je shvatiti kroz primjere iz svakodnevnog života.

1. Pretpostavimo da se jedan kamion kreće po nekom određenom putu. Provjerom je ustanovljeno da je nakon jednog sata kretanja taj kamion prešao 25 km, nakon 2 sata kretanja 50 km, nakon 5 sati kretanja 125 km, a nakon 8 sati kretanja 200 km.

   Označimo vrijeme kretanja (izraženo u satima) sa x, a odgovarajuću dužinu pređenog puta sa y. Uočavamo dva skupa elemenata: skup A sa četiri elementa (promatrane vrijednosti od x): $A = \{1, 2, 5, 8\}$ i skup B također s četiri elementa (odgovarajuće vrijednosti y): $B = \{25, 50, 75, 200\}$. Ovdje uočavamo i sljedeću važnu činjenicu:

   Svakom elementu skupa A odgovara (pridružen mu je) tačno jedan element skupa B, odnosno svakoj promatranoj vrijednosti x odgovara tačno jedna vrijednost y.

2. U jednom proizvodnom pogonu ukupni troškovi pri proizvodnji dva komada određenog proizvoda iznose 25\$, pri proizvodnji 3 komada 35\$, pri proizvodnji 6 komada 65\$, pri proizvodnji 9 komada 95\$, pri proizvodnji 12 komada 125\$.

   I ovdje imamo dva skupa: skup $A = \{2, 3, 6, 9, 12\}$ s pet elemenata (x) koji označavaju broj proizvedenih komada određenog proizvoda i skup $B = \{25, 35, 65, 95, 125\}$ s pet elemenata (y) koji označavaju ukupne troškove pridružene odgovarajućim elementima skupa A.

Dakle, u oba slučaja imali smo situaciju da je svakom elementu skupa A pridružen *tačno jedan* element skupa B. To pridruživanje (zakonitost, pravilo) označimo sa $f : A \to B$, a specijalno da je elementu x iz skupa A pridružen upravo element y iz skupa B pravilom f pišemo

$$y = f(x).$$

U ovom slučaju zakonitost f ćemo zvati *funkcijom* sa skupa A u skup B. Prema tome, vrijedi općenito:

Definicija 2.1 *Neka su A i B neprazni skupovi. Pravilo (zakon ili propis) f po kome se svakom elementu skupa A pridružuje tačno jedan element skupa B naziva se* ***funkcijom*** *sa skupa A u skup B i označava sa $f : A \to B$.*

Posebno će nas zanimati funkcije sa skupa A u skup B, kada je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R}$. U tom slučaju funkciju nazivamo *realnom funkcijom realne varijable.* Elemente skupa A nazivamo *originalima*, a element $y = f(x)$ nazivamo *slikom* originala x. Primijetimo da smo u navedenim primjerima vrijednosti originala x proizvoljno (neovisno) birali i da smo onda određivali odgovarajuće vrijednosti y, tj. izbor y je ovisio o odabranom x. Zbog toga se vrlo često kaže da je x *neovisna varijabla*, a y *ovisna varijabla* ili *funkcija* od x. Dakle, u prvom primjeru pređeni put je funkcija vremena, a u drugom primjeru ukupni troškovi su funkcija količine proizvoda. Zakonitost f u našim primjerima se može i odrediti. Naime, u prvom primjeru je očigledno da je količnik slike i originala uvijek isti:

$$\frac{y}{x} = 25,$$

pa je

$$y = f(x) = 25x.$$

U drugom primjeru može se uočiti da vrijedi slična zakonitost prema kojoj je količnik slike umanjene za 5 i originala uvijek isti i iznosi 10, tj.

$$\frac{y-5}{x} = 10,$$

pa je u ovom slučaju

$$y = f(x) = 10x + 5.$$

Vrlo često je ta zakonitost data unaprijed (ali nisu poznati skupovi A i B), kada kažemo da je funkcija zadana analitički. Npr.

$$y = 3x^2,\ y = \frac{2}{2x-1},\ y = \sqrt{x^2-1}.$$

Postavlja se pitanje da li je u svakom pojedinom slučaju $A = \mathbb{R}$ ili je A pravi podskup (najčešće interval ili unija više intervala) skupa $\mathbb{R}$? Zbog toga se uvodi pojam *definicionog područja* ili *oblasti definicije funkcije*, koji definiramo kao skup svih onih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $y = f(x) \in \mathbb{R}$, a označavamo ga sa $\mathcal{D}(f)$. Očigledno je

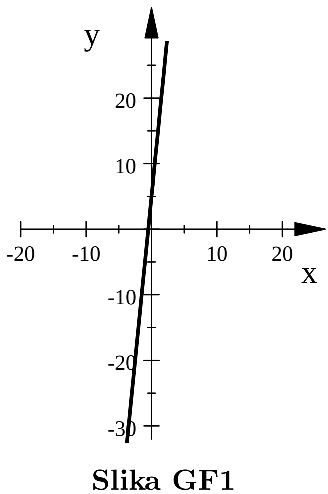
$$\mathcal{D}\left(3x^2\right) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}\left(\frac{2}{2x-1}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \diagdown \left\{\frac{1}{2}\right\},$$

$$\mathcal{D}\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\right\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

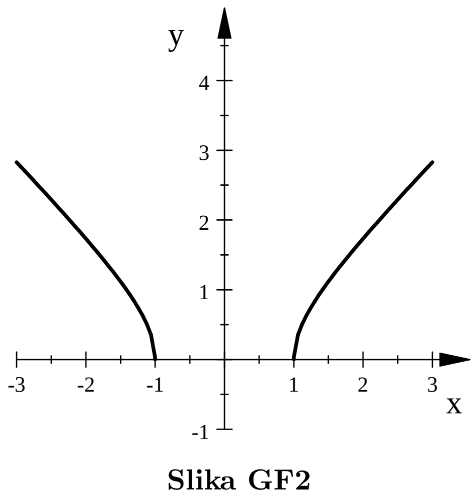
Ukoliko nam je poznat analitički izraz funkcije ili ako imamo njen tabelarni prikaz, onda se funkcija može i grafički predstaviti u pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu kao skup

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{D}(f) \wedge y = f(x)\},$$

koji nazivamo *grafom* funkcije f. Taj način predstavljanja funkcije je i najrazumljiviji. Na Slici GF1 dat nam je grafik funkcije $y = 10x+5$, a na Slici GF2 graf funkcije $y = \sqrt{x^2-1}$.



Slika GF1



Slika GF2

Navedimo još neke važne osobine koje određene funkcije mogu posjedovati, kao što su *injektivnost, surjektivnost* i *bijektivnost.*

Definicija 2.2 *Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da ima osobinu* ***injektivnosti*** *ili da je* ***injektivna*** *funkcija ako vrijedi*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in A),$$

tj. ako različitim originalima odgovaraju različite slike.

Definicija 2.3 *Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da ima osobinu* ***surjektivnosti (sirjektivnosti)*** *ili da je* ***surjektivna (sirjektivna)*** *funkcija ako je svaki element skupa B slika nekog elementa iz skupa A.*

Napomena 2.1 *Ukoliko funkcija $f : A \to B$ nije surjektivna, surjektivnost se može postići tako što se umjesto skupa B razmatra skup $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.*

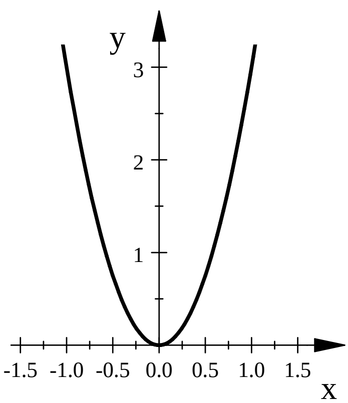
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 10x + 5$ je injektivna, jer za $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 10x_1 \neq 10x_2 \Rightarrow 10x_1 + 5 \neq 10x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

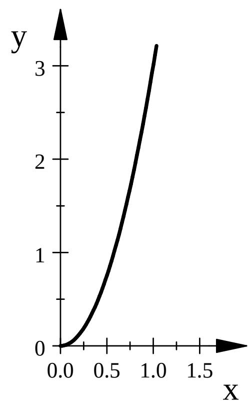
Međutim, funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$ nije injektivna, jer originali $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ (koji su međusobno različiti) imaju jednake slike:

$$y_1 = f(x_1) = f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3, \quad y_2 = f(x_2) = f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Ukoliko bismo promatrali funkciju $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$, ona bi bila injektivna funkcija (v. Sliku GF3 i Sliku GF4).



Slika GF3



Slika GF4

Definicija 2.4 *Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je* ***bijektivna*** *ako je ona injektivna i surjektivna.*

Funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 10x + 5$ i $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$ su bijektivne funkcije.
Dakle, kod bijektivne funkcije $f : A \to B$ svaki element y iz skupa B je slika tačno jednog elementa x iz skupa A, tj. vrijedi $y = f(x)$. Na taj način možemo promatrati i "obrnutu" funkciju, označimo je sa f^{-1}, sa skupa B u skup A, pri

čijem djelovanju svakom elementu y iz skupa B pridružujemo element x iz skupa A za koji vrijedi $y = f(x)$. Tu novu funkciju $f^{-1} : B \to A$ zvat ćemo *inverznom* funkcijom funkcije $f : A \to B$. Drugim riječima, ako funkcija f originalu $x \in A$ pridružuje sliku $y \in B$, tada njoj inverzna funkcija f^{-1} takvom y pridružuje x. Ovo se ne može postići ako funkcija $f : A \to B$ nije bijektivna.

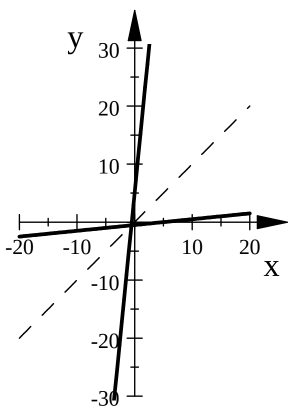
Primjer 2.1 *Budući da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 10x + 5$ bijektivna, postoji njoj inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jasno je da je tada $x = f^{-1}(y)$, pa imamo*

$$y = 10f^{-1}(y) + 5,$$

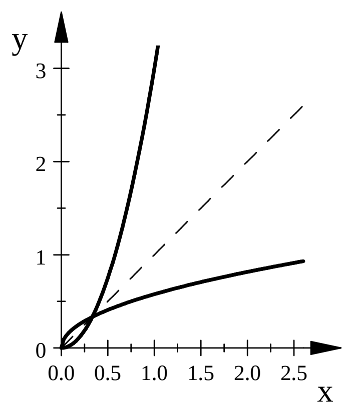
odakle je $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{10}$, odnosno analitički izraz za inverznu funkciju je

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{10}.$$

Analogno možemo i za bijektivnu funkciju $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$ naći njoj inverznu funkciju. Naime, imamo da je $x = 3\left[f^{-1}(y)\right]^2$, odakle se dobije $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$. ♣



Slika GF5



Slika GF6

Uočimo sljedeću važnu činjenicu: *graf bijektivne funkcije i graf njene inverzne funkcije su simetrični u odnosu na pravu $y = x$* (koja je simetrala prvog i trećeg kvadranta), što se vidi i na Slici GF5 i na Slici GF6.
Određivanje inverzne funkcije će biti značajno u primjenama na ekonomskim funkcijama.

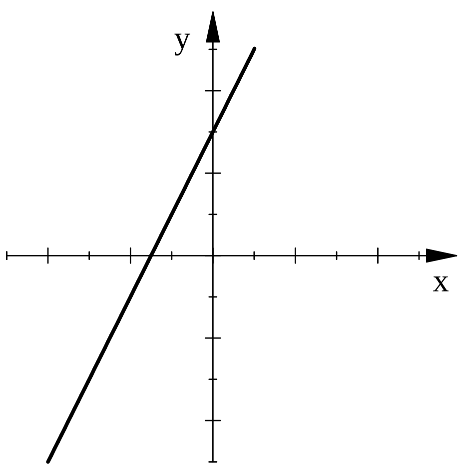
2.2 Elementarne funkcije

Ubuduće ćemo promatrati samo realne funkcije jedne realne varijable koje su date analitički. U skladu s tim funkcije se mogu podijeliti na: *algebarske* i *transcedentne*. Algebarske funkcije su one funkcije kada se pri izračunavanju ovisne varijable koriste samo algebarske operacije (konačno mnogo puta): sabiranje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i stepenovanje racionalnim eksponentom. Dijelimo ih na: cijele racionalne funkcije (polinome), razlomljene racionalne funkcije i iracionalne funkcije. Transcedentne funkcije su ostale funkcije kod kojih ovisnu varijablu ne možemo izračunati upotrebom konačno mnogo algebarskih operacija, a u primjenama u ekonomiji najčešće se koriste sljedeće transcedentne funkcije: eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije i inverzne trigonometrijske (ciklometrijske) funkcije.
Navest ćemo sada osnovne karakteristike nekih od tih funkcija.

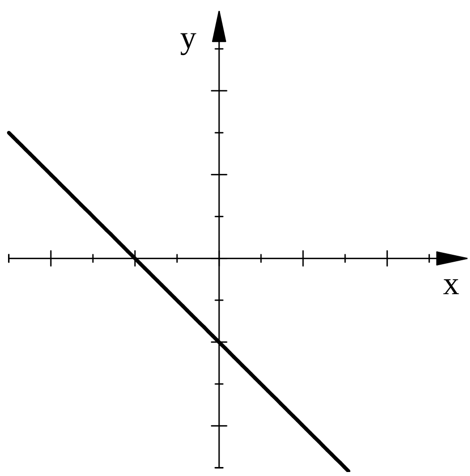
2.2.1 Linearna funkcija

Linearna funkcija je jedna od najjednostavnijih funkcija i spada u klasu algebarskih funkcija. To je funkcija oblika

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$



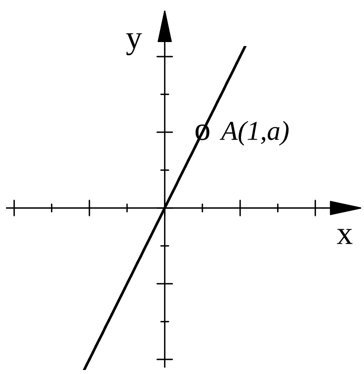
Slika GF7: $a > 0$



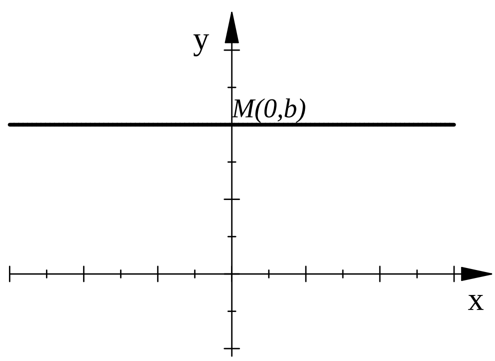
Slika GF8: $a < 0$

Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Tada je linearna funkcija očito polinom prvog stepena. Njen graf je prava linija, pa odatle i potiče naziv linearne funkcije. Znajući da je

prava određena s dvije tačke, zaključujemo da je za crtanje grafa linearne funkcije dovoljno znati samo dvije tačke njenog grafa. Ako se uzme $x = 0$, dobije se $y = b$. To znači da tačka $M\,(0,b)$ pripada grafu funkcije, a kako pripada i osi Oy, to koeficijent b označava odsječak koji graf funkcije odsijeca na Oy osi. Ako je $y = 0$, onda je $x = -\frac{b}{a}$, pa tačka $N\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ pripada grafu funkcije, ali pripada i osi Ox. Zbog toga je $-\frac{b}{a}$ odsječak koji graf funkcije odsijeca na osi Ox. Dakle, dovoljno je odrediti tačke M i N kako bismo precizno nacrtali graf linearne funkcije. Primijetimo da je u slučaju kad je $b = 0$ graf linearne funkcije prava koja prolazi kroz koordinatni početak i da se tada tačke M i N poklapaju s koordinatnim početkom. U tom slučaju je neophodno odrediti još jednu tačku grafa funkcije, što se postiže najlakše uvrštavanjem određene vrijednosti za neovisnu varijablu x, recimo $x = 1$ za koju dobijemo $y = a$. Crtanjem prave na kojoj leži koordinatni početak i tačka $A\,(1,a)$, dobije se graf linearne funkcije (kao na Slici GF7a).
S druge strane, pokazuje se da je koeficijent a jednak tangensu ugla koji graf linearne funkcije zaklapa s pozitivnim smjerom ose Ox. Obično za koeficijent a koristimo i termin *nagib* funkcije. Dakle, nagib funkcije može biti pozitivan (Slika GF7) ili negativan (Slika GF8). Ukoliko je $a = 0$, tada je graf linearne funkcije skup $\Gamma = \{(x,b) \mid x \in \mathbb{R}\}$, što je prava koja prolazi tačkom $M\,(0,b)$ na osi Oy, a paralelna je osi Ox (Slika GF9).



Slika GF7a



Slika GF9

2.2.2 Kvadratna funkcija

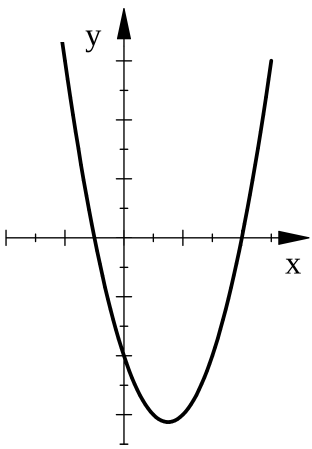
Kvadratna funkcija (ili polinom drugog reda) je algebarska funkcija oblika

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

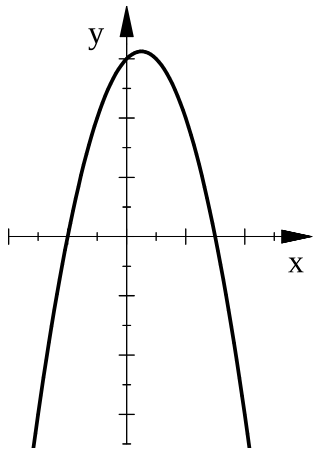
Poznato je da je graf ove funkcije parabola, koja je okrenuta otvorom prema gore ako je $a > 0$ (Slika GF10), a okrenuta otvorom prema dolje ako je $a < 0$ (Slika GF11). Funkcija ima dvije realne nule

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

ako je $D = b^2 - 4ac > 0$ (D je tzv. diskriminanta funkcije), ima jednu (dvostruku) nulu $x = -\dfrac{b}{2a}$ ako je $D = 0$, a nema nula ako je $D < 0$. Za konstrukciju grafa kvadratne funkcije, osim njenih nula, neophodno je znati i koordinate tjemena parabole: $T\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$. U svakom slučaju je neophodno za preciznije crtanje grafa kvadratne funkcije znati i koordinate još nekoliko tačaka njenog grafa.



Slika GF10: $a > 0$



Slika GF11: $a < 0$

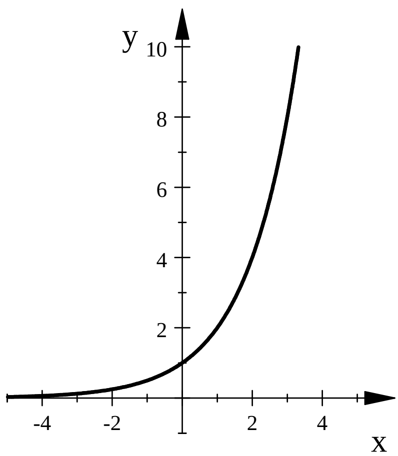
2.2.3 Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je funkcija oblika

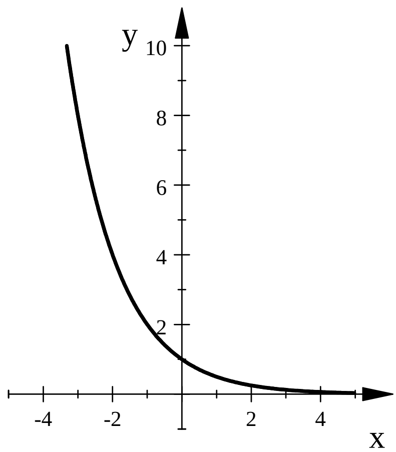
$$y = a^x, \quad 0 < a \neq 1.$$

Očigledno je domen ove funkcije cijeli skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, a zbog uvjeta da je a pozitivan broj, zaključujemo da su sve vrijednosti funkcije pozitivni brojevi. Dakle, vrijedi: $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. To znači da se graf eksponencijalne funkcije nalazi iznad ose Ox. Kad je $x = 0$, vrijednost funkcije je

$y = a^0 = 1$, što znači da graf funkcije siječe osu Oy u tački $A(0,1)$. Razlikujemo dva slučaja: $a > 1$ i $0 < a < 1$.



Slika GF12: Grafik funkcije $y = 2^x$



Slika GF13: Grafik funkcije $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

U slučaju $a > 1$ graf funkcije se na lijevoj strani približava osi Ox (ali je nikada ne dodiruje), pa kažemo da je osa Ox horizontalna asimptota funkcije. Dakle, što neovisna varijabla x uzima sve manje i manje vrijednosti, to i vrijednosti funkcije postaju sve bliže vrijednosti 0, ali je nikada ne dostižu. A ako se x povećava, i vrijednosti funkcije se povećavaju i to za pozitivne x vrijednosti funkcije naglo rastu (Slika GF12). Eksponencijalna funkcija ima obrnuto ponašanje u smislu rasta kad je $0 < a < 1$, tj. njene vrijednosti se s povećanjem vrijednosti neovisne varijable x smanjuju ka vrijednosti 0, ali je nikad ne dostižu (Slika GF13).

2.2.4 Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija je inverzna funkcija eksponencijalnoj funkciji. Dakle, ako x i y u eksponencijalnoj funkciji zamijene svoja mjesta, dobijamo

$$x = a^y,$$

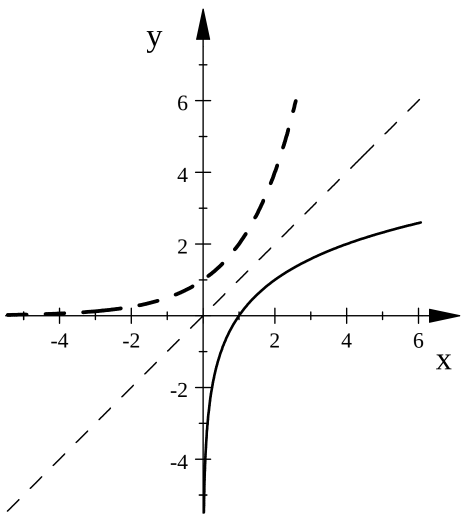
odakle je

$$y = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1.$$

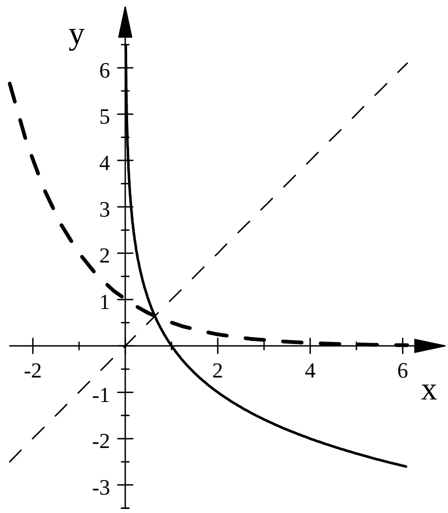
Drugim riječima vrijedi:

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x, \quad (0 < a \neq 1).$$

Jasno je da je $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dakle, $\mathcal{D}(\log_a x) = (0, +\infty)$. Graf logaritamske funkcije je, kao što smo već napomenuli za općeniti slučaj, osnosimetričan grafu odgovarajuće eksponencijalne funkcije u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta, tj. pravu $y = x$. Budući da znamo kako izgleda graf eksponencijalne funkcije, onda znamo kako izgleda i graf logaritamske funkcije (Slika GF14 i Slika GF15).



Slika GF14: $y = \log_2 x$



Slika GF15: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Primijetimo da graf logaritamske funkcije siječe osu Ox u tački $A(1, 0)$, koja je simetrična tački $B(0, 1)$ u kojoj eksponencijalna funkcija siječe osu Oy. Dakle, $x = 1$ je nula logaritamske funkcije, dok je osa Oy njena vertikalna asimptota. U slučaju kad je $a > 1$, logaritamska funkcija je rastuća funkcija, dok je za $0 < a \neq 1$ ona opadajuća, kao što je to slučaj i s odgovarajućom eksponencijalnom funkcijom kojoj je ona inverzna funkcija.
Prisjetimo se i logaritamskih pravila:

$$\begin{aligned}
\log_a(uv) &= \log_a u + \log_a v, \\
\log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a u - \log_a v, \\
\log_a(u)^r &= r \log_a u,
\end{aligned}$$

pri čemu je $u > 0, v > 0, 0 < a \neq 1, r \in \mathbb{R}$.

2.3 Primjena funkcija u ekonomiji

Pojedine ekonomske veličine mogu biti u međusobnoj ovisnosti, tj. promjena jedne od njih može prouzročiti promjenu jedne ili više drugih. Ipak, postaviti određenu vezu između pojedinih ekonomskih veličina nije nimalo jednostavan posao. Naime, može se dogoditi da promjena jedne ekonomske veličine izaziva promjenu neke druge, a da obrnuto ne vrijedi. Tako, na primjer, nacionalni dohodak jedne zemlje ne ovisi o broju tv prijemnika u toj zemlji, ali obrnuto - broj tv prijemnika u jednoj zemlji osjetno ovisi o nacionalnom dohotku. Ako, dakle, sa x označimo nacionalni dohodak, a sa y broj tv prijemnika, imat ćemo funkcionalnu ovisnost $y = f(x)$. Ovdje je potreban poseban oprez pri prevođenju ove funkcije u njen inverzni oblik $x = \varphi(y)$. Iako to s matematičkog aspekta ima opravdanje, s ekonomskog aspekta nema nikakva smisla i može nas u općem slučaju čak dovesti u opasnost izvođenja pogrešnih zaključaka. Zbog toga je jako važno nametnuti određene uvjete na funkcije kako bi one u izvjesnom smislu mogle predstavljati ekonomske funkcije, tj. da bi takav matematički model imao smisla u stvarnosti. Za sve funkcije koje se primjenjuju u ekonomiji, a mi ih budemo ovdje spominjali, navest ćemo takve uvjete, koji će činiti oblast definicije funkcije u ekonomskom smislu (oblast koja je općenito uža od definicionog područja funkcije u matematičkom smislu). Naravno, nećemo se ovdje baviti pitanjem samog načina formiranja funkcija koje se primjenjuju u ekonomiji, ali hoćemo njihovom oblašću definicije u ekonomskom smilsu.

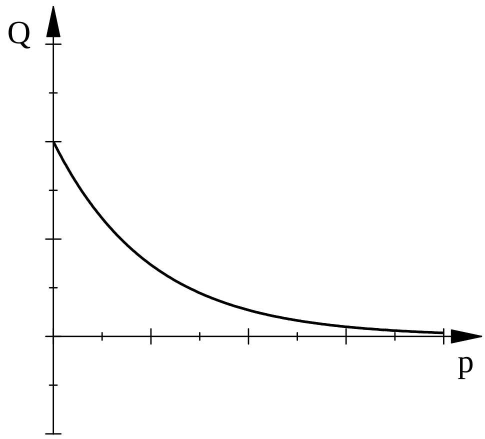
2.3.1 Funkcija potražnje

Neka se na nekom tržištu, između ostalog, nudi i traži jedan proizvod A i neka je Q ukupna količina tog proizvoda koju potražuju potrošači na tom tržištu. Ukoliko pretpostavimo da su zadovoljeni neki bitni kriteriji tržišta (nepromjenjivost: ukupnog broja potrošača, ukusa svih potrošača, prihoda svakog potrošača i cijena svih ostalih proizvoda na tom tržištu), količina potražnje proizvoda A ovisit će samo o njegovoj tržišnoj cijeni. Označimo sa p cijenu proizvoda A. Jasno je da će se s promjenom cijene p mijenjati i ukupna potražnja Q proizvoda A, tj. potražnja Q je funkcija cijene p, tj.

$$Q = D(p) \quad (= Q_d).$$

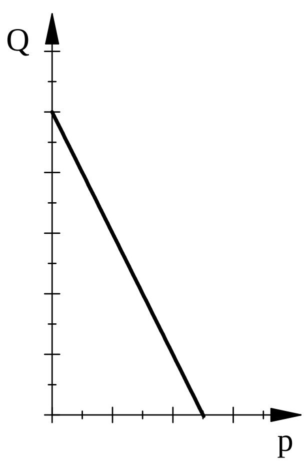
Ali i obrnuto, ako se mijenja ukupna količina potražnje proizvoda A, doći će i do promjene njegove cijene p. Zato ovdje ima smisla govoriti o inverznoj funkciji gornje funkcije i u ekonomskom smislu. Dakle, cijena je ovdje funkcija od potražnje, tj.

$$p = p(Q).$$

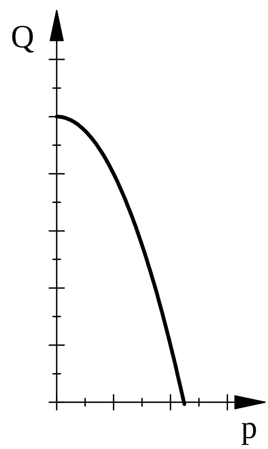


Slika EF1: $Q = ae^{-cp}, a > 0, c > 0$

Uočimo bitne odrednice funkcije potražnje. Naime, kako smo to vidjeli u slučaju tržišne ravnoteže (Sekcija 1.3.1), kad smo imali jednostavan slučaj linearne funkcije, vrijedi i općenito: s povećanjem cijene dolazi do pada potražnje, a u krajnjem slučaju kad se dostigne kritična cijena potražnja postaje jednaka 0 (Slika EF2 i Slika EF3) ili da jednostavno se neograničeno smanjuje ka 0 (kažemo da teži ka 0) kada cijena neograničeno raste (Slika EF1).



Slika EF2: $Q = -ap + b, a > 0, b > 0$

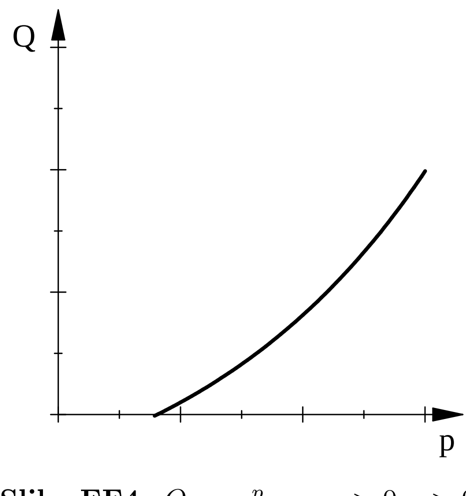


Slika EF3: $Q = -p^2 + c, c > 0$

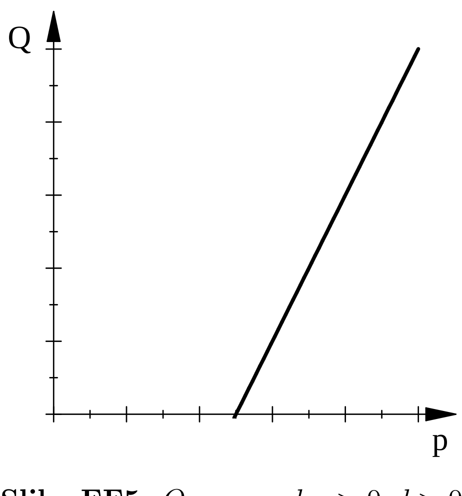
Dakle, funkcija potražnje mora biti opadajuća funkcija i definirana je samo za pozitivne vrijednosti promjenjive p. To je uvjet koji mora svaka funkcija potražnje, bez obzira kojeg je oblika, da zadovoljava. U slučaju linearne funkcije, ona mora imati negativni nagib.

2.3.2 Funkcija ponude

Pod ponudom podrazumijevamo količinu određenog proizvoda A koju proizvođač nudi na nekom tržištu. U normalnim okolnistima ponuda će rasti s povećanjem cijene proizvoda. Zbog toga će funkcija ponude (Q_s) uvijek biti rastuća i definirana samo za nenegativnu promjenjivu p (cijena proizvoda). Također, vrlo često se dešava da se izvjestan broj ponuđača uzdražava od prodaje proizvedene robe ako je cijena niska i uglavnom čeka povoljniji trenutak, tj. kad cijena dostigne onaj nivo za koji im se isplati prodavati robu. Osim toga, ako je tržišna cijena proizvoda niska, izvjestan broj proizvođača neće se odlučiti da proizvodi taj proizvod, jer bi pod tim uvjetima režijski troškovi doveli do gubitka. Tako će ponuda biti jednaka 0 za sve pozitivne vrijednosti cijene p koje su manje od te kritične vrijednosti p^*, tj. $Q_s = S(p) = 0$, za sve $p \in [0, p^*]$. Kriva koja predstavlja funkciju ponude je, dakle, rastuća kriva s osobinom sporog rasta od kritične vrijednosti p^*, a onda s prelaskom u nagli rast (Slika EF4 i Slika EF5).



Slika EF4: $Q = ce^p - a, a > 0, c > 0$



Slika EF5: $Q = cp - d, c > 0, d > 0$

2.3.3 Funkcija troškova

Poznato je da su troškovi u jednoj proizvodnoj firmi novčani izraz za utrošene pojedine elemente procesa proizvodnje, kao što su sredstva za rad, predmet rada ili radna snaga. Zbog toga se oni mogu klasificirati prema različitim kriterijima, a nas ovdje posebno zanima klasifikacija prema reagiranju na obim proizvodnje. Po toj klasifikaciji troškovi se dijele na *varijabilne* i *fiksne*. Varijabilni (promjenljivi) troškovi su oni troškovi koji ovise o obimu proizvodnje, tj. mijenjaju se u skladu s povećanjem ili smanjenjem obima proizvodnje, a također su uvjetovani i stepenom iskorištenosti kapaciteta. U varijabilne troškove se ubrajaju troškovi materijala za izradu (sirovine), troškovi korištenja energije, troškovi rada i sl. S druge strane, fiksni troškovi u ukupnom iznosu se ne mijenjaju, tj. fiksni su, za svaki dati obim proizvodnje. U takve troškove spadaju, na primjer, režijski troškovi, troškovi osiguranja, troškovi zakupnine, troškovi amortizacije, troškovi kamata na kredite i sl. Bitna karakteristika fiksnih troškova je da oni postoje neovisno o tome da li se proces proizvodnje izvodi ili ne.

Ukupni troškovi predstavljaju zbir varijabilnih i fiksnih troškova. Uvedimo sljedeće oznake: T - za ukupne troškove, VT - za varijabilne troškove, FT - za fiksne troškove, pa je

$$T = VT + FT.$$

Ako sa Q označimo obim proizvodnje, tj. količinu proizvoda, jasno je da je veličina varijabilnih troškova u funkcionalnoj ovisnosti o količini proizvodnje Q, tj. $VT\,(Q)$, pa je i funkcija ukupnih troškova, također, u funkcionalnoj ovisnosti o obimu proizvodnje Q, tj. $T\,(Q)$, dok fiksni troškovi ne ovise o varijabli Q, pa imamo

$$T\,(Q) = VT\,(Q) + FT. \tag{2.1}$$

Jasno je da je

$$VT\,(0) = 0.$$

Zbog toga je, prema relaciji (2.1),

$$FT = T\,(0)\,. \tag{2.2}$$

Istaknimo da funkcija ukupnih troškova mora zadovoljavati određene uvjete (da bi uopće imala ekonomskog smisla):

a) $Q \geq 0$, odnosno obim proizvodnje ne može biti negativna vrijednost,
b) $T\,(Q) > 0$, tj. troškovi su uvijek pozitivni,
c) porast obima proizvodnje uvijek dovodi do rasta ukupnih troškova.

Ovi uvjeti čine oblast definiranosti funkcije ukupnih troškova.
Matematski izraz posljednjeg uvjeta navest ćemo nešto kasnije, nakon uvođenja pojma izvoda funkcije i pojma marginalnih (graničnih) troškova.

Primjer 2.2 *Neka je data funkcija $T\,(Q) = 3Q^2 + 200$. Vidimo da je tada*

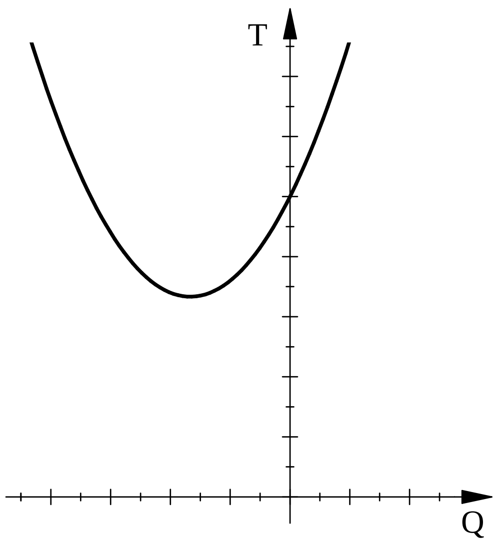
$$T\,(0) = 3 \cdot 0^2 + 200 = 200 = FT.$$

Pokretanjem proizvodnje i povećanjem njenog obima očito je da će doći do porasta dijela troškova označenih sa $3Q^2$*, odnosno do porasta varijabilnih troškova, a samim tim i do porasta ukupnih troškova. Dakle, zadovoljena su sva tri uvjeta koje mora zadovoljavati funkcija ukupnih troškova.* ♣

Primjer 2.3 *Može se i općenito postaviti pitanje: pod kojim uvjetima funkcija ukupnih troškova može biti predstavljena kvadratnom funkcijom? Naime, ako je*

$$T(Q) = aQ^2 + bQ + c, \tag{2.3}$$

tada, prije svega, mora da bude $a > 0$*, tj. parabola mora biti okrenuta otvorom prema gore, odnosno funkcija mora imati minimum.*



Slika EF6: $T(Q) = aQ^2 + bQ + c,\ a > 0, b > 0, c > 0$

Osim toga, za sve nenegativne vrijednosti promjenjive Q *(uvjet a)),* $T(Q)$ *mora da bude pozitivna (uvjet b)) i stalno da raste (uvjet c)), što će biti ispunjeno ako su fiksni troškovi pozitivni, tj.* $FT = T(0) = c > 0$ *i ako se minimum funkcije dostiže za negativne vrijednosti promjenjive* Q*, odnosno ako je tjeme parabole s lijeve strane koorditanog početka, tj. ako je*

$$-\frac{b}{2a} < 0,$$

odnosno $b > 0$*. Dakle, kvadratna funkcija (2.3), može biti funkcijom ukupnih troškova samo ako su sva tri koeficijenta* a, b *i* c *pozitivna.* ♣

Vrlo važnu ulogu u praksi igraju tzv. *prosječni troškovi*, koji predstavljaju iznos ukupnih troškova po jedinici proizvoda. Ako funkciju prosječnih troškova označimo sa $\overline{T}(Q)$, tada je

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}. \tag{2.4}$$

Uočimo da je oblast definiranosti funkcije prosječnih troškova ista kao i oblast definiranosti ukupnih troškova.

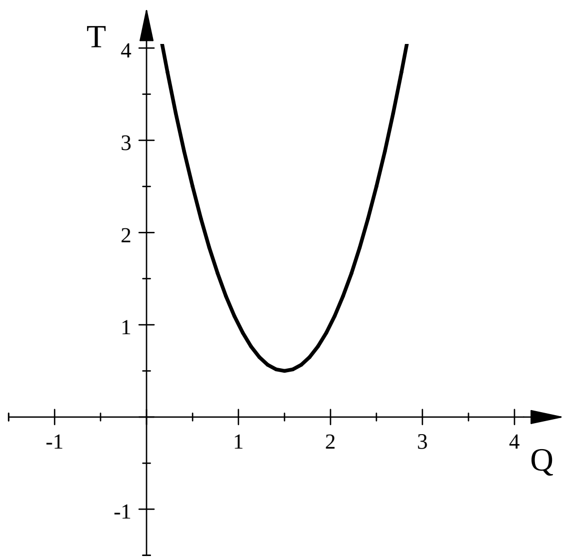
Primjer 2.4 *Data je funkcija ukupnih troškova*

$$T(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 5Q.$$

Odrediti minimalne prosječne troškove i na kojem nivou proizvodnje se dotižu.

Rješenje. Funkcija prosječnih troškova, prema (2.4), je

$$\overline{T}(Q) = 2Q^2 - 6Q + 5.$$



Slika EF7

Ovo je kvadratna funkcija i ona dotiže minimum na nivou proizvodnje

$$Q = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2},$$

koji iznosi

$$\overline{T}_{\min} = \overline{T}\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2}. \quad \clubsuit$$

2.3.4 Funkcije prihoda i dobiti

Ukupni prihod predstavlja proizvod količine određene robe prodate na tržištu u određenom vremenskom razdoblju i cijene po kojoj je ta roba prodata. Ako za cijenu uvedemo oznaku p, a za ukupni prihod oznaku P, onda je

$$P = Q \cdot p.$$

Uočimo da je količina prodate robe na tržištu ustvari funkcija potražnje za tom robom. Poznato je da se potražnja izražava kao funkcija cijene proizvoda, tj. $Q = Q(p)$, pa je u tom slučaju ukupni prihod funkcija cijene p:

$$P(p) = Q(p) \cdot p. \tag{2.5}$$

Međutim, i cijena robe se može promatrati kao funkcija potražnje, tj. $p = p(Q)$ i tada je i ukupni prihod funkcija potražnje Q:

$$P(Q) = Q \cdot p(Q). \tag{2.6}$$

Pri tome su $p(Q)$ i $Q(p)$ međusobno inverzne funkcije.

Primjer 2.5 *Zadana je funkcija potražnje $Q_d = 80-4p$. Odrediti funkciju ukupnog prihoda kao funkciju cijene, a zatim i kao funkciju potražnje.*

Rješenje. Malo lakši dio posla u ovom slučaju je naći ukupan prihod kao funkciju cijene. Prema (2.5) imamo

$$P(p) = Q_d \cdot p = (80 - 4p)\, p = -4p^2 + 80p.$$

S druge strane, želimo li funkciju ukupnog prihoda predstaviti kao funkciju potražnje kao u (2.6), moramo prvo cijenu predstaviti kao funkciju potražnje. Naime, iz $Q = 80 - 4p$, imamo

$$4p = 80 - Q \Rightarrow p = \frac{80 - Q}{4} = 20 - \frac{Q}{4},$$

pa je

$$P(Q) = Q \cdot p(Q) = Q\left(20 - \frac{Q}{4}\right) = 20Q - \frac{Q^2}{4}. \quad \clubsuit$$

Primijetimo da je *prosječni prihod* količnik ukupnog prihoda i ukupne količine prodatih proizvoda, tj. funkcija prosječnih prihoda je oblika

$$\overline{P}(Q) = \frac{P(Q)}{Q} = \frac{Q \cdot p(Q)}{Q} = p(Q).$$

Tako bi u prethodnom primjeru funkcija prosječnih prihoda bila

$$\overline{P}(Q) = p(Q) = 20 - \frac{Q}{4}.$$

Još jedna vrlo važna funkcija u ekonomiji je funkcija ukupne dobiti. Poznato je da se *ukupna dobit* ostvarena u proizvodnji jednog artikla definira kao razlika ukupnog prihoda prodate količine artikla na tržištu u određenom vremenskom periodu i ukupnih troškova proizvodnje te prodate količine artikla. Uvedemo li oznaku D za ukupnu dobit, tada je

$$D = P - T.$$

Ukoliko su nam poznate funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda kao funkcije potražnje Q, tada je i ukupna dobit funkcija potražnje:

$$D(Q) = P(Q) - T(Q).$$

Ukoliko nam je, pored funkcije ukupnih troškova i funkcije ukupnog prihoda poznata i funkcija potražnje kao funkcija cijene $Q = Q(p)$, tada je i ukupna dobit funkcija cijene proizvoda:

$$D(p) = P(p) - T(Q(p)) = pQ(p) - T(Q(p)).$$

Za proizvodnju nekog artikla (robe ili dobra) vrlo je značajan *interval rentabilnosti.* Pod tim pojmom podrazumijevamo interval neovisne varijable u funkciji ukupne dobiti gdje je ukupna dobit pozitivna. Naime, ako pretpostavimo da su funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda definirane u intervalu $[0, r]$, tada interval $(Q_1, Q_2) \subset [0, r]$ nazivamo intervalom rentabilnosti ako vrijedi da je $D(Q) = P(Q) - T(Q) > 0$, za sve vrijednosti $Q \in (Q_1, Q_2)$. Osim toga, nivo proizvodnje $Q^* \in (Q_1, Q_2)$ za koju se ostvaruje maksimalna dobit naziva se *optimalnom proizvodnjom*, a cijena $p = p(Q^*)$ se naziva *optimalnom prodajnom cijenom.*

Primjer 2.6 *Date su funkcije potražnje* $Q(p) = 20 - 0.5p$ *i prosječnih troškova* $\overline{T}(Q) = Q + 30 + \frac{3}{Q}$. *Odrediti:*

a) funkciju ukupne dobiti i nacrtati njen grafik,
b) interval rentabilnosti,
c) maksimalnu dobit,
d) optimalnu proizvodnju,
e) optimalnu prodajnu cijenu.

Rješenje. a) Funkcija ukupnih troškova je

$$T(Q) = \overline{T}(Q) \cdot Q = \left(Q + 30 + \frac{3}{Q}\right) Q = Q^2 + 30Q + 3,$$

a funkcija ukupnog priohoda je $P(Q) = p(Q) \cdot Q$. Odredimo cijenu kao funkciju potražnje:

$$Q = 20 - 0.5p \Rightarrow \frac{1}{2}p = 20 - Q \Rightarrow p = 40 - 2Q = p(Q),$$

pa je sada

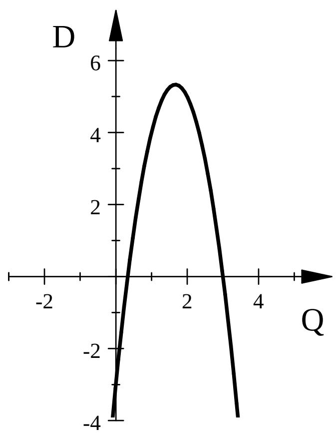
$$P(Q) = p(Q) \cdot Q = (40 - 2Q) Q = 40Q - 2Q^2.$$

Funkcija ukupne dobiti je:

$$D(Q) = P(Q) - T(Q) = 40Q - 2Q^2 - \left(Q^2 + 30Q + 3\right),$$

tj.

$$D(Q) = -3Q^2 + 10Q - 3.$$



Slika EF8

Grafik funkcije je dat na Slici EF8.

b) Odredimo nule funkcije $D(Q)$, odnosno rješenja kvadratne jednadžbe

$$-3Q^2 + 10Q - 3 = 0,$$

tj. $Q_1 = \frac{1}{3}, Q_2 = 3$. Jasno je da je funkcija ukupnog prihoda pozitivna za sve vrijednosti $Q \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$, pa je interval rentabilnosti $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

c) i d) Funkcija ukupne dobiti (kao kvadratna funkcija) ima maksimalnu vrijednost na nivou proizvodnje $Q = -\frac{10}{-6} = \frac{5}{3}$, te je optimalna proizvodnja $Q^* = \frac{5}{3}$. Maksimalna dobit je

$$D_{\max} = D\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 10 \cdot \frac{5}{3} - 3 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

e) Optimalna cijena je

$$p\left(Q^*\right) = 40 - 2Q^* = 40 - \frac{10}{3} = \frac{110}{3} = 36\frac{2}{3}. \quad \clubsuit$$

$\circ \quad \circ \quad \circ$

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti definiciono područje svake od sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+3}$, b) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$, c) $f(x) = \log\frac{x+1}{1-x}$.

2. Pokazati da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = -2x+6$ bijektivna, a zatim odrediti inverznu funkciju $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, te nacrtati graf funkcije f i graf funkcije f^{-1} u Descartesovom pravouglom koordinatnom sistemu.

3. Koji uvjet mora zadovoljavati parametar $a \in \mathbb{R}$ da bi funkcija

$$f(x) = x^2 - 4x + a$$

imala vrijednosti veće od 15 za sve vrijednosti x?

4. Za koje vrijednosti varijable x je funkcija $y = \log\left(1-x^2\right)$ pozitivna?

5. Poznata je funkcija potražnje nekog proizvoda $Q_d = -0.5p + 11000$ i funkcija ukupnih troškova $T(Q) = 2Q^2 + 10^7$. Odrediti interval rentabilnosti, optimalnu proizvodnju, optimalnu cijenu i maksimalnu dobit.

6. Za neki proizvod A data je funkcija potražnje $Q_d = -0.2p + 100$ i funkcija prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = 2.5Q + 350 + \frac{250}{Q}$. Odrediti interval rentabilnosti, optimalnu proizvodnju, optimalnu cijenu i maksimalnu dobit.

7. Za neki proizvod B poznata je cijena kao funkcija potražnje $p = -0.001Q + 80$ i funkcija ukupnih troškova $T(Q) = 30Q + 10^5$. Naći optimalnu cijenu i maksimalnu dobit.

2.4 Nizovi

2.4.1 Pojam niza

Odranije nam je iskustveno poznat pojam niza (niz prirodnih brojeva, niz parnih brojeva, niz neparnih brojeva manjih od 30, itd) i jasno nam je da niz može imati konačno ili beskonačno članova. Ovdje će biti riječi samo o nizovima realnih brojeva. Objasnimo sada matematički preciznije pojam niza.

Definicija 2.5 ***Konačnim realnim nizom*** *nazivamo funkciju*

$$f : \{1, 2, ..., k\} \to \mathbb{R},$$

tj. skup realnih brojeva $\{f(1), f(2), ..., f(k)\}$, *koji obično zapisujemo kao*

$$a_1, a_2, ..., a_k, \tag{2.7}$$

pri čemu je $a_n = f(n), n = 1, 2, ..., k$ *i nazivamo ga* ***općim članom*** *niza (2.7).*

Očito je da indeks n u općem članu a_n datog niza označava redni broj člana u nizu. Zbog toga je niz potpuno određen ako znamo kako izgleda njegov opći član. Tako, na primjer, ako je konačan niz realnih brojeva zadan općim članom $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \leq 5$, onda možemo ispisati sve članove tog niza:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(-1)^{1+1}}{1} = 1, \\ a_2 &= \frac{(-1)^{2+1}}{2} = -\frac{1}{2}, \\ a_3 &= \frac{(-1)^{3+1}}{3} = \frac{1}{3}, \\ a_4 &= \frac{(-1)^{4+1}}{4} = -\frac{1}{4}, \\ a_5 &= \frac{(-1)^{5+1}}{5} = \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

tj. riječ je o nizu: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

Definicija 2.6 ***Beskonačnim realnim nizom*** *nazivamo funkciju*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

tj. skup realnih brojeva $\{f(1), f(2), ..., f(k), ...\}$, *koji obično zapisujemo kao*

$$a_1, a_2, ..., a_k, ... \tag{2.8}$$

pri čemu je $a_n = f(n), n = 1, 2, ..., k$ *i nazivamo ga* ***općim članom*** *niza (2.8).*

Beskonačan niz ćemo označavati sa $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ubuduće ćemo, ukoliko drugačije ne napomenemo, pod pojmom niza podrazumijevati beskonačan realan niz.

Primijetimo da je znatno teže odrediti opći član niza ukoliko je zadano nekoliko početnih članova tog niza. Tada je neophodno svaki član niza dovesti u vezu s njegovim rednim brojem u nizu (tj. njegovim indeksom). Recimo da nam je beskonačan niz zadan sa:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \dots .$$

Uočimo sljedeće:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot 1 + 1}, \\ a_2 &= \frac{1}{9} = \frac{1}{4 \cdot 2 + 1}, \\ a_3 &= \frac{1}{13} = \frac{1}{4 \cdot 3 + 1}, \\ a_4 &= \frac{1}{17} = \frac{1}{4 \cdot 4 + 1}, \end{aligned}$$

iz čega se induktivno zaključuje da je

$$a_n = \frac{1}{4n+1}, n = 1, 2, 3, \dots .$$

U ekonomskim aplikacijama posebno su bitna dva niza: aritmetički i geometrijski, pa ćemo im zbog toga posvetiti posebnu pažnju.

2.4.2 Aritmetički niz

Promatrajmo sljedeće nizove:

$$\begin{gathered} 1, 2, 3, 4, 5, \dots \\ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \\ -3, 0, 3, 6, 9, \dots \\ 11, 7, 3, -1, -5, \dots \end{gathered}$$

Uočimo da oni imaju jednu zajedničku karakteristiku: svaki član niza, osim prvog, razlikuje se od prethodnog člana niza za konstantan broj: u prvom nizu je ta razlika 1, u drugom 2, u trećem 3, a u četvrtom -4. Na taj se način, ustvari, svaki član, osim prvog, svakog od tih nizova može dobiti kao zbir prethodnog člana u nizu i utvrđene razlike. Ovakvi nizovi imaju vrlo važnu ulogu u matematici, jer se vrlo često pojavljuju u praksi, pa ćemo im zbog toga posvetiti posebnu pažnju i dati im poseban naziv.

Definicija 2.7 *Za niz brojeva*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

kažemo da je ***aritmetički niz*** *ako je svaki njegov član, osim prvog, jednak zbiru prethodnog člana i stalnog broja (konstante) d.*

Aritmetički niz je, dakle, određen formulom

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.9}$$

Broj d (koji je u stvari jednak razlici $a_{n+1} - a_n$) naziva se **razlika** ili **diferencija** niza.

Postavlja se pitanje: odakle naziv aritmetički niz? Naime, iz definicije aritmetičkog niza slijedi

$$a_{n+1} - a_n = d = a_n - a_{n-1}, \tag{2.10}$$

odnosno

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n = 2, 3, ... \ . \tag{2.11}$$

Odavde vidimo da je svaki član ovog niza, osim prvog (i eventualno zadnjeg ako je niz konačan), *aritmetička* sredina člana ispred i člana iza njega, pa upravo zbog te osobine niz sa osobinom (2.9) nazivamo aritmetičkim nizom.

Uočimo također da, slično prethodnom, za "simetrične" članove aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n-r} + a_{n+r}}{2}, \quad n = 1, 2, ...; \quad r = 1, 2, ..., n-1.$$

Prema definiciji aritmetičkog niza vrijedi

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d, \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d, \\
&\ \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)\,d, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Dakle, uočavamo da je opći član aritmetičkog niza dat formulom

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.12}$$

Prema tome, svaki se član aritmetičkog niza može izraziti pomoću prvog člana niza i njegove razlike. Uočimo da je niz rastući ako je $d > 0$ (slučaj s prva tri niza data na početku), a opadajući ako je $d < 0$ (slučaj s četvrtim nizom datim na početku).

Neka je S_n oznaka za zbir prvih n članova aritmetičkog niza, to jest

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Kako je, prema (2.12),

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= 2a_1 + (n-1)\,d, \\ a_2 + a_{n-1} &= a_1 + d + a_1 + (n-2)\,d = 2a_1 + (n-1)\,d, \\ a_3 + a_{n-2} &= a_1 + 2d + a_1 + (n-3)\,d = 2a_1 + (n-1)\,d, \end{aligned}$$

i tako dalje. Vidimo da S_n predstavlja zbir od $\frac{n}{2}$ vrijednosti $2a_1+(n-1)\,d$. Dakle, vrijede sljedeće formule

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) \quad \text{ili} \quad S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)\,d]\,. \tag{2.13}$$

Naravno da se formule (2.12) i (2.13) lahko dokazuju matematičkom indukcijom.

Primijetimo da se druga formula u (2.13) mogla dokazati i na sljedeći način. Naime, kako je

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

i

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

na osnovu jednakosti (2.12) imamo

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + ... + [a_1 + (n-2)\,d] + [a_1 + (n-1)\,d]\,,$$

odnosno

$$S_n = [a_1 + (n-1)\,d] + [a_1 + (n-2)\,d] + ... + (a_1 + d) + a_1.$$

Nakon sabiranja posljednje dvije jednakosti, sabirajući međusobno odgovarajuće članove (prvi s prvim, drugi s drugim i tako dalje), dobije se

$$2S_n = n\,[2a_1 + (n-1)\,d]\,,$$

odnosno

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)\,d]\,. \tag{*}$$

Odavde je

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)\,d\right],$$

pa prema (2.12) imamo

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Na primjer, zbir prvih 100 članova aritmetičkog niza: 1,5,9,13,... je

$$S_{100} \overset{(*)}{=} \frac{100}{2}\left[2\cdot 1 + (100-1)\cdot 4\right] = 19900.$$

Primijetimo da vrijedi

$$S_n - S_{n-1} = a_n, \quad n = 2,3,\ldots\ . \tag{2.14}$$

Primjer 2.7 *Između -2 i 63 umetnuti 12 brojeva, tako da svi zajedno čine aritmetički niz..*

Rješenje. Uočimo da je -2 prvi, a 63 četrnaesti član tog niza. Dakle, prema formuli (2.12), imamo

$$63 = a_{14} = a_1 + 13d = -2 + 13d \;\Rightarrow\; d = 5.$$

Dobijeni niz izgleda ovako: $-2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63.$ ♣

Primjer 2.8 *Pretpostavimo da na početku godine u trezor u banci stavimo 1000\$ i da na početku svakog narednog mjeseca stavimo 50\$ više nego u prethodnom mjesecu. Koliko će novca biti u trezoru nakon 3 godine?*

Rješenje. Ako napišemo iznose koje smo redom ulagali, dobija se niz: 1000, 1050, 1100, 1150,..., koji je očito aritmetički niz s razlikom $d = 50$. Pri tome je nakon 3 godine bilo ukupno 36 deponovanja, tj. niz ima 36 članova. Nakon 3 godine u trezoru će ukupno biti

$$S_{36} = \frac{36}{2}\left[2000 + (36-1)\cdot 50\right] = 67500 \;\; (\$). \qquad ♣$$

Primjer 2.9 *Izračunati nepoznate elemente plana proizvodnje nekog poduzeća za petogodišnje razdoblje prema sljedećoj tabeli:*

Godina	*Proizvodnja*
1	
2	
3	
4	
5	
Ukupno	*75*

Predviđa se da će proizvodnja rasti svake godine za 20% proizvodnje iz pete godine.

Rješenje. Plan proizvodnje po godinama označimo sa a_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Zbog činjenice da se planira da proizvodnja raste svake godine za konstantan iznos $d = \frac{1}{5}a_5$, zaključujemo da brojevi a_k čine aritmetički niz. Prema podacima iz tabele, prema drugoj formuli u (2.13) vrijedi

$$S_5 = \frac{5}{2}[2a_1 + 4d] = 75 \Leftrightarrow a_1 + 2d = 15$$

odnosno

$$a_1 + \frac{2}{5}a_5 = 15. \tag{2.15}$$

S druge strane, prema (2.12) imamo

$$a_5 = a_1 + 4d \Leftrightarrow a_5 = a_1 + \frac{4}{5}a_5,$$

odnosno

$$a_5 = 5a_1. \tag{2.16}$$

Iz (2.15) i (2.16) dobija se $a_1 = 5, a_5 = 25, d = 5$, pa je

$$a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15, a_4 = 20, a_5 = 25. \qquad \clubsuit$$

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Peti član aritmetičkog niza je 19, a osmi 31. Napisati niz.

2. Odrediti aritmetički niz ako je

$$\begin{aligned} &5a_2 + a_6 = 0 \\ &S_5 = 5. \end{aligned}$$

3. Naći broj članova aritmetičkog niza u kojem je zbir svih članova jednak 112, proizvod drugog člana s razlikom niza jednak 30, a zbir trećeg i petog člana jednak 32. Napisati tri prva člana tog niza.

4. Zbir trećeg i devetog člana aritmetičkog niza jednak je 8. Naći zbir prvih 11 članova tog niza.

5. Naći zbir svih pozitivnih dvocifrenih brojeva koji su djeljivi sa 3.

6. Turista, penjući se uz planinu, prvog sata dostigao je visinu $800m$, a svakog sljedećeg sata podizao se na visinu za $25m$ manju nego prethodnog. Za koliko sati će on dostići visinu $5700m$?

7. Poznato je da se, za svako $n \in N$, zbir S_n, prvih n članova aritmetičkog niza, izražava formulom

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

Napisati tri prva člana tog niza.

8. Izračunati nepoznate elemente plana proizvodnje nekog poduzeća za petogodišnje razdoblje prema sljedećoj tabeli:

Godina	Proizvodnja
1	
2	
3	15
4	
5	25
Ukupno	

Predviđa se da će proizvodnja rasti svake godine za konstantan iznos.

9. Izračunati nepoznate elemente plana uvoza i izvoza nekog poduzeća za petogodišnje razdoblje prema tabeli

Godina	Uvoz	Izvoz
1		
2		15
3	11	
4		
5		30
Ukupno	55	

Predviđa se da će uvoz i izvoz rasti svake godine za konstantan iznos.

10. Nabavna vrijednost neke mašine je 1550000\$. Izračunati godišnje amortizacijske iznose ako se oni ravnomjerno smanjuju svake godine za 10000\$, a ekonomski vijek trajanja mašine je 10 godina.

11. Cijena proizvoda A je 6380\$. Izračunati godišnje amortizacijske iznose ako se oni konstantno smanjuju svake godine za 5% cijene proizvoda A. Ekonomski vijek trajanja proizvoda A je 5 godina.

2.4.3 Geometrijski niz

Promatrajmo sljedeće nizove:

$$
\begin{aligned}
&1, 2, 4, 8, 16, ... \\
&2, 6, 18, 54, 162, ... \\
&-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ... \\
&3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...
\end{aligned}
$$

Uočimo da i ovi nizovi (slično aritmetičkim nizovima) imaju jednu zajedničku karakteristiku: količnik svakog člana niza, osim prvog, i člana ispred njega je konstantan broj: u prvom nizu je taj količnik 2, u drugom 3, u trećem $-\frac{1}{2}$, a u četvrtom $\frac{1}{3}$. Na taj se način, ustvari, svaki član, osim prvog, svakog od tih nizova može dobiti kao proizvod prethodnog člana u nizu i utvrđenog količnika. Ovakvi nizovi, također, imaju vrlo važnu ulogu u matematici, posebno u primjeni u ekonomiji, pa ćemo im zbog toga posvetiti posebnu pažnju i dati im poseban naziv.

Definicija 2.8 *Niz brojeva*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

kod koga je svaki član, osim prvog, jednak proizvodu prethodnog člana i stalnog broja $q \neq 0$, zove se ***geometrijski niz****.*

Dakle, geometrijski niz je određen formulom

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Broj q, koji je jednak količniku $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, naziva se *količnikom* geometrijskog niza.

Opravdanje za naziv geometrijski dolazi od činjenice da je svaki član ovog niza, osim prvog (i eventualno zadnjeg ako je niz konačan), geometrijska sredina člana ispred i člana iza njega, tj.

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} \qquad (\text{ili } a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}})\,, \quad n = 2, 3, ... \;,$$

što neposredno slijedi iz prethodnog razmatranja, odnosno iz

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Prema definiciji geometrijskog niza vrijedi

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q, \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2, \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3, \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dakle, uočavamo da je opći član geometrijskog niza dat formulom

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.17}$$

Prema tome, svaki se član geometrijskog niza može izraziti pomoću prvog člana niza i njegovog količnika.

Ako sa S_n označimo zbir prvih n članova geometrijskog niza, tada je, koristeći (2.17),

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 ... + a_n \\ &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 \left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Ukoliko je $q = 1$, onda je $S_n = na_1$, a ako je $q \neq 1$, tada vrijedi

$$S_n = a_1 \left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right) \cdot \frac{1-q}{1-q} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ ili } S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \quad (q \neq 1), \\ S_n &= na_1, \quad (q = 1). \end{aligned}$$

Dokaz ovih formula lahko se može izvesti i primjenom principa potpune matematičke indukcije.

Primjer 2.10 *Prije više stotina godina u Indiji je živio kralj Širham koji je volio da igra razne igre, ali se zasitio starih igara i htio je nešto sa više izazova. Zatražio je od siromašnog matematičara Sete ben Dahira, koji je živio u njegovom kraljevstvu, da mu izmisli novu igru. Ta nova igra zvala se šah. Kralj se toliko* *oduševio da je matematičaru za nagradu ponudio šta god poželi. "Želio bih da mi na prvo polje šahovske table date jedno zrno pšenice, na drugo dva, na treće četiri, i na svako sledeće polje duplo više zrna pšenice nego na prethodnom polju", rekao je "skromni" matematičar. Kralja je ovaj odgovor uvrijedio, ali je ipak naredio svojim slugama da matematičaru daju traženu nagradu. Ubrzo je shvatio da u cijeloj Indiji nema dovoljno pšenice da se popune sva polja šahovske table. Broj zrna pšenice nije ništa drugo nego suma prvih 64 člana geometrijskog niza, s početnim članom 1 i količnikom 2 i ona iznosi*

$$1+2+2^2+...+2^{63}=\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1,$$

odnosno 18 446 744 073 709 551 615 (18 kvadriliona 446 triliona 744 biliona 73 milijarde 709 miliona 551hiljada 615). ♣

Primjer 2.11 *Izračunati zbir sljedećih n brojeva: 1,11,111,1111,... .*

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
S &= 1+11+111+\cdots+\underbrace{111...1}_{n}= \\
&= 1+(10+1)+(100+10+1)+\cdots+\left(10^{n-1}+...+10+1\right) \\
&= \frac{10-1}{10-1}+\frac{10^2-1}{10-1}+\frac{10^3-1}{10-1}+...+\frac{10^n-1}{10-1} \\
&= \frac{1}{9}\left(10+10^2+10^3+...+10^n-n\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{10^{n+1}-10-9n}{9} \\
&= \frac{1}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right). \quad ♣
\end{aligned}$$

Primjer 2.12 *Ako brojevi a,b i c obrazuju geometrijski niz, dokazati da tada brojevi $\frac{1}{\log_a N},\frac{1}{\log_b N},\frac{1}{\log_c N}$ obrazuju aritmetički niz, pri čemu su a,b,c,N pozitivni brojevi različiti od 1.*

Rješenje. Prema uvjetu zadatka imamo $b^2=ac$. Logaritmiranjem po bazi N, dobijamo

$$2\log_N b=\log_N a+\log_N c,$$

odnosno,

$$2\cdot\frac{1}{\log_b N}=\frac{1}{\log_a N}+\frac{1}{\log_c N},$$

a to, prema (2.11), znači da brojevi $\frac{1}{\log_a N}, \frac{1}{\log_b N}, \frac{1}{\log_c N}$ obrazuju aritmetički niz. ♣

Primjena geometrijskog niza u ekonomiji

Geometrijski niz ima veliku primjenu u ekonomiji pri *obračunu kamate*. Navedimo jedan takav slučaj. Naime, pretpostavimo da smo na početku godine uložili u banku iznos novca I i da se na kraju svake godine na zatečeni iznos zaračunava kamata od $p\%$. Postavlja se pitanje: koje je stanje računa na kraju n-te godine?

Na kraju prve godine na računu će biti iznos

$$I_1 = I + \frac{p}{100} I = \left(1 + \frac{p}{100}\right) I = Iq, \quad \text{gdje je } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Na kraju druge godine stanje je

$$I_2 = I_1 + \frac{p}{100} I_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) I_1 = Iq^2,$$

i tako dalje. Lahko je uočiti da stanja na računu čine geometrijski niz. Prema tome, na kraju n-te godine na računu će biti iznos $I_n = Iq^n$.

Specijalno, ako je $I = 1000\$$, $p = 5\%$ i $n = 20$, imat ćemo

$$I_{20} = Iq^{20} = 1000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} = 1000 \cdot 1,05^{20} = 2652,98 \quad (\$).$$

Međutim, vrlo često u praksi se kamata obračunava u kraćim vremenskim periodima od godine dana. Ako je k broj obračunskih perioda u jednoj godini, onda će odgovarajuća formula stanja na računu na kraju n-tog obračunskog perioda imati oblik

$$I_n = I \left(1 + \frac{r}{k}\right)^n,$$

gdje je $r = \frac{p}{100}$. Budući da u godini dana postoji k obračunskih perioda, stanje na računu nakon 1 godine bit će

$$I_k = I \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k.$$

Nakon n godina očigledno je da će stanje na računu biti

$$I_n = I \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}. \tag{2.18}$$

Tako, specijalno, ako je $I = 1000$ \$, $p = 6\%$ i kamata obračunava kvartalno (tj. $k = 4$), stanje na računu nakon 10 godina bit će

$$I_{10} = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{40} = 1814,02 \ \ (\$)\,.$$

Ako se kamata obračunava mjesečno (tj. $k = 12$), imat ćemo

$$I_{10} = 1000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{120} = 1819,40 \ \ (\$)\,,$$

a ako se kamata obračunava dnevno (tj. $k = 365$), tada je

$$I_{10} = 1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{3650} = 1822,03 \ \ (\$)\,.$$

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Izračunati količnik geometrijskog niza ako je njegov drugi član 3, a šesti 243.

2. Posljednji član geometrijskog niza je 162, zbir 242, a količnik 3. Odrediti a_1 i broj članova niza.

3. Prvi član geometrijskog niza je 2. Zbir drugog i četvrtog člana je 20. Odrediti niz.

4. Četiri broja čine geometrijski niz. Naći te brojeve ako je prvi veći od drugog za 200, a treći od četvrtog za 8.

5. Tri broja, čiji je zbir 93, čine geometrijski niz. Njih možemo promatrati, također, kao prvi, drugi i sedmi član aritmetičkog niza. Naći te brojeve.

6. Tri broja čine aritmetički niz i imaju zbir 15. Ako njima redom pribrojimo $1, 4$ i 19, dobit ćemo tri broja koja čine geometrijski niz. Naći te brojeve.

7. Neko je uložio u banku 10500\$ na što se na kraju svakog obračunskog perioda obračunava kamata od 7% na zatečeni iznos. Koliko nakon petnaestog obračunskog perioda ta osoba ima novca na računu?

8. Neko je uložio u banku izvjesnu sumu novca na koju se na kraju svakog obračunskog perioda obračunava kamata od 5% na zatečeni iznos. Ako nakon desetog obračunskog perioda ta osoba ima na računu 10500$, koliko je novca na početku uložila?

9. Proizvodnja se u nekom poduzeću za razdoblje od 2007. do 2011. godine povećavala svake godine u odnosu na prethodnu za konstantnu stopu promjene. Odrediti tu stopu promjene, proizvodnju u 2009. godini i ukupnu proizvodnju na kraju 2011. godine, ako je proizvodnja u 2008. godini bila 25000, a u 2010. godini bila 45000.

10. U nekom poduzeću je u razdoblju od 2007. do 2011. proizvedeno 610510 nekog proizvoda G. Kolika je proizvodnja bila u 2009., a kolika u 2011. godini ako se proizvodnja povećavala 10% godišnje u odnosu na prethodnu godinu?

11. Izračunati nepoznate elemente plana proizvodnje nekog poduzeća za četverogodišnje razdoblje prema tabeli

Godina	Proizvodnja
1	.
2	.
3	.
4	.
Ukupno	3545088

ako se proizvodnja smanji svake godine 8% u odnosu na prethodnu.

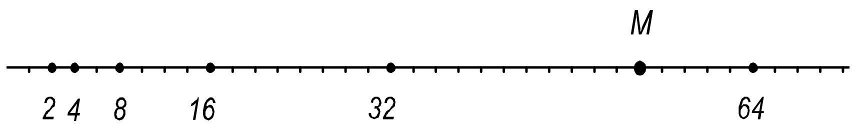
2.4.4 Granična vrijednost niza

Razmotrit ćemo nekoliko karakterističnih slučajeva.

- Zadan je niz

$$2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ... \quad (n \in \mathbb{N}),$$

čiji je opći član $a_n = 2^n$.



Slika N1

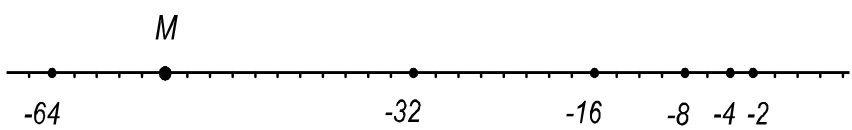
Očito je (što se vidi i na brojevnoj osi, Slika N1) da je svaki naredni član niza veći od prethodnog dva puta, odnosno da s porastom broja n rastu i članovi niza i to neograničeno. To znači da, za bilo koji pozitivni broj M, iza njega (desno) se nalaze svi članovi niza (njih beskonačno mnogo), osim eventualno konačno mnogo početnih članova niza. Drugim riječima, kažemo da dati niz teži u $+\infty$ i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$

- Zadan je niz

$$-2, -4, -8, -16, -32, ..., -2^n, ... \quad (n \in \mathbb{N}),$$

čiji je opći član $a_n = -2^n$.

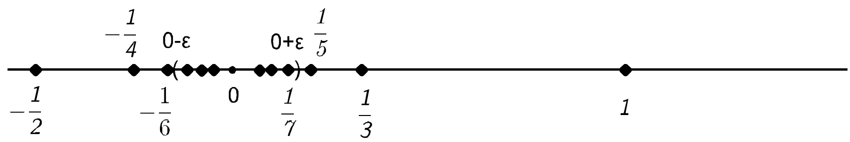


Slika N2

U ovom slučaju vidimo da je svaki naredni član niza manji od prethodnog, odnosno da s porastom broja n opadaju i članovi niza i to neograničeno. To znači da, za bilo koji negativni broj M, lijevo od njega (što se vidi i na brojevnoj osi, Slika N2) se nalaze svi članovi niza (njih beskonačno mnogo), osim eventualno konačno mnogo početnih članova niza (koji se nalaze desno od broja M). Drugim riječima, kažemo da dati niz teži u $-\infty$ i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-2^n) = -\infty.$$

- Zadan je niz
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{n}, ... \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{2.19}$$
čiji je opći član $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.



Slika N3

Ovdje uočavamo da niz osilira oko 0, tj. prvi član je desno od 0, drugi lijevo, treći desno, četvrti lijevo, itd. naizmjenično jedan je s lijeve strane broja 0, a naredni desno od 0. Pri tome se razdaljina svakog narednog člana niza u odnosu na broj 0 sve više i više smanjuje. Da bismo ovo detaljnije pojasnili neophodno je uvest pojam okoline realnog broja.

Definicija 2.9 *Neka je ε pozitivan po volji mali broj. Pod **ε-okolinom** nekog realnog broja a, u oznaci $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$, podrazumijevamo otvoreni interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, tj.*

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}.$$

Kako je niz (2.19) beskonačan, da se uočiti (v. Sliku N3) da se u proizvoljno maloj ε-okolini tačke 0, tj. u $\mathcal{O}_\varepsilon(0) = (0-\varepsilon, 0+\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, nalazi beskonačno mnogo članova tog niza, a izvan te okoline samo konačno mnogo početnih članova niza. Dakle, članovi niza se gomilaju oko broj 0 i sve više mu se približavaju kako n raste. Kažemo da niz (2.19) ima graničnu vrijednost 0 ili da konvergira ka 0 i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sada, naravno, možemo dati i opću definiciju.

Definicija 2.10 *Za broj $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je* ***granična vrijednost*** *(ili* ***limes****) niza $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ako se u svakoj ε-okolini broja a nalaze svi članovi tog niza, osim eventualno konačno mnogo njegovih početnih članova i pišemo*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ili} \quad a_n \to a \text{ kada } n \to \infty.$$

Definicija 2.11 *Ukoliko niz ima graničnu vrijednost $a \in \mathbb{R}$, kažemo da je* ***konvergentan****. Ako niz teži ka $+\infty$ ili $-\infty$, kažemo da je* ***konvergentan u širem smislu****. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je* ***divergentan****.*

Primjer niza koji nema graničnu vrijednost je: $1. -1, 1, -1, \ldots$.
Iz prethodnog slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Također, nije teško zaključiti da iz činjenice da niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ teži ka $+\infty$ ili $-\infty$ slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Na taj način vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Navedimo sada osobine limesa niza (bez dokaza).

Teorem 2.1 *Pretpostavimo da su nizovi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentni tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Tada vrijedi:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, *uz uvjet da je $b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i da je $b \neq 0$,*

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k \quad (k \in \mathbb{R}),$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = \log\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = \log a$, *uz uvjet da je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i da je $a > 0$.*

Primjer 2.13 *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0 - 0 = 0.$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n+10000} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{3+\frac{10000}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{10000}{n}\right)} = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10000}{n}} =$$

$$= \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{5n+1}{2n-3}} = \sqrt[5]{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{2n-3}} = \sqrt[5]{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}} = \sqrt[5]{\frac{5}{2}}.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0. \qquad \clubsuit$$

Od posebnog je značaja niz čiji je opći član

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Pokazuje se da je ovakav niz konvergentan i da mu je granična vrijednost tzv. broj e, koji je iracionalan broj, a približna mu je vrijednost 2.718281828459045. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.20}$$

Osim toga, ako je niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e. \tag{2.21}$$

Jednakost (2.21) se najčešće koristi u praksi.

Primjer 2.14 *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{2n-1}{3n}}$

$$\stackrel{(2.21)}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n-1}{3n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{3n+1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2(3n+1)}{n-1}} \stackrel{(2.21)}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2(3n+1)}{n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(3n+1)}{n-1}} = e^6. \qquad \clubsuit$$

Napomena 2.2 *Broj e se koristi kao baza tzv.* ***prirodnog logaritma*** *koji zbog velike primjene u matematičkoj analizi ima i posebnu oznaku:*

$$\log_e a = \ln a.$$

Primjer 2.15 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\ln(n+1) - \ln n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
$= \ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$ ♣

Primjena granične vrijednosti niza u ekonomiji

Kao što smo vidjeli, geometrijski niz smo primijenili u obračunu kamate u diskretnom vremenu (v. formulu (2.18)). No, obračun kamate se može vršiti i u neprekidnom vremenu. Ukoliko u formuli (2.18) varijablu n zamijenimo varijablom vremena t, dobit ćemo funkciju

$$I(t) = I\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt},$$

čija vrijednost u vremenu $t = t_0$ predstavlja stanje računa nakon proteklog vremena t_0 uz neprekidno obračunavanje kamate na početni iznos I. Znači da tada smatramo da $k \to \infty$, pa imamo

$$I(t) = \lim_{k\to\infty} I\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = I \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{rt} = Ie^{rt}.$$

Prema tome, ukoliko se na početni iznos I obračunava kamata u neprekidnom vremenu po godišnjoj stopi r (izraženoj u decimalnom obliku), nakon vremena t stanje na računu je

$$I(t) = Ie^{rt}.$$

Primjer 2.16 *Pretpostavimo da smo uložili u banku* 1000\$ *po godišnjoj stopi* 6%. *Koje će nam stanje na računu biti nakon* 10 *godina ako se kamata obračunava neprekidno?*

Rješenje. Dakle, imamo: $I = 1000, r = 0.06, t = 10$, pa je

$$I(10) = 1000e^{0.6} = 1822.12 \ (\$).$$

Uporedimo li ovaj iznos sa iznosima računatim u diskretnom vremenu u slučaju primjene geometrijskog niza na obračun kamate u diskretnom vremenu, zaključujemo da je ovakav iznos računat u neprekidnom vremenu najviši mogući iznos koji banka može zaračunati. ♣

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

Odrediti sljedeće granične vrijednosti (1-12):

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n-7}{5n^2+3n+10000}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+2n-3}{(n-2)^2(2n+1)}$.

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+2n-3}{2n^2+n-1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3}}{2n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^5+2n^4-3}{2n^5-n^3+1}\right)^6$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n-1}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{(n-1)^2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{(n-1)(n+3)}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^{n-1}}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\cdot\log\left(\dfrac{10n^2-2}{n^2}\right)$.

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{n+2}$.

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{3n-2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^{1-2n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+2n}\right)^{n^2-1}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]^{4^n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-3)\left[\ln(2n+1)-\ln(2n-1)\right]$.

12. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$.

13. Pretpostavimo da smo deponovali na račun u banci 2000\$. Koje će stanje na računu biti nakon 12 godina ako se kamata obračunava neprekidno po godišnjoj stopi 7%?

14. Pretpostavimo da smo uložili u banku 5000\$ po godišnjoj stopi 8%. Koje ćemo stanje na računu imati nakon 5 godina ako se kamata obračunava neprekidno?

15. Ako nam je nakon 10 godina štednje stanje na računu u banci 1822.12\$, pri čemu je kamata računata neprekidno po godišnjoj stopi 6%, koliki je bio početni ulog ako u međuvremenu nije bilo dodatnih ulaganja?

Poglavlje 3

Diferencijalni račun funkcija jedne varijable

3.1 Granična vrijednost funkcije

3.1.1 Pojam granične vrijednosti funkcije

Granična vrijednost funkcije opisuje šta se događa s funkcijom $f(x)$ kad se njena neovisna varijabla x sve više približava ka nekom određenom broju c. Da bismo ilustrirali ovaj koncept, pretpostavimo da želimo znati šta se događa s funkcijom $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ kad se x približava ka 1. Iako funkcija $f(x)$ nije definirana u tački $x = 1$, ipak ćemo moći dočarati njeno ponašanje izračunavanjem njenih vrijednosti koristeći vrijednosti neovisne varijable x koje su sve bliže i bliže broju 1 s njegove obje strane: i s lijeve i s desne. Učinimo to prvo s lijeve strane (Tabela 3.1).

x	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	1
$f(x)$	3.5	3.7	3.8	3.9	3.95	3.99	3.999	ND

Tabela 3.1

Uočavamo sljedeće: što se više varijabla x približava broju 1 s njegove lijeve strane, odnosno preko brojeva manjih od 1 (kažemo da se x rastući približava broju 1), a što simbolički pišemo kao $x \uparrow 1$ ili $x \to 1-0$ ili $x \to 1^-$, to se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više približavaju vrijednosti 4. Može se to iskazati i ovako: konvergentnom nizu brojeva neovisne varijable x odgovara konvergentan niz vrijednosti funkcije $f(x)$. U ovom slučaju kažemo da funkcija u tački $x = 1$ ima *lijevu graničnu* *vrijednost* 4 i to simbolički označavamo sa:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4.$$

Analogno, izvedimo ovaj postupak u slučaju kad se x približava broju 1 s njegove desne strane (Tabela 3.2).

x	1	1.001	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.5
$f(x)$	ND	4.001	4.01	4.05	4.1	4.2	4.3	4.5

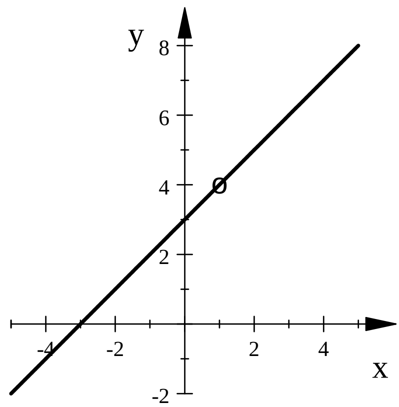
Tabela 3.2

Ovdje uočavamo sljedeće: što se više varijabla x približava broju 1 s njegove desne strane, odnosno preko brojeva većih od 1 (kažemo da se x opadajući približava broju 1), a što simbolički pišemo kao $x \downarrow 1$ ili $x \to 1 + 0$ ili $x \to 1^+$, to se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više približavaju vrijednosti 4. U ovom slučaju kažemo da funkcija u tački $x = 1$ ima *desnu graničnu vrijednost* 4 i to simbolički označavamo sa:

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4.$$

Opći je zaključak da se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više približavaju vrijednosti 4 kad x s vrijednostima bude sve bliži i bliži broju 1 s obje njegove strane (v. Sliku GV1). U tom slučaju kažemo da funkcija $f(x)$ ima *graničnu vrijednost* 4 u tački $x = 1$, simbolički

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4.$$

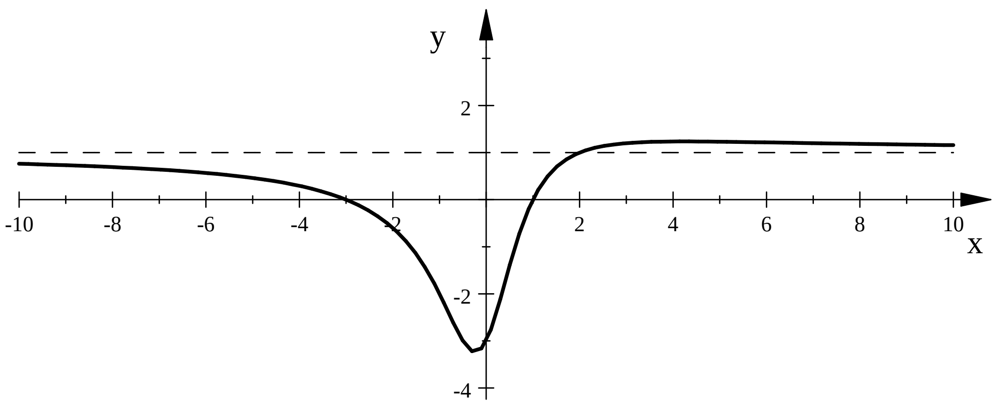


Slika GV1

Općenito: ako se vrijednosti $f(x)$ sve više približavaju nekom broju A kad x s vrijednostima bude sve bliži i bliži broju a s obje njegove strane, u tom slučaju kažemo da funkcija $f(x)$ ima *graničnu vrijednost* A u tački $x = a$, simbolički

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

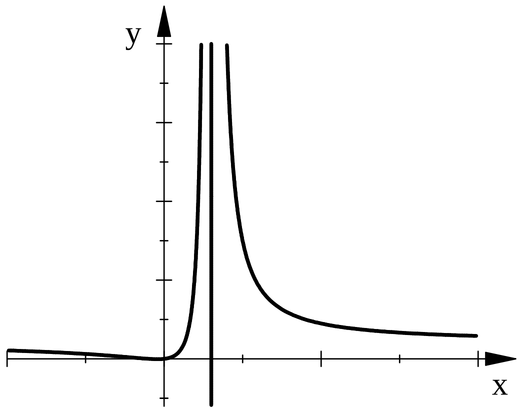
Primijetimo da vrijedi: funkcija $f(x)$ ima graničnu vrijednost A u tački $x = a$ ako i samo ako funkcija $f(x)$ ima i lijevu i desnu graničnu vrijednost A u tački $x = a$ i ako su te vrijednosti međusobno jednake.



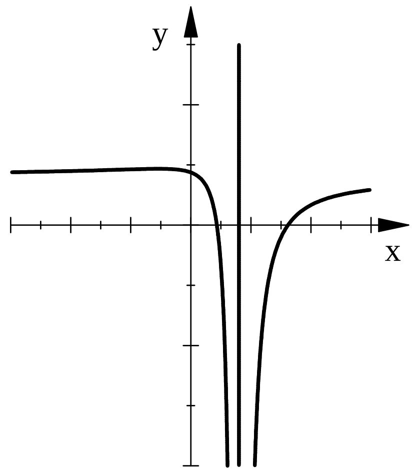
Slika GV2

Naravno da se definicija granične vrijednosti funkcije u nekoj tački $x = a$ može i formalizirati. Naime, *za broj A reći ćemo da je granična vrijednost funkcije u tački $x = a$ ako za proizvoljno odabran broj $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta > 0$, takav da za sve vrijednosti neovisne varijable x koje su dovoljno blizu broja a, tj. za sve $x \in O_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, vrijedi i da su odgovarajuće vrijednosti funkcije $f(x)$ dovoljno blizu vrijednosti broja A, tj. $f(x) \in O_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.* Uočimo da funkcija uopće ne mora biti definirana u tački $x = a$, kao što je to slučaj sa funkcijom $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$, koja nije definirana u $x = 1$.
Možemo razmotriri i sljedeće situacije. Ako pustimo da vrijednosti neovisne varijable neograničeno rastu (kažemo da x teži u $+\infty$, tj. $x \to +\infty$) i ako su pri tome vrijednosti funkcije $f(x)$ sve bliže i bliže vrijednosti A, kažemo da funkcija ima graničnu vrijednost A kada $x \to +\infty$, simbolički

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$



Slika GV3



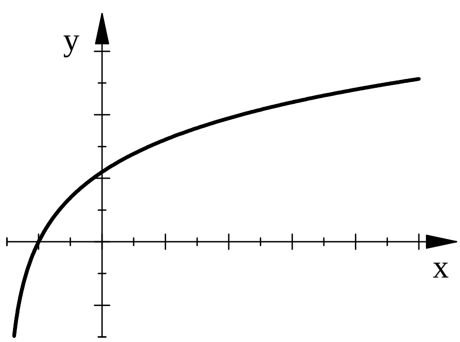
Slika GV4

Analogno se definira i granična vrijednost funkcije kad $x \to -\infty$ i simbolički zapisujemo

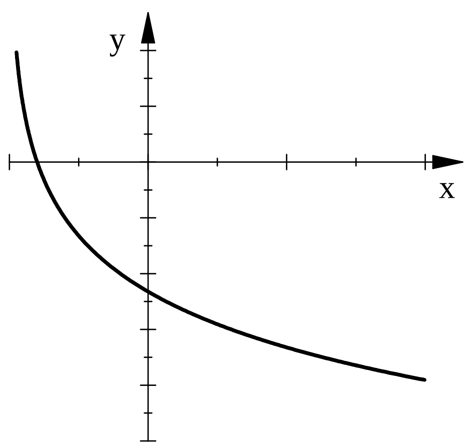
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

Obje situacije su ilustrirane primjerom funkcije na Slici GV2, gdje vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \ i \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$



Slika GV5

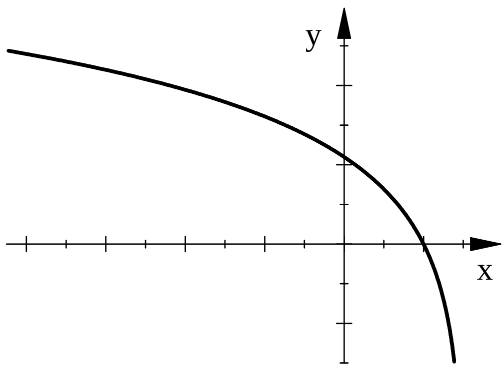


Slika GV6

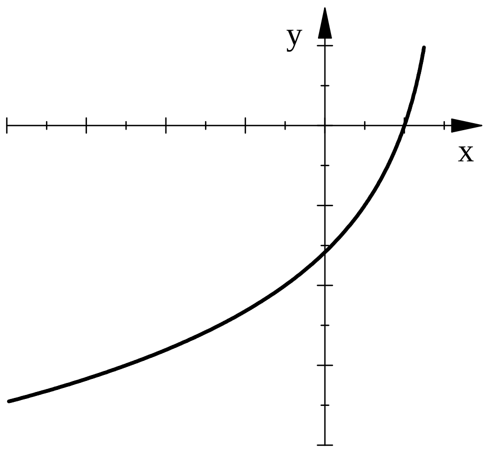
Međutim, može se dogoditi da vrijednosti funkcije $f(x)$ neograničeno rastu, tj. teže ka $+\infty$ (neograničeno opadaju, tj. teže ka $-\infty$) kad se x nalazi dovoljno blizu vrijednosti a. Tada funkcija $f(x)$ u tački a nema konačnu graničnu vrijednost, ali obično kažemo da ona ipak ima graničnu vrijednost $+\infty$, odnosno $-\infty$, u tački $x = a$, simbolički $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, odnosno $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ (v. Sliku GV3 i Sliku GV4).
Isto tako, ako vrijednosti funkcije neograničeno rastu (neograničeno opadaju) kada varijabla x neograničeno raste ili neograničeno opada, kažemo da funkcija ima graničnu vrijednost $+\infty$ ili $-\infty$ kada $x \to +\infty$ (odnosno kad $x \to -\infty$), što simbolički zapisujemo kao

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

(v. Slike GV5, GV6, GV7 i GV8).



Slika GV7



Slika GV8

3.1.2 Osobine granične vrijednosti funkcije

Sama definicija se, naravno, praktično ne koristi za izračunavanje graničnih vrijednosti raznih tipova funkcija. U tu svrhu koriste se osobine granične vrijednosti funkcije iskazane narednim teoremima (koje nećemo dokazivati).

Teorem 3.1 *Ako postoje granične vrijednosti* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *i* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *tada vrijedi* *a)* $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A + B,$

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = A - B,$

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = AB,$

d) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = kA \ (k\in\mathbb{R}),$

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *ako je* $g(x)\neq 0$ *za sve* $x\in D_f$ *i* $B\neq 0,$

f) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^r = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^r = A^r$, *gdje je* r *realan broj za koji je definiran stepen* A^r.

Napomenimo da prethodni teorem vrijedi za $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
Uočimo i sljedeće jednostavne činjenice:

$$\lim_{x\to a} x = a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} k = k \ \ (k\in\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Kao neposrednu posljedicu imamo informaciju o graničnoj vrijednosti polinoma i razlomljene racionalne funkcije.

Teorem 3.2 *a) Neka je* $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, *polinom* n*-tog stepena u varijabli* x, *gdje su* $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ *konstante i* $a_n\neq 0$, *i neka je* $a\in\mathbb{R}$. *Tada je*

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a).$$

b) Ako su $P_n(x)$ *i* $Q_m(x)$ *polinomi i* $Q_m(a)\neq 0, a\in\mathbb{R}$, *tada je*

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Slučaj *a)* se jednostavno može i dokazati, koristeći se Teoremom 3.1 i činjenicama (3.1). Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} P_n(x) &= a_n\lim_{x\to a} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + ... + a_1\lim_{x\to a} x + a_0 \\
&= a_n\left(\lim_{x\to a} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to a} x\right)^{n-1} + ... + a_1\lim_{x\to a} x + a_0 \\
&= a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_1a + a_0 = P_n(a).
\end{aligned}$$

Npr.

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2 - 2x + 9\right) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 9 = 17.$$

Međutim, šta raditi u slučaju *b)* kada je $Q_m(a) = 0$? Tada je potrebno izvršiti rastavljanje obaju polinoma na proste faktore i potom skraćivanje razlomka. Takva nam je situacija bila u prvom primjeru kojim smo uveli pojam granične vrijednosti funkcije. Zaista,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=1+3=4.$$

Pogledajmo sada kako izračunati sljedeću graničnu vrijednost:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}.$$

Slično izračunavanju granične vrijednosti količnika polinoma u varijabli n (slučaj koji smo imali kod nizova), ovdje treba i brojnik i nazivnik razlomka podijeliti sa x^k, gdje je k manji od brojeva m ili n, tj. $k=\min\{m,n\}$. Neka je, recimo, $n>m$. Tada je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^{n-m}+a_{n-1}x^{n-m-1}+...+\dfrac{a_1}{x^{m-1}}+\dfrac{a_0}{x^m}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}}\\ &= \begin{cases}+\infty & \text{ako je } \operatorname{sgn}(a_n)=\operatorname{sgn}(b_m)\\ -\infty & \text{ako je } \operatorname{sgn}(a_n)=-\operatorname{sgn}(b_m)\end{cases}.\end{aligned}$$

Analogno postupamo i kad je u pitanju granični proces kad $x\to-\infty$.
Uočimo također da vrijedi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Primjer 3.1 *Izračunati sljedeće granične vrijednosti:*

$$i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x^2+10}{4x^2+3x+100000},\quad ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{-4x^3+3},\quad iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x-1}{4x^3+3x}.$$

Rješenje. i) Ovdje treba podijeliti i brojnik i nazivnik razlomka sa x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x^2+10}{4x^2+3x+100000}\frac{/:x^2}{/:x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2+\dfrac{10}{x^2}}{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{100000}{x^2}}=+\infty.$$

ii) I u ovom slučaju podijelimo i brojnik i nazivnik razlomka sa x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{-4x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{-4x^3+3}\frac{/:x^2}{/:x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{-4x+\dfrac{3}{x^2}}=0.$$

iii) Podijelimo i brojnik i nazivnik sa x^3:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x-1}{4x^3+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x-1}{4x^3+3x}\frac{/:x^3}{/:x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{4+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}. \quad \clubsuit$$

Primjer 3.2 *Izračunati* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

Rješenje. U pitanju je granična vrijednost razlike dvije funkcije od kojih svaka neograničeno raste kada $x\to+\infty$. Ovdje treba racionalizirati izraz množenjem i dijeljenjem izrazom $\sqrt{x^2+x}+x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+x}\frac{/:x}{/:x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Zbog činjenice da $x\to+\infty$ smatrali smo da je $x>0$, pa smo koristili da je $\sqrt{x^2}=x$. $\clubsuit$

Navedimo još neke važne granične vrijednosti (bez dokazivanja njihove tačnosti). U slučaju kad treba računati graničnu vrijednost izraza s trigonometrijskim funkcijama korisno je znati sljedeću činjenicu:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.2}$$

Na osnovu jednakosti (2.20) pokazuje se da vrijedi:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Ukoliko sada uvedemo smjenu $t=\dfrac{1}{x}$, tada iz $x\to\pm\infty$ slijedi da $t\to0$, pa imamo

$$e=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

Dakle, imamo i sljedeću graničnu vrijednost

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

3.1.3 Primjena granične vrijednosti funkcije u ekonomiji

Granična vrijednost funkcije koja se primjenjuje u ekonomiji predstavlja ponašanje te funkcije kad neovisna varijabla teži ka nekoj vrijednosti. Najčešći slučajevi primjene jesu u ispitivanju ponašanja neke ekonomske funkcije kad neovisna varijabla neograničeno raste.

Primjer 3.3 *Zadana je potražnja d kao funkcija cijene p:*

$$d(p) = \frac{2p+1}{p-3}. \tag{3.3}$$

Odrediti granično ponašanje potražnje kad se cijena neograničeno povećava, a zatim odrediti granično ponašanje cijene kad se potražnja neograničeno povećava. Rezultate ekonomski interpretirati.

Rješenje. Uočimo prvo da je funkcija potražnje definirana za $p > 3$, jer je ona pozitivna samo u tom slučaju, tj. tada ima ekonomskog smisla. U slučaju kad se cijena neograničeno povećava podrazumijevat ćemo da $p \to +\infty$, odnosno pisat ćemo $p \to \infty$, pa je granična vrijednost potražnje u tom slučaju

$$\lim_{p\to\infty} d(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{2p+1}{p-3} = \lim_{p\to\infty} \frac{2+\frac{1}{p}}{1-\frac{3}{p}} = 2.$$

Ekonomska interpretacija ove granične vrijednosti je: za dovoljno veliku cijenu potražnja će se stabilizirati na nivou 2.
Izrazimo sada cijenu p kao funkciju potražnje d. Naime, iz (3.3) imamo

$$pd - 3d = 2p + 1 \Leftrightarrow (d-2)\,p = 3d + 1,$$

odakle je

$$p(d) = \frac{3d+1}{d-2}.$$

Ova funkcija ima ekonomskog smisla za $d > 2$, kada cijena uzima pozitivne vrijednosti. Ako potražnja neograničeno raste, podrazumijevat ćemo da $d \to \infty$, pa će granična vrijednost cijene biti

$$\lim_{d\to\infty} p(d) = \lim_{d\to\infty} \frac{3d+1}{d-2} = \lim_{d\to\infty} \frac{3+\frac{1}{d}}{1-\frac{2}{d}} = 3.$$

Ovo se može ekonomski interpretirati na sljedeći način: za dovoljno veliku potražnju cijena će se stabilizirati na nivou 3. ♣

Primjer 3.4 *Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća*

$$T(Q) = 2\sqrt{5Q-3} + 6Q - 15.$$

Za koje količine proizvodnje je definirana funkcija $T(Q)$*? Naći funkciju prosječnih troškova i interpretirati graničnu vrijednost* $\lim\limits_{Q\to\infty} \overline{T}(Q)$.

Rješenje. Funkcija $T(Q)$ je definirana kada je izraz pod korijenom nenegativan, tj. $5Q - 3 \geq 0$, odnosno za $Q \geq \dfrac{3}{5}$. Funkcija prosječnih troškova je

$$\begin{aligned} \overline{T}(Q) &= \frac{T(Q)}{Q} = \frac{2\sqrt{5Q-3}+6Q-15}{Q} = \frac{2\sqrt{5Q-3}}{Q} + 6 - \frac{15}{Q} \\ &= 2\sqrt{\frac{5Q-3}{Q^2}} + 6 - \frac{15}{Q} = 2\sqrt{\frac{5}{Q} - \frac{3}{Q^2}} + 6 - \frac{15}{Q}, \end{aligned}$$

pa imamo

$$\lim_{Q\to\infty} \overline{T}(Q) = \lim_{Q\to\infty} \left(2\sqrt{\frac{5}{Q} - \frac{3}{Q^2}} + 6 - \frac{15}{Q} \right) = 6.$$

Ekonomska interpretacija: za dovoljno veliku količinu proizvodnje Q prosječni troškovi će se stabilizirati na nivou 6. ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Odrediti sljedeće granične vrijednosti (1-9):

1. a) $\lim\limits_{x\to 2} 5(1-2x)(1-x)$, b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+4}{x^2+x-1}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3t+4t^2}{t^2-t^3}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$.

4. a) $\lim\limits_{a\to 1} \dfrac{a-4\sqrt{a}+3}{a^2-1}$, b) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t^2-4} \right)$.

5. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-4x^2+12}{2+3x-4x^3}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{10x^4-4x^2+12x-5}{5x^3-7}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-5}{\sqrt{4x^2+x+5}}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$.

7. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+2x}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

8. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{2x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

9. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

10. Zadana je cijena p kao funkcija potražnje d:

$$p\left(d\right)=\frac{2d+3}{d-1}.$$

Odrediti granično ponašanje cijene kad se potražnja neograničeno povećava, a zatim odrediti granično ponašanje potražnje kad se cijena neograničeno povećava. Rezultate ekonomski interpretirati.

11. Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća

$$T(Q)=10\sqrt{Q^2-50Q}+2Q.$$

Za koje količine proizvodnje je definirana funkcija $T\left(Q\right)$? Naći funkciju prosječnih troškova i interpretirati $\lim\limits_{Q\to\infty}\overline{T}\left(Q\right)$.

12. Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća

$$T(Q)=\frac{1}{2}\sqrt{2Q^2-16}+6Q-1.$$

Za koje količine proizvodnje je definirana funkcija $T\left(Q\right)$? Naći funkciju prosječnih troškova i interpretirati $\lim\limits_{Q\to\infty}\overline{T}\left(Q\right)$.

3.2 Neprekidnost funkcije

Neprekidnost realne funkcije jedne varijable je vrlo važna lokalna osobina funkcije. Naime, prvo ćemo razmatrati neprekidnost funkcije u jednoj tački, a to će implicirati njenu neprekidnost i u nekoj okolini te tačke, pa otuda konstatacija da je to lokalna osobina.

Intuitivno je pojam neprekidnosti funkcije u nekoj tački moguće vrlo jednostavno predočiti i razumjeti. Naime, to je moguće učiniti pomoću grafa funkcije, koji geometrijski predstavlja neku liniju (krivu) u ravni. Tako kažemo da je funkcija $y = f(x)$ neprekidna u nekoj tački $x = a$ ako je graf te funkcije u tački $(a, f(a))$ neprekinuta kriva, tj. ako se on može nacrtati prolazeći kroz tu tačku bez podizanja olovke s papira. Tako je, na primjer, funkcija $y = x^2$ neprekidna u tački $x = 1$, što se jasno može uočiti s grafa te funkcije.
Iz ovog uočavamo da funkcija mora biti, prije svega, definirana u tački $x = a$, a onda i da u toj tački mora imati graničnu vrijednost $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i da ona mora biti jednaka vrijednosti funkcije u tački $x = a$, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. To možemo pretočiti u definiciju neprekidnosti funkcije.

Definicija 3.1 *Neka je funkcija f definirana u nekoj tački $x = a$ kao i u nekoj okolini te tačke. Kažemo da je funkcija f **neprekidna u tački** $x = a$ ako postoji granična vrijednost funkcije u tački $x = a$ i ako je ona jednaka vrijednosti funkcije u toj tački, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Navedimo sljedeći teorem, bez dokaza, a koji se odnosi na jednu vrlo važnu osobinu elementarnih funkcija.

Teorem 3.3 *Elementarne funkcije su neprekidne u svim tačkama u kojima su definirane.*

Naravno, pomoću pojma neprekidnosti funkcije u tački može se definirati i neprekidnost funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ (ili općenito na nekom skupu $S \subseteq \mathbb{R}$).

Definicija 3.2 *Za funkciju f kažemo da je **neprekidna na intervalu** $I \subseteq \mathbb{R}$ ako je ona neprekidna u svakoj tački intervala I. Posebno, za funkciju f reći ćemo da je **neprekidna funkcija** ako je ona neprekidna u svakoj tački svog definicionog područja.*

Primjer 3.5 *Odrediti vrijednost parametra m tako da funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} x - m & \text{za } x < 3 \\ 1 - mx & \text{za } x \geq 3 \end{cases}$$

bude neprekidna za sve x.

Rješenje. Na intervalu $(-\infty, 3)$ funkcija je linearna, oblika $f(x) = x - m$, dakle elementarna, pa je na tom intervalu i neprekidna. Također i na intervalu $(3, +\infty)$ funkcija je linearna, oblika $f(x) = 1 - mx$, pa je i neprekidna na tom intervalu. Prema tome, preostaje samo zahtijevati da je funkcija neprekidna u tački $x = 3$. Vrijednost funkcije u toj tački je $f(3) = 1 - 3m$. S druge strane, funkcija mora imati graničnu vrijednost u tački $x = 3$. No, kako je s različitih strana te tačke predstavljena različitim izrazima, moramo zahtijevati da postoje njena lijeva i desna granična vrijednost u tački $x = 3$ i da su one jednake međusobno. Naime, imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 3} f(x) &= \lim_{x \uparrow 3} (x - m) = 3 - m, \\ \lim_{x \downarrow 3} f(x) &= \lim_{x \downarrow 3} (1 - mx) = 1 - 3m. \end{aligned}$$

Sada je

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} f(x) \Rightarrow 3 - m = 1 - 3m \Rightarrow m = -1.$$

Ovo je tražena vrijednost parametra m, jer imamo

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4 = f(3). \ \clubsuit$$

3.3 Pojam izvoda (derivacije) funkcije

U primjenama u ekonomiji vrlo često je važno poznavati kojom se brzinom mijenja jedna ekonomska veličina u odnosu na promjenu neke druge veličine o kojoj ona ovisi. U tu svrhu promatrat ćemo prvo stopu promjene bilo koje varijable y općenito (a što će specijalno vrijediti i za ekonomske funkcije) kao posljedicu promjene neke druge varijable x za koje vrijedi određena funkcionalna međuovisnost oblika

$$y = f(x).$$

Drugim riječima, važno nam je ispitati da li se ovisna veličina y mijenja brže ili sporije od neovisne veličine x. Promjenom neovisne varijable od vrijednosti x_0 do vrijednosti x_1 označavat ćemo sa $\Delta x = x_1 - x_0$ i zvat ćemo je *prirastom neovisne varijable* x. U skladu s tom notacijom, novu vrijednost x_1 možemo napisati kao $x_1 = x_0 + \Delta x$. Istovremeno s promjenom vrijednosti neovisne varijable x dolazi i do promjene funkcije od vrijednosti $f(x_0)$ do vrijednosti $f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$. Tu promjenu ćemo označavati sa Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

i zvat ćemo je *prirastom funkcije*.

Na taj način promjena ovisne varijable y po jedinici promjene neovisne varijable x može se predstaviti količnikom prirasta funkcije i prirasta neovisne varijable:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}. \tag{3.4}$$

Taj količnik ustvari mjeri prosječnu stopu promjene varijable y u odnosu na promjenu varijable x. Naime, ako je $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| > 1$, onda se veličina y brže mijenja od veličine x, a ako je $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| < 1$, onda se veličina y sporije mijenja od veličine x.
Iz (3.4) vidimo da je stopa promjene veličine y u odnosu na promjenu veličine x funkcija od x_0 i Δx.

Primjer 3.6 *Neka je zadana funkcija $y = f\left(x\right) = 6x^2 - 5$. Vrijednost funkcije y za neku vrijednost neovisne varijable x_0 je $f\left(x_0\right) = 6x_0^2 - 5$, dok je njena vrijednost za $x_1 = x_0 + \Delta x$ data sa $f\left(x_0 + \Delta x\right) = 6\left(x_0 + \Delta x\right)^2 - 5$. Na taj način dobijamo da je stopa promjene varijable y u odnosu na promjenu neovisne varijable x:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{6\left(x_0 + \Delta x\right)^2 - 5 - \left(6x_0^2 - 5\right)}{\Delta x} = 12x_0 + 6\Delta x. \tag{3.5}$$

Specijalno, ako je $x_0 = 2, \Delta x = 3$, onda će ***prosječna*** *stopa promjene varijable y biti $12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 42$. Dakle, kad se varijabla x promijeni s vrijednosti 2 na vrijednost 5, varijabla y se prosječno promijeni za 42 jedinice po jedinici promjene varijable x.* ♣

Vrlo često nam je, međutim, važno promatrati tu stopu promjene varijable y kad je promjena neovisne varijable Δx vrlo mala. Tada se može dobiti približna vrijednost stope promjene $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ izostavljanjem u tom količniku (zanemarivanjem) svih izraza koji postaju zanemarljivo mali pod djelovanjem veličine Δx. Tako će u Primjeru 3.6 za dovoljno malo Δx biti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12x_0 + 6\Delta x \approx 12x_0.$$

Ako pustimo u (3.5) da $\Delta x \to 0$, onda imamo da $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 12x_0$, odnosno

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 12x_0.$$

Na taj način stopa promjene $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ varijable y ovisi samo o vrijednosti $x = x_0$, a ne i od Δx. Tada nam granična vrijednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ako postoji, označava *brzinu* *promjene* veličine y u odnosu na vrlo malu promjenu varijable x i zvat ćemo je *izvodom* ili *derivacijom* funkcije $y = f(x)$ u (tački) $x = x_0$. Preciznije ćemo pojam izvoda funkcije uvesti sljedećom definicijom.

Definicija 3.3 *Pretpostavimo da je f realna funkcija jedne realne varijable definirana u tački $x = x_0$ i u nekoj njenoj okolini. Ukoliko postoji granična vrijednost*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

tada kažemo da funkcija ima ***izvod*** *u x_0, odnosno da je funkcija f* ***diferencijabilna*** *u tački x_0.*

Izvod funkcije f u x_0 simbolički označavamo sa: $y'(x_0)$ ili $f'(x_0)$. Budući da izvod funkcije ovisi samo o nivou neovisne varijable, možemo općenito govoriti da izvod ovisi o varijabli x, tj. i izvod funkcije $y = f(x)$ je funkcija od x, pa općenito možemo pisati

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

a koristi se i oznaka $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Također se koriste i oznake:

$$y'_x = y_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3.3.1 Geometrijsko značenje izvoda funkcije

Pretpostavimo da se vrijednost neovisne varijable sa x_0 promijeni za Δx. Na grafu krive $y = f(x)$ označimo tačke $P(x_0, f(x_0))$ i $R(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (Slika I1). Neka je α ugao koji sjekanta PR gradi s pozitivnim smjerom ose Ox. U pravouglom trouglu PQR je $\measuredangle QPR = \alpha$ (kao uglovi s paralelnim kracima). Ako pustimo da tačka R klizi duž grafa krive $y = f(x)$ prema tački P, uočavamo da će sjekanta PR težiti da zauzme položaj tangente t krive $y = f(x)$ u tački P. Pri tome se Δx sve više smanjuje, tj. $\Delta x \to 0$. Ako sa β označimo ugao koji tangenta t zaklapa s pozitivnim smjerom ose Ox, onda je jasno da vrijedi

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \alpha \to \beta,$$

odnosno

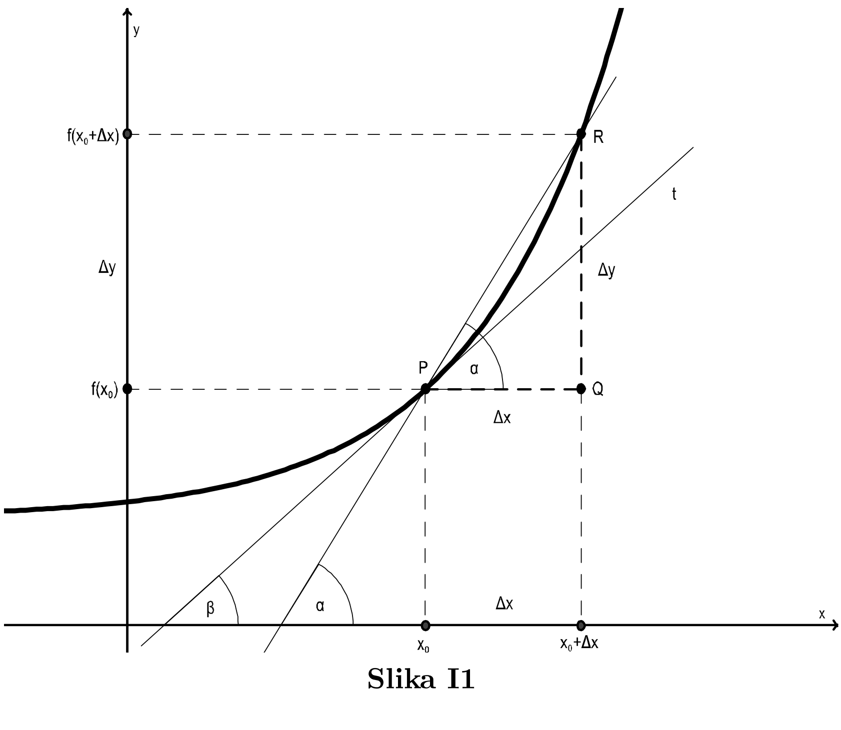
$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\beta. \tag{3.6}$$

Iz $\triangle PQR$ slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{RQ}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3.7}$$

Iz (3.6) i (3.7) dobijamo

$$\operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$



Slika I1

Dakle, *izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 jednak je tangensu ugla β koji tangenta t na krivu $y = f(x)$ u tački $P(x_0, f(x_0))$ zaklapa s pozitivnim smjerom ose Ox, tj. jednak je koeficijentu pravca tangente t, odnosno nagibu tangente t, krive $y = f(x)$ u tački $P(x_0, f(x_0))$.*

Uočimo i sljedeću činjenicu: kad je $y'(x_0) > 0$, tj. kad je nagib tangente t pozitivan, tada je graf funkcije rastuća kriva (odnosno, funkcija je rastuća); kad je

$y'(x_0) < 0$, tj. kad je nagib tangente t negativan, graf funkcije je opadajuća kriva (odnosno, funkcija je opadajuća). U slučaju kad je $y'(x_0) = 0$, tada je tangenta t paralelna sa osom Ox.

3.4 Pravila diferenciranja i izvodi nekih elementarnih funkcija

Koristeći se definicijom izvoda funkcije bez poteškoća mogu se izračunati izvodi nekih jednostavnijih elementarnih funkcija.

1. Neka je $y(x) = c$, gdje je c neka konstanta (tj. funkcija y je konstantna funkcija). Tada je

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

To je u skladu s činjenicom da je graf konstantne funkcije prava paralelna osi Ox, pa je nagib te prave jednak 0.

2. Neka je $y(x) = x$. To je linearna funkcija čiji je graf prava nagiba 1, tj. vrijedi $y'(x) = 1$. Da je to tačno pokazuje se i korištenjem definicije izvoda:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

3. Neka je $y(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, x \neq 0$. Primjenom binomnog obrasca imamo

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + ... + \binom{n}{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + ... + \binom{n}{n-1} x (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + ... + \binom{n}{n-1} x (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= n x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Pokazuje se da, ustvari, vrijedi općenito

$$(x^n)' = n x^{n-1}, n \in \mathbb{R}, x > 0. \tag{3.8}$$

Izvod funkcije $y = \sqrt{x}$, može se naći korištenjem definicije izvoda, ali i formule (3.8):

$$y'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left[(x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Isto tako, za funkciju $y = \dfrac{1}{x}$, koja je česta u upotrebi, vrijedi

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

4. Odredimo izvod logaritamske funkcije $y(x) = \ln x$ koristeći definiciju izvoda:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x+\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \\
&= \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

tj.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je funkcija $y(x) = \ln x$ neprekidna funkcija i da operatori *lim* i *ln* komutiraju, jer za neprekidnu funkciju, kao što smo vidjeli, vrijedi

$$\lim_{x \to a} y(x) = y\left(\lim_{x \to a} x\right) = y(a).$$

5. Za funkciju $y(x) = e^x$ imamo

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{s: } e^{\Delta x} - 1 = t \\ \Delta x = \ln(1+t) \\ \Delta x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \end{array} \right| = e^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = e^x \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} \\
&= e^x \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^x \frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right]} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x,
\end{aligned}$$

dakle,

$$(e^x)' = e^x.$$

Slično se može pokazati da je

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \text{za } a > 0.$$

6. Koristeći definiciju izvoda, jednakost (3.2) i formulu

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

možemo odrediti i izvod funkcije $y(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= 1\cdot\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Analogno se pokazuje da je

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Navedimo sada jednu vrlo važnu osobinu diferencijabilnih funkcija: *diferencijabilna funkcija je neprekidna funkcija, dok obrnuto ne vrijedi općenito.*

Da bismo odredili izvode funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$, kao i izvode malo kompliciranijih funkcija, neophodna su nam tzv. pravila diferenciranja, iskazana sljedećim teoremom.

Teorem 3.4 *Pretpostavimo da su funkcije f i g diferencijabilne, a c proizvoljna konstanta. Tada vrijede sljedeća pravila diferenciranja:*
(i) $[cf(x)]' = cf'(x)$,
(ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,
(iii) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
(iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$.

Dokaz. Dokažimo pravila (i) i (iii).
(i) Neka je $F(x) = cf(x)$. Tada je

$$\begin{aligned} [cf(x)]' &= F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x). \end{aligned}$$

(iii) U ovom slučaju imamo

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + [f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x)g'(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Pri tome smo koristili osobinu da je diferencijabilna funkcija g ujedno i neprekidna funkcija, pa limes (operator *lim*) i funkcija g komutiraju, tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \to 0} (x+\Delta x)\right) = g(x).$$

Iskoristimo li pravilo diferenciranja (i), imamo

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Koristeći pravilo diferenciranja (iv), imamo:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Analogno se dobije

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

U upotrebi su ponekad i inverzne trigonometrijske funkcije: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ i $y = \operatorname{arcctg} x$, koje su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$, respektivno. Naime, npr. u slučaju prve od njih imamo:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$$

pri čemu se uzima $y \in [0, 2\pi)$. Bez dokaza, navedimo formule za izvod inverznih trigonometrijskih funkcija:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Sada možemo napraviti tabelu izvoda elementarnih funkcija koje su najčešće u upotrebi (Tabela 3.3):

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}, x > 0$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Tabela 3.3

Primjer 3.7 *Izračunati izvode sljedećih funkcija:*

$$a)\ y = \frac{2\sqrt[3]{x^2} - 4x^2 + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad b)\ y = x \ln x, \quad c)\ y = \frac{x+1}{2x-1},$$
$$d)\ y = x^2 e^x \sin x, \quad e)\ y = \frac{xe^x - 1}{xe^x + 2}, \quad f)\ y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Rješenje. *a)* Koristeći pravilo diferenciranja (i) i tabelu izvoda elementarnih funkcija, imamo

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{2\sqrt[3]{x^2}-4x^2+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{2x^{\frac{2}{3}}-4x^2+3x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(2x^{\frac{1}{6}}-4x^{\frac{3}{2}}+3\right)' \\
&= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)' - 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + (3)' = 2\cdot\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1} - 4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + 0 = \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{6}} - 6x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[6]{x^5}} - 6\sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

b) Koristeći pravilo diferenciranja (iii) i tabelu izvoda elementarnih funkcija, imamo

$$y' = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

c) Koristimo pravilo diferenciranja (iv):

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)' = \frac{(x+1)'(2x-1)-(x+1)(2x-1)'}{(2x-1)^2} \\
&= \frac{(1+0)(2x-1)-(x+1)(2\cdot 1-0)}{(2x-1)^2} = \frac{2x-1-2x-2}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2}.
\end{aligned}
$$

d) Prema pravilu diferenciranja (iii) je

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(x^2e^x\sin x\right)' = \left(x^2e^x\right)'\sin x + x^2e^x(\sin x)' = \\
&= \left[\left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)'\right]\sin x + x^2e^x\cos x \\
&= 2xe^x\sin x + x^2e^x\sin x + x^2e^x\cos x.
\end{aligned}
$$

e) U ovom slučaju se prvo primijeni pravilo diferenciranja (iv), a onda i pravila (ii) i (iii):

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{xe^x-1}{xe^x+2}\right)' = \frac{(xe^x-1)'(xe^x+2)-(xe^x-1)(xe^x+2)'}{(xe^x+2)^2} \\
&= \frac{\left[(xe^x)'-0\right](xe^x+2)-(xe^x-1)\left[(xe^x)'+0\right]}{(xe^x+2)^2} \\
&= \frac{\left[(x)'e^x+x(e^x)'\right](xe^x+2)-(xe^x-1)\left[(x)'e^x+x(e^x)'\right]}{(xe^x+2)^2} \\
&= \frac{(e^x+xe^x)(xe^x+2)-(xe^x-1)(e^x+xe^x)}{(xe^x+2)^2} \\
&= \frac{(e^x+xe^x)(xe^x+2-xe^x+1)}{(xe^x+2)^2} = \frac{3(1+x)e^x}{(xe^x+2)^2}.
\end{aligned}
$$

f) Primijenimo pravilo diferenciranja (iv):

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2} \\ &= \frac{-\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2} \\ &= \frac{-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Primjer 3.8 *Zadana je funkcija potražnje $Q(p)=\dfrac{2p+1}{p-3}$. Pokazati da je izvod te funkcije negativan broj na svim nivoima cijene $p>3$.*

Rješenje. Uočimo da je ova funkcija potražnje definirana za $p>3$. Primjenom pravila diferenciranja (iv), vodeći računa da je neovisna varijabla cijena p, dobijemo

$$Q'=\frac{dQ}{dp}=\frac{(2p+1)'(p-3)-(2p+1)(p-3)'}{(p-3)^2}=\frac{2(p-3)-(2p+1)\cdot 1}{(p-3)^2},$$

dakle,

$$Q'=\frac{dQ}{dp}=\frac{-7}{(p-3)^2},$$

što je očigledno negativan broj na svim nivoima cijene $p>3$. (Kasnije ćemo vidjeti da to znači da je data funkcija potražnje opadajuća funkcija.) ♣

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

Odrediti izvode sljedećih funkcija (1-5):

1. a) $y=5\left(1-2\sqrt[3]{x^2}\right)(2-\sqrt{x})$, b) $y=\dfrac{x+2}{x^2+x-1}$.

2. a) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$, b) $f(t)=\dfrac{3t+4t^2}{t^2-t^3}$.

3. a) $y = \dfrac{x \ln x + 1}{x \ln x + 2}$, b) $y = \dfrac{x \sin x}{2^x}$.

4. a) $y = \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$, b) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

5. a) $y = \left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x - x$, b) $g(t) = \dfrac{\sqrt{t} e^t}{t + 1}$.

Izračunati (6-7):

6. a) $f'(0)$ za $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x + 1}$, b) $f'(1)$ za $f(x) = \dfrac{x e^x}{x + 1}$.

7. a) $y'(1)$ za $y = \dfrac{x^2 \ln x}{x \ln x + 1}$, b) $y'(-1)$ za $y = \dfrac{2^x - x}{2^x + x}$.

8. Zadana je cijena p kao funkcija potražnje Q:

$$p(Q) = \frac{2Q + 3}{Q - 1}.$$

Pokazati da je izvod ove funkcije negativan za sve nivoe potražnje $Q > 1$.

9. Zadana je funkcija ukupnih troškova nekog poduzeća $T(Q) = Q^3 - \frac{3}{2} Q^2 + 6Q$. Pokazati da je izvod ove funkcije pozitivan za sve nivoe proizvodnje $Q > 0$.

3.5 Izvod složene funkcije (Lančano pravilo)

U praksi se vrlo često susrećemo sa situacijom kada je jedna veličina data kao funkcija jedne varijable, pri čemu se ta varijabla može opet shvatiti kao funkcija neke druge varijable. U ovakvim slučajevima, brzina promjene date veličine u odnosu na drugu varijablu je jednaka proizvodu brzine promjene te veličine u odnosu na prvu varijablu i brzine promjene prve varijable u odnosu na drugu varijablu.

Na primjer, pretpostavimo da su ukupni troškovi proizvodnje (T) u jednoj tvornici funkcija količine proizvoda (Q), a da je količina proizvoda funkcija vremena (t) upotrijebljenog za njihovu proizvodnju. Tada je

$$\frac{dT}{dQ} = \begin{array}{c}\text{brzina promjene troškova} \\ \text{u odnosu na količinu (output)}\end{array} \qquad \text{(dolara po jedinici proizvoda)}$$

i

$$\frac{dQ}{dt} = \begin{array}{c}\text{brzina promjene količine (outputa)} \\ \text{u odnosu na vrijeme}\end{array} \qquad \text{(jedinica proizvoda po satu),}$$

ako uzmemo da je sat jedinica vremena. Logički je jednostavno zaključiti da je proizvod ove dvije brzine ustvari brzina promjene ukupnih troškova u odnosu na vrijeme, tj.

$$\frac{dT}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} = \begin{array}{c}\text{brzina promjene troškova} \\ \text{u odnosu na vrijeme}\end{array} \quad \text{(dolara po satu)}$$

Kako se brzina promjene ukupnih troškova u odnosu na vrijeme može također izraziti kao izvod $\frac{dT}{dt}$, onda slijedi da je

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt}. \tag{3.9}$$

Dakle, imali smo situaciju da je T složena funkcija (kompozicija), tj. $T = T(Q(t))$ i da tada vrijedi formula (3.9), odnosno

$$T_t' = T_Q' \cdot Q_t'.$$

Naravno, ovo se pravilo, koje se popularno naziva *lančanim pravilom*, može formulirati i u općem slučaju.

Teorem 3.5 *Ako je funkcija $f(u)$ diferencijabilna u $u = g(x)$, a $g(x)$ diferencijabilna u x, onda je i složena funkcija $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ diferencijabilna u x i vrijedi*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x),$$

odnosno

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Dokaz. Neka je $E = E(k)$ funkcija definirana sa

$$E(k) = \begin{cases} 0, & \text{za } k = 0 \\ \dfrac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u), & \text{za } k \neq 0. \end{cases}$$

Prema definiciji izvoda imamo

$$\lim_{k \to 0} E(k) = \lim_{k \to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u) = f'(u) - f'(u) = 0 = E(0),$$

što znači da je funkcija $E(k)$ neprekidna u $k = 0$. Također, uočimo da za sve k ($k = 0$ ili ne) vrijedi

$$f(u+k) - f(u) = \left[f'(u) + E(k)\right] k. \tag{3.10}$$

Sada stavimo da je $k = g(x + \Delta x) - g(x)$, pa je $u + k = g(x + \Delta x)$ i

$$f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) \overset{(3.10)}{=} \left[f'(g(x)) + E(k)\right][g(x + \Delta x) - g(x)].$$

Budući da je funkcija g diferencijabilna u x, vrijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x).$$

Istovremeno funkcija g je i neprekidna u x (jer je diferencijabilna u x), tako da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} k = \lim_{\Delta x \to 0} [g(x + \Delta x) - g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) - g(x) = 0.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(g(x)) + E(k)\right] \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \left[f'(g(x)) + 0\right] g'(x) = f'(g(x))\, g'(x).
\end{aligned}$$

■

Primjer 3.9 *Odredimo izvod funkcije* $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Rješenje. Ovdje je $y = f(u)$, gdje je $u = g(x)$, pa je $y = f(g(x))$. Specijalno, u ovom primjeru je $f(u) = \sqrt{u}$ i $g(x) = 1 + x^2$. Budući da su odgovarajući izvodi od f i g:

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{i} \qquad g'(x) = 2x,$$

lančano pravilo nam daje rezultat

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer 3.10 *Odrediti izvode sljedećih funkcija:*
a) $y = (5x + 6)^{15}$, *b)* $y = e^{-x^2 + x}$, *c)* $y = \ln \sin(2x + \pi)$.

Rješenje. a) Uočimo da je data funkcija kompozicija dvije funkcije, od kojih je vanjska funkcija 15-ti stepen, a unutarnja je $5x+6$. Prema lančanom pravilu, prvo nađemo izvod 15-tog stepena, a zatim ga pomnožimo izvodom funkcije $5x+6$, tj.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 15\,(5x+6)^{14} \cdot (5x+6)' = 15\,(5x+6)^{14} \cdot 5 = 75\,(5x+6)^{14}.$$

b) Ovdje je vanjska funkcija eksponencijalna, a unutarnja je $-x^2+x$, pa je

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-x^2+x} \cdot \left(-x^2+x\right)' = e^{-x^2+x} \cdot (-2x+1).$$

c) Data funkcija je kompozicija tri funkcije: vanjska je logaritamska ln, srednja je sin, a unutarnja $2x+\pi$:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin(2x+\pi)}\left(\sin(2x+\pi)\right)' = \frac{1}{\sin(2x+\pi)} \cdot \cos(2x+\pi) \cdot (2x+\pi)' \\ &= 2\operatorname{ctg}(2x+\pi). \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Primjer 3.11 ***(Potražnja kupaca)*** *Dok se električne mješalice budu prodavale po cijeni p dolara, lokalni kupci će kupovati $D(p) = \dfrac{8000}{p}$ mješalica mjesečno. Procjene su da će u narednih t mjeseci cijena mješalica biti $p(t) = 0.04t^{\frac{3}{2}} + 15$ dolara. Odrediti brzinu kojom će mjesečna potražnja mješalica biti mijenjana u odnosu na vrijeme od 25 mjeseci od sada. Da li će potražnja rasti ili opadati?*

Rješenje. Cilj nam je da nađemo $\dfrac{dD}{dt}$ kad je $t=25$. Kako je

$$\frac{dD}{dp} = -\frac{8000}{p^2} \quad \text{i} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{3}{2} \cdot 0.04t^{\frac{1}{2}} = 0.06t^{\frac{1}{2}},$$

prema lančanom pravilu slijedi da je

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dp}\frac{dp}{dt} = -\frac{8000}{p^2} \cdot 0.06t^{\frac{1}{2}} = -\frac{480t^{\frac{1}{2}}}{p^2}.$$

Kad je $t=25$, onda je

$$p = p(25) = 0.04 \cdot 25^{\frac{3}{2}} + 15 = 20,$$

i

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{t=25} = -\frac{480 \cdot 25^{\frac{1}{2}}}{20^2} = -6 \ \text{ mješalice mjesečno.}$$

Dakle, potražnja će opadati. $\clubsuit$

3.5.1 Logaritamski izvod

Razmotrimo funkciju
$$y = [u(x)]^{v(x)}, \quad u(x) > 0.$$
Očito je da izvod ove funkcije ne možemo naći ni po jednom do sada navedenom pravilu za izračunavanje izvoda. Ideja je da se funkcija $v(x)$ na neki način 'skine' s mjesta eksponenta. To, naravno, možemo uraditi logaritmiranjem funkcije y :
$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$
Diferencirajmo po x obje strane posljednje jednakosti. Primjenom lančanog pravila, izvod funkcije na lijevoj strani je
$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \cdot y',$$
a izvod funkcije na desnoj strani je
$$v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x),$$
pa imamo
$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$
odnosno
$$y' = [u(x)]^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Primjer 3.12 *Izračunati $y'(1)$ funkcije $y = x^x$.*

Rješenje. Prema opisanom postupku (za logaritamsko deriviranje) imamo
$$\ln y = x \ln x,$$
odakle se, računanjem izvoda i lijeve i desne strane, dobija
$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1.$$
Dakle,
$$y' = x^x (\ln x + 1)$$
i
$$y'(1) = 1 \cdot (\ln 1 + 1) = 1. \quad \clubsuit$$

Logaritamski izvod se može uspješno primijeniti u svim situacijama u kojima se nakon logaritmiranja zadane funkcije dobije neka jednostavnija funkcija, što je česta pojava u ekonomskoj praksi.

Primjer 3.13 *Odrediti izvod funkcije*

$$f(x)=\frac{\left(2x^2+3\right)^{\frac{3}{4}}\left(x^3+5\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+13\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Rješenje. Prvo logaritmirajmo datu funkciju:

$$\ln f(x)=\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+3\right)+\frac{2}{3}\ln\left(x^3+5\right)-\frac{1}{4}\ln\left(x^4+13\right),$$

a zatim derivirajmo obje strane posljednje jednakosti

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+3}\cdot 4x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3+5}\cdot 3x^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+13}\cdot 4x^3,$$

odakle je

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+3\right)^{\frac{3}{4}}\left(x^3+5\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+13\right)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{3x}{2x^2+3}+\frac{2x^2}{x^3+5}-\frac{x^3}{x^4+13}\right]. \quad \clubsuit$$

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Odrediti izvode sljedećih funkcija (1-5):

1. a) $y=\left(1-2\sqrt[3]{x^2}\right)^8$, b) $y=\sin 5x$.

2. a) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, b) $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t^2-t^3}}$.

3. a) $y=\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)^3$, b) $y=\dfrac{(1-2x)^2}{(3x+1)^3}$.

4. a) $y=x^2e^{-x}$, b) $y=\dfrac{xe^{2x}-1}{xe^{2x}+1}$.

5. a) $y=\sqrt{\sin^2 x+1}$, b) $g(t)=\dfrac{\sqrt{t+1}}{t-1}$.

Izračunati (6-7):

6. a) $f'(4)$ za $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, b) $f'(-2)$ za $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}$.

7. a) $y'(3)$ za $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$, b) $\left.\dfrac{d}{dt}\sqrt{3t-7}\right|_{t=3}$.

8. Jedan uvoznik brazilske kahve procjenjuje da će lokalni kupci kupovati aproksimativno $D(p) = \dfrac{4374}{p^2}$ kilograma kahve sedmično dok je njena cijena p dolara po kilogramu. Procjenjuje se da će se cijena brazilske kahve kretati po zakonitosti $p(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6$ dolara po kilogramu (vrijeme t se mjeri u sedmicama). Odrediti brzinu kojom će sedmična potražnja kahve biti mijenjana u odnosu na vrijeme od 10 sedmica od sada. Da li će potražnja rasti ili opadati?

9. Procjenjuje se da će za narednih t godina od sada populacija određene prigradske zajednice biti $p(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ hiljada. Jedna studija je pokazala da će srednji dnevni nivo koncentracije karbon monoksida u zraku biti $c(p) = 0.5\sqrt{p^2+p+58}$ mjernih jedinica na p hiljada članova populacije. Odrediti brzinu kojom će koncentracija karbon dioksida biti mijenjana u odnosu na vrijeme od 2 godine od sada.

10. U jednoj tvornici ukupni troškovi proizvodnje Q jedinica nekog proizvoda u toku jednodnevne produkcije iznose $T(Q) = 0.2Q^2 + Q + 900$ dolara. Iz iskustva je poznato da se proizvede $Q(t) = t^2 + 100t$ jedinica proizvoda u vremenu prvih t sati proizvodnje. Odrediti brzinu kojom će ukupni troškovi biti mijenjani u odnosu na vrijeme od 1 sata nakon što proizvodnja započne.

11. Odrediti izvode sljedećih funkcija:

a) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, b) $y = (\sin x)^x$, c) $y = \dfrac{\left(x^2+3\right)^2 (3x+5)^{\frac{4}{3}} (1-x)^3}{(x^5+5x)^{\frac{1}{5}}}$.

3.6 Diferencijal funkcije

Prisjetimo se definicije izvoda funkcije y u tački x, uz pretpostavku da je u toj tački funkcija diferencijabilna,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Pri uvođenju pojma izvoda funkcije konstatirali smo da je $y'(x) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ za dovoljno malo Δx. Drugim riječima, razlika $y'(x) - \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je vrlo mala veličina za dovoljno malo Δx. Ta razlika ovisi i o x i o Δx, te možemo uvesti oznaku $\varepsilon(x, \Delta x) = y'(x) - \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Dakle, ako je funkcija y diferencijabilna u tački x, očito vrijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(y'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} y'(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) - y'(x) = 0.$$

Na osnovu ovoga je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \varepsilon(x, \Delta x),$$

odnosno

$$\Delta y = y'(x) \Delta x + \varepsilon(x, \Delta x) \Delta x. \tag{3.11}$$

Vidimo da je prirast funkcije zbir dva izraza od kojih je jedan $\varepsilon(x, \Delta x) \Delta x$. Kako je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x, \Delta x) = 0$, to je pogotovu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x, \Delta x) \Delta x = 0$, pa je

$$\Delta y \simeq y'(x) \Delta x.$$

Zbog toga, prvi izraz u zbiru na desnoj strani jednakosti (3.11) je *glavni dio prirasta* Δy funkcije y u tački x, dok je drugi izraz zanemarivo mala veličina kad je Δx dovoljno malo. Taj glavni dio prirasta funkcije zvat ćemo *diferencijalom funkcije* y i označavat ćemo ga sa dy. Dakle,

$$dy = y'(x) \Delta x \tag{3.12}$$

i pri tome je

$$\Delta y \simeq dy.$$

Neka je, specijalno, $y = x$. Tada je $dy = dx$, a iz (3.12) imamo, zbog $y' = 1$,

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Dakle, prirast Δx neovisne varijable x možemo označavati i sa dx, a zbog toga diferencijal funkcije y možemo pisati kao

$$dy = y'(x) \, dx. \tag{3.13}$$

Diferencijal ima i svoju geometrijsku interpretaciju, slično kao i kod izvoda funkcije, v. Sliku I2. Naime, neka je t tangenta povučena na graf krive $y = y(x)$ u tački $M(x, y(x))$. Tada iz pravouglog trougla ΔMNP imamo da je

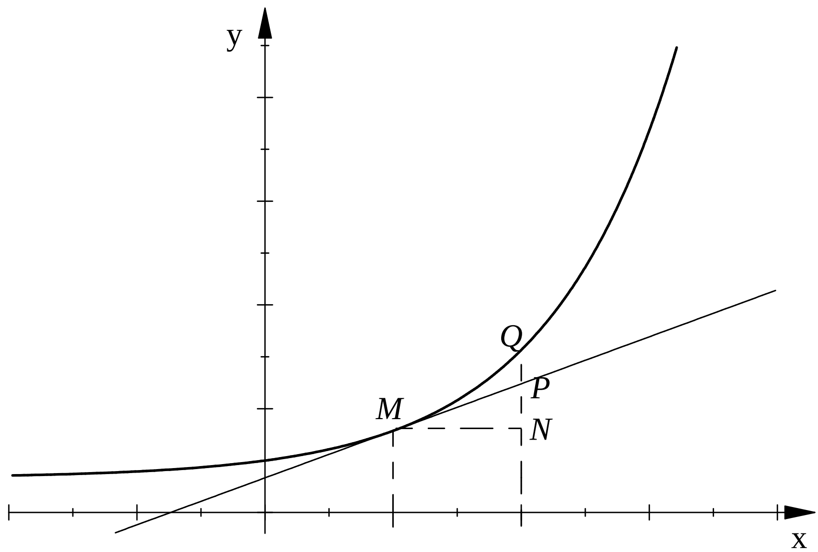
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NP}{MN} = \frac{NP}{\Delta x},$$

a kako je prema geometrijskom značenju izvoda funkcije $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, to je

$$NP = y'(x)\,\Delta x = y'(x)\,dx = dy.$$

Dakle, geometrijski, *diferencijal funkcije y u tački x predstavlja prirast ordinate tangente u toj tački koji je posljedica prirasta dx neovisne varijable.*

Uočimo na Slici I2 i sljedeće: kako je ukupni prirast funkcije $NQ = \Delta y$, očito je $\Delta y \simeq dy$, za dovoljno malo Δx, što smo već konstatirali da vrijedi.



Slika I2: Geometrijsko značenje diferencijala funkcije

Napomena 3.1 *Diferencijal funkcije može se koristiti za približno izračunavanje vrijednosti funkcije. Naime, iz $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) \approx dy$, slijedi*

$$y(x+\Delta x) \simeq y(x) + dy.$$

Primjer 3.14 *Koristeći se diferencijalom funkcije, izračunati približnu vrijednost izraza: a)* $\ln 1.02$, *b)* $\sqrt[3]{123}$.

Rješenje. a) Kako nam je poznato da je $\ln 1 = 0$, uzmimo da je $x = 1$, a $\Delta x = dx = 0.02$. Diferencijal funkcije $y = \ln x$ je $dy = \dfrac{1}{x}dx$, odnosno u ovom slučaju

$$dy = \frac{1}{1}\cdot 0.02 = 0.02,$$

pa imamo

$$\ln 1.02 = \ln(1+0.02) \simeq \ln 1 + dy = 0 + 0.02 = 0.02.$$

Koristeći se kalkulatorom, dobije se $\ln 2 \simeq 0.0198026273$.

b) Znajući da je $\sqrt[3]{125} = 5$, ovdje ćemo uzeti $x = 125$ i $\Delta x = dx = -2$. Kako je za funkciju $y = \sqrt[3]{x}$ njen diferencijal $dy = y'dx = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, imamo

$$\sqrt[3]{123} \simeq y(125) + dy = \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3}125^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = 5 - \frac{2}{75} \simeq 4.9733333333.$$

Koristeći se kalkulatorom, dobijemo $\sqrt[3]{123} \simeq 4.973189833$. ♣

Napomena 3.2 *Uočimo da vrijedi:*

a) $d(cf(x)) = c \cdot df(x)$ *(c konstanta),* *b)* $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$,

c) $d[f(x)g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$,

d) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$.

3.6.1 Primjeri primjene diferencijala u ekonomiji

Navedimo par vrlo karaktersitičnih primjena diferencijala u ekonomskoj praksi.

Primjer 3.15 *Pretpostavimo da je ukupni trošak proizvodnje Q jedinica određenog proizvoda*

$$T(Q) = 3Q^2 + 5Q + 10.$$

Ako je sadašnji nivo proizvodnje 40 jedinica, procijeniti za koliko će se promijeniti ukupni troškovi ako bi se proizvelo 40.5 jedinica.

Rješenje. U ovom primjeru je sadašnja vrijednost neovisne varijable $Q = 40$, a njen prirast je $\Delta Q = dQ = 0.5$. Prema aproksimacionoj formuli, odgovarajuća promjena ukupnih troškova je

$$\Delta T = T(40.5) - T(40) \approx T'(40)\,\Delta Q.$$

Kako je

$$T'(Q) = 6Q + 5 \quad \text{i} \quad T'(40) = 6 \cdot 40 + 5 = 245,$$

slijedi da je

$$\Delta T \simeq T'(40) \cdot 0.5 = 245 \cdot 0.5 = 122.5\,(\$).$$

Provjerimo kolika je promjena ukupnih troškova ako se računa njihova razlika na nivoima $Q = 40.5$ i $Q = 40$. Naime, kako je

$$T(40.5) = 3 \cdot 40.5^2 + 5 \cdot 40.5 + 10 = 5133.25,$$

$$T(40) = 3 \cdot 40^2 + 5 \cdot 40 + 10 = 5010,$$

to je

$$\Delta T = T(40.5) - T(40) = 5133.25 - 5010 = 123.25\,(\$),$$

pa zaključujemo da je već izračunata približna vrijednost manja samo za 0.75 (\$). ♣

U sljedećem primjeru, koji se često javlja u praksi, poznata je željena promjena funkcije, a cilj je procijeniti potrebnu odgovarajuću promjenu neovisne varijable.

Primjer 3.16 *Dnevna proizvodnja (output) u nekoj tvornici je* $Q(L) = 900L^{\frac{1}{3}}$*, gdje* L *označava veličinu radne snage mjerene u radnim satima. Sada se svakodnevno koristi* 1000 *radnih sati. Procijeniti broj dodatnih radnih sati radnika ako se planira povećati dnevna proizvodnja za* 15 *jedinica.*

Rješenje. Odredimo ΔL koristeći aproksimacionu formulu

$$\Delta Q \simeq Q'(L)\,\Delta L,$$

sa

$$\Delta Q = 15, \quad L = 1000 \quad \text{i} \quad Q'(L) = 300L^{-\frac{2}{3}} = 300 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} = 300 \cdot \frac{1}{100} = 3.$$

Naime,

$$\Delta L \simeq \frac{\Delta Q}{Q'(L)} = \frac{15}{3} = 5 \quad \text{(radnih sati)}. \quad ♣$$

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

1. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $(1.003)^5$.

2. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $e^{-0.02}$.

3. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $\sin 31^\circ$.

4. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $\sqrt[4]{17}$.

5. Ukupni troškovi proizvodnje su $T(Q) = 0.1Q^3 - 0.5Q^2 + 500Q + 200$ dolara na nivou proizvodnje Q jedinica proizvoda. Sadašnji nivo proizvodnje je 4 jedinice, ali mendžment tvornice planira da poveća nivo proizvodnje na 4.1 jedinice proizvoda. Procijeniti za koliko će se promijeniti ukupni troškovi proizvodnje.

6. Ukupni mjesečni prihod u jednoj tvornici je $P(Q) = 240Q + 0.05Q^2$ dolara kada se proizvede Q jedinica proizvoda mjesečno. Sada se u tvornici proizvodi 80 jedinica mjesečano, a planira se smanjenje proizvodnje za 0.65 jedinica proizvoda mjesečno. Procijeniti za koliko će se promijeniti ukupni mjesečni prihod.

7. U jednoj tvornici dnevna proizvodnja je $Q(K) = 600K^{\frac{1}{2}}$ jedinica, gdje K označava kapitalna ulaganja od 1000 (\$) po jedinici proizvoda. Trenutna kapitalna ulaganja iznose 900000 (\$). Procijeniti posljedice kapitalnih ulaganja od 800 (\$) dnevno po jedinici proizvoda.

8. Ukupni troškovi proizvodnje nekog outputa su $T(Q) = \frac{1}{6}Q^3 + 642Q + 400$ dolara kada se proizvede Q jedinica outputa. Sadašnji nivo proizvodnje je 4 jedinice. Procijeniti iznos smanjnjenja proizvodnje da bi se ukupni troškovi reducirali za 130 (\$).

3.7 Izvod implicitno zadane funkcije

Do sada smo radili s funkcijama u *eksplicitnom* obliku, tj. s funkcijama oblika $y = f(x)$, gdje je ovisna varijabla y data eksplicitno izrazom $f(x)$ na desnoj strani koji uključuje samo neovisnu varijablu x. Tako su sve funkcije

$$y = 3x^3 - 2x + 17, \quad y = \frac{2x+1}{x^2-1}, \quad y = \sqrt{4-x^2}, \quad y = \ln(2x+3)$$

funkcije u eksplicitnom obliku.

Ponekad, međutim, praktični problemi dovode do jednadžbi u kojima funkcija y nije eksplicitno zadana preko neovisne varijable x, kao što su, na primjer, jednadžbe

$$x^2y^3 - 8 = 5y^2 + 3x, \quad e^{xy} - 2y^2 = x + y + 1.$$

Budući da te jednadžbe nisu riješene po y, za njih kažemo da *definiraju y implicitno kao funkciju od x*, odnosno kažemo da je funkcija y zadana u *implicitnom obliku.*

Tako je, na primjer, sa $y = 2x + 5$ zadana funkcija u eksplicitnom obliku, ali sa $2x - y + 5 = 0$ funkcija je zadana u implicitnom obliku. Obrnuto, međutim, prevesti funkciju iz implicitnog oblika u eksplicitni nije uvijek moguće. Zbog toga pri izračunavanju izvoda funkcije u implicitnom obliku treba uvijek provjeriti može li se funkcija prevesti u ekplicitni oblik i, ako može, onda njen izvod tražiti na već ranije opisane načine. Ukoliko to nije moguće, onda izvod treba tražiti na poseban način. Tehnika diferenciranja funkcije zadane u implicitnom obliku ima dva koraka:

1. *diferenciranje po neovisnoj varijabli x obje strane jednadžbe, vodeći pri tome računa da je y zaista funkcija od x i koristeći lančano pravilo kod diferenciranja članova koji sadrže y;*

2. *riješiti diferenciranu jednadžbu algebarski po $\frac{dy}{dx} = y'$.*

Primjer 3.17 *Odrediti $y' = \frac{dy}{dx}$ ako je $x^2y + 2y^3 = 3x + 4y^2$.*

Rješenje. Diferencirajmo po x obje strane date jednadžbe, vodeći računa o upotrebi lančanog pravila u svim članovima koji sadrže y:

$$2xy + x^2y' + 6y^2y' = 3 + 8yy',$$

odakle je

$$\left(x^2 + 6y^2 - 8y\right) y' = 3 - 2xy,$$

odnosno

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 8y}. \quad \clubsuit$$

Primjer 3.18 *Odrediti nagib tangente na krivu $x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$ kad je $x = 2$.*

Rješenje. Potrebno je odrediti $y'(2)$. Postupimo kao i u prethodnom primjeru:

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 15y^2y' + 1 \Rightarrow \left(3x^2y^2 - 15y^2\right) y' = 1 - 2xy^3,$$

odakle je

$$y' = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}. \tag{3.14}$$

Odavde vidimo da nam je neophodno prvo odrediti vrijednost y koja odgovara vrijednosti varijable $x = 2$. To ćemo postići tako što $x = 2$ uvrstimo u polaznu jednadžbu i izračunamo y:

$$4y^3 - 6 = 5y^3 + 2,$$

odakle je $y^3 = -8$, odnosno $y = -2$. Zamjenom vrijednosti $x = 2$ i $y = -2$ u (3.14), dobijemo

$$y' = \frac{1 - 2 \cdot 2 \cdot (-2)^3}{3 \cdot 2^2 \cdot (-2)^2 - 15 \cdot (-2)^2} = -\frac{11}{4}. \quad \clubsuit$$

3.7.1 Primjer primjene u ekonomiji

Navedimo zanimljivu primjenu diferenciranja implicitne funkcije u ekonomiji.

Primjer 3.19 *Pretpostavimo da je output jedne tvornice* $Q = 2x^3 + x^2y + y^3$ *jedinica, gdje je* x *broj radnih sati vještih radnika, a* y *broj radnih sati nevještih radnika. Trenutna radna snaga se sastoji od* 30 *radnih sati vještih radnika i* 20 *radnih sati nevještih radnika. Procijeniti promjenu broja radnih sati nevještih radnika* y *koja bi odgovarala povećanju* 1 *radnog sata vještih radnika* x *tako da proizvodnja ostane na istom nivou.*

Rješenje. Uvjet zadatka podrazumijeva da veličina Q ostane nepromijenjena, tj. konstantna. Njena vrijednost trenutno je (kad je u pitanju 30 sati vještih radnika i 20 sati nevještih radnika):

$$Q = 2 \cdot 30^3 + 30^2 \cdot 20 + 20^3 = 80000 \text{ (jedinica)}.$$

Zbog toga je, ustvari,

$$80000 = 2x^3 + x^2y + y^3. \tag{3.15}$$

Cilj nam je da procijenimo promjenu Δy veličine y koja odgovara povećanju 1 jedinice veličine x (tj. kad je $\Delta x = 1$) kada su x i y vezani jednadžbom (3.15). Kako smo vidjeli u Sekciji 3.6, vrijedi

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = \frac{dy}{dx} \cdot 1 = \frac{dy}{dx}.$$

Preostaje da se odredi izvod $\frac{dy}{dx}$ implicitno zadane funkcije (3.15):

$$\begin{aligned} 0 &= 6x^2 + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} \\ &\Rightarrow \left(x^2 + 3y^2\right)\frac{dy}{dx} = -\left(6x^2 + 2xy\right) \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}. \end{aligned}$$

Odredimo vrijednost izvoda $\frac{dy}{dx}$ kad je $x = 30$ i $y = 20$, kako bismo dobili procjenu promjene veličine y:

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} = -\frac{6 \cdot 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 20}{30^2 + 3 \cdot 20^2} \approx -3.14 \text{ (sati)}.$$

Dakle, da bi se zadržao isti nivo proizvodnje potrebno je smanjiti broj radnih sati nevještih radnika za približno 3.14 sati usljed povećanja broja radnih sati vještih radnika za 1 sat. ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Sljedećim funkcijama zadanim implicitno odrediti izvod $\dfrac{dy}{dx}$:

a) $7x - x^2y^3 = y + 15,$ b) $\left(2x^3 + 3y^2\right)^6 = 5xy + 3x - 2,$

c) $e^{-y} + e^{-x} + xy = 0.$

2. Odrediti nagib tangente date krive u specificiranoj vrijednosti od x:

a) $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1;\ x = 1,$ b) $\left(x^2 - 2y\right)^3 = 2xy^2 + 64;\ x = 0.$

3. Output jedne tvornice je $Q = 0.08x^2 + 0.12xy + 0.03y^2$ jedinica, gdje je x broj radnih sati vještih radnika, a y broj radnih sati nevještih radnika. Trenutna radna snaga se sastoji od 80 sati vještih radnika i 200 sati nevještih radnika svakodnevno. Procijeniti promjenu broja radnih sati nevještih radnika y koja bi odgovarala povećanju 1 radnog sata vještih radnika x tako da proizvodnja ostane na istom nivou.

4. U jednoj tvornici outpu Q je povezan s inputima x i y jednadžbom

$$Q = 2x^3 + 3x^2y^2 + (1 + y)^3.$$

Ako su sadašnji nivoi intputa $x = 30$ i $y = 20$, procijeniti izmjenu u inputu y kojom bi se nadomjestio smanjenje 0.8 jedinica intputa x tako da nivo outputa Q ostane na sadašnjem nivou.

5. U jednoj tvornici outpu Q je povezan s inputima u i v jednadžbom

$$Q = 3u^2 + \frac{2u + 3v}{(u + v)^2}.$$

Ako su sadašnji nivoi intputa $u = 10$ i $v = 25$, procijeniti izmjenu u inputu v kojom bi se nadomjestio smanjenje 0.7 jedinica intputa u tako da nivo outputa Q ostane na sadašnjem nivou.

6. Output jedne tvornice je $Q = 0.06x^2 + 0.14xy + 0.05y^2$ jedinica, gdje je x broj radnih sati vještih radnika, a y broj radnih sati nevještih radnika. Trenutna radna snaga se sastoji od 60 sati vještih radnika i 300 sati nevještih radnika svakodnevno. Procijeniti promjenu broja radnih sati nevještih radnika y koja bi odgovarala smanjenju 1 radnog sata vještih radnika x tako da proizvodnja ostane na istom nivou.

3.8 Izvodi i diferencijali višeg reda

Vidjeli smo da izvod $f'(x)$ predstavlja brzinu promjene funkcije f u odnosu na varijablu x. Slično, brzina promjene funkcije $f'(x)$ je data njenim izvodom, ukoliko on postoji. To zaista ima praktičnog smisla. Naime, razmatramo li pojam brzine kretanja nekog tijela, jasno je da ona predstavlja brzinu promjene puta u odnosu na vrijeme (odnosno ona je izvod funkcije puta u odnosu na vrijeme). No, razmatra se i pitanje brzine promjene brzine kretanja, što je ustvari ubrzanje, a u matematičkom smislu ubrzanje je izvod funkcije brzine kretanja tijela u odnosu na vrijeme. Isto tako, izjave o brzini promjene brzine promjene često se koriste i u ekonomiji. U vrijeme inflacije, na primjer, može se čuti kako vladini ekonomski eksperti uvjeravaju naciju da, iako postoji inflacija (tj. stopa (brzina) povećanja cijena), brzina inflacije opada. Drugim riječima, cijene još uvijek rastu, ali ne tako brzo kako su rasle prije.

Na taj način ćemo za izvod izvoda funkcije f reći da je *drugi izvod* funkcije f i u praktičnom smislu on će predstavljati brzinu promjene brzine promjene polazne funkcije f. Uvedimo preciznu definiciju.

Definicija 3.4 *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 i ukoliko postoji granična vrijednost*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f'}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x},$$

onda se ta granična vrijednost naziva ***drugim izvodom*** *funkcije $f(x)$ u tački x_0 i označava sa $f''(x_0), f^{(2)}(x_0)$ ili $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$.*

Ako funkcija $f''(x)$ ima izvod u tački x_0, onda ga nazivamo *trećim izvodom* funkcije $f(x)$ i označavamo sa $f'''(x_0), f^{(3)}(x_0)$ ili $\dfrac{d^3 f(x_0)}{dx^3}$. Općenito, pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima izvod reda $n-1$ u tački x_0, tj. $f^{(n-1)}(x_0)$. Ako funkcija $f^{(n-1)}(x)$ ima izvod u tački x_0, nazivamo ga *n-tim izvodom* funkcije $f(x)$ u tački x_0 i označavamo sa $f^{(n)}(x_0)$ ili $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$. Dakle,

$$f^{(n)}(x_0)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0).$$

Napomenimo da se za izvod funkcije upotrebljava i termin prvi izvod funkcije.

Primjer 3.20 *Odrediti drugi izvod funkcije $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.*

Rješenje. Odredimo prvo prvi izvod:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2} \\
&= \frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Napomena 3.3 *Postoje neke funkcije koje u nekoj tački imaju samo prvi izvod ili izvode do određenog reda. Tako funkcija* $y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$ *ima prvi izvod* $y = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ *u svim tačkama* $x \in \mathbb{R}$*, tj. u svim tačkama definicionog područja funkcije* y*, pa specijalno i u tački* $x = 0$*. Međutim, funkcija* $y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$ *nije definirana u tački* $x = 0$*.*
Slično, funkcija $y = \sqrt[3]{x^7} = x^{\frac{7}{3}}$ *ima prvi izvod* $y' = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$ *i drugi izvod* $y'' = \frac{28}{9}x^{\frac{1}{3}} = \frac{28}{9}\sqrt[3]{x}$*, oba definirana u svim tačkama* $x \in \mathbb{R}$*, pa specijalno i u tački* $x = 0$*. Ipak, funkcija* $y''' = \frac{28}{27}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{27\sqrt[3]{x^2}}$ *nije definirana u tački* $x = 0$*.*

Pretpostavimo sada da funkcija $f(x)$ ima drugi izvod u tački x. Diferencijal ove funkcije u tački x je $df(x) = f'(x)\,dx$, a zbog diferencijabilnosti funkcije $f'(x)$ u tački x, imamo da postoji diferencijal diferencijala $df(x)$ i vrijedi

$$\begin{aligned}
d\left(df(x)\right) &= d\left(f'(x)\,dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)\,d(dx) \\
&= \left(f''(x)\,dx\right)dx + f'(x)\cdot 0 = f''(x)\,(dx)^2 \\
&= f''(x)\,dx^2.
\end{aligned}$$

Diferencijal diferencijala funkcije $f(x)$ nazvat ćemo *drugim diferencijalom* $f(x)$ i označavat ćemo ga sa $d^2f(x)$. Dakle,

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2.$$

Općenito, ako postoji n-ti izvod funkcije $f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$d^nf(x) := d\left(d^{n-1}f(x)\right) = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

i zovemo ga *diferencijalom* n*-tog reda* funkcije $f(x)$.
Tako je uočljiva opravdanost oznake za izvod n-tog reda

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Primjer 3.21 *Odrediti* 5*-ti izvod svake od sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = 16x^4 - 2x^2 + 5x - 10$, *b)* $y = \dfrac{1}{x}$.

Rješenje. a) $f'(x) = 64x^3 - 4x + 5$

$$f''(x) = \left(64x^3 - 4x + 5\right)' = 192x^2 - 4$$
$$f'''(x) = \left(192x^2 - 4\right)' = 384x$$
$$f^{(4)}(x) = (384x)' = 384$$
$$f^{(5)}(x) = (384)' = 0$$

b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-x^{-2}\right) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{-3}\right) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{6}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}\left(-6x^{-4}\right) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{24}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}\left(24x^{-5}\right) = -120x^{-6} = -\frac{120}{x^6}$$

Ovdje se može naći općenito n-ti izvod: $\dfrac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ (što je lahko ustanoviti indukcijom). ♣

3.8.1 Primjer primjene u ekonomiji

Općenitu primjenu izvoda i diferencijala višeg reda vidjet ćemo nešto kasnije, posebno pri određivanju lokalnih ekstrema funkcije. No, sljedeći primjer je dobra ilustracija primjene izvoda višeg reda u ekonomiji.

Primjer 3.22 *Jedna ekonomska studija jutarnjih dolazaka u određenoj tvornici ustanovila je da prosječno radnik koji dolazi na posao u 8:00 sati ima produktivnost* $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$ *jedinica proizvoda za* t *narednih sati.*

a) Izračunati brzinu produktivnosti radnika u 11:00 sati.

b) Kolika je brzina promjene brzine produktivnosti radnika u odnosu na vrijeme u 11:00 sati?

c) Procijeniti promjenu u brzini produktivnosti radnika između 11:00 i 11:10 sati.

d) Izračunati aktuelnu promjenu u produktivnosti radnika između 11:00 i 11:10 sati.

Rješenje. a) Brzina produktivnosti radnika je prvi izvod

$$Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$

funkcije outputa $Q(t)$. U 11:00 sati je $t = 3$, pa je tražena brzina promjene produktivnosti

$$Q'(3) = -3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 24 = 33$$

jedinice proizvoda po satu.

b) Brzina promjene brzine produktivnosti radnika je drugi izvod

$$Q''(t) = -6t + 12$$

funkcije outputa $Q(t)$. U 11:00 sati ova brzina je

$$Q''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6$$

jedinica po satu po satu. Znak minus u rezultatu znači da brzina produktivnosti radnika opada, to jest radnik usporava. Brzina ovog opadanja efikasnosti u 11:00 sati je 6 jedinica po satu po satu (ili po satu na kvadrat).

c) Primijetimo da je 10 minuta ustvari $\frac{1}{6}$ sata. Da bismo procijenili promjenu $\Delta Q'$ u brzini produktivnosti $Q'(t)$ uočimo da je promjena u vremenu $\Delta t = \frac{1}{6}$ sata, a onda primijenimo aproksimacionu formulu iz Sekcije 3.6 (u općenitoj formi):

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x.$$

Tako imamo

$$\Delta Q' \simeq Q''(t)\,\Delta t,$$

odnosno

$$\Delta Q' \simeq Q''(3)\,\Delta t = -6 \cdot \frac{1}{6} = -1 \text{ jedinica proizvoda po satu.}$$

Dakle, brzina produktivnosti (koja je bila 33 jedinice proizvoda po satu u 11:00 sati) će opasti približno za 1 jedinicu proizvoda po satu (bit će, dakle, približno 32 jedinice proizvoda po satu) u narednih 10 minuta rada.

d) Aktuelna promjena brzine produktivnosti radnika između 11:00 i 11:10 sati je jednaka razlici vrijednosti brzina produktivnosti u 11:10 i u 11:00 sati, tj. kad je $t = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$ i $t = 3$:

$$\begin{aligned}
\Delta Q' &= Q'\left(\frac{19}{6}\right) - Q'(3) = \\
&= \left[-3\cdot\left(\frac{19}{6}\right)^2 + 12\cdot\frac{19}{6} + 24\right] - \left[-3\cdot 3^2 + 12\cdot 3 + 24\right] \\
&\simeq 31.92 - 33 = -1.08 \text{ jedinica proizvoda po satu.}
\end{aligned}$$

Dakle, u 11:10 sati brzina (stopa) produktivnosti, koja je bila 33 jedinice proizvoda po satu, aktuelno će opasti za 1.08 jedinica proizvoda po satu, tj. na 31.92 jedinice proizvoda po satu. ♣

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti drugi izvod svake od sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{4}{5}$, b) $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^3$.

2. Ukoliko postoji, odrediti $f''(0)$ za funkciju $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

3. Izračunati $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcije date u implicitnom obliku $2x^2 + 5y^2 = 10$.

4. Odrediti $\frac{d^3y}{dx^3}$ ako je $y = \sqrt{x} - \frac{2}{3x} + \frac{x}{\sqrt{2}}$.

5. Naći $xf''(x) - 2f'(x) - \frac{4}{x}f(x)$ ako je $f(x) = x^3 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

6. Jedna ekonomska studija jutarnjih dolazaka u određenoj tvornici ustanovila je da prosječno radnik koji dolazi na posao u 8:00 sati ima produktivnost $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ jedinica proizvoda za t narednih sati.

a) Izračunati brzinu produktivnosti radnika u 9:00 sati.

b) Kolika je brzina promjene brzine produktivnosti radnika u odnosu na vrijeme u 9:00 sati?

c) Procijeniti promjenu u brzini produktivnosti radnika između 9:00 i 9:15 sati.

d) Izračunati aktuelnu promjenu u produktivnosti radnika između 9:00 i 9:15 sati.

7. Planirano je da kroz t mjeseci prosječna cijena po jedinici robe u određenom sektoru ekonomije bude $p(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t + 300$ dolara.

a) Kojom će brzimom opadati cijena po jedinici robe kroz 5 mjeseci?

b) Kojom će se brzinom mijenjati brzina rasta cijene u odnosu na vrijeme kroz 5 mjeseci?

c) Procijeniti promjenu brzine rasta cijene u toku prve polovine od 6 mjeseci.

d) Izračunati aktuelnu promjenu brzine rasta cijene u toku prve polovine od 6 mjeseci.

3.9 L'Hospitalovo pravilo

Jedna vrlo važna primjena izvoda jeste pri izračunavanju granične vrijednosti tzv. neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$ ili $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Naime, riječ je o graničnoj vrijednosti

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

pri čemu vrijedi

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty\ , \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

gdje pod ∞ podrazumijevamo $+\infty$ ili $-\infty$. Izračunavanje granične vrijednosti u navedenim slučajevima može se vrlo često uspješno izvesti pomoću *L'Hospitalova*[1] *pravila*.

Razmotrimo prvo slučaj $\left(\frac{0}{0}\right)$, na koji se odnosi L'Hospitalovo pravilo dato u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 3.6 *Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane na intervalu $I = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ za koje vrijedi:*

i) za neko $a \in I$ je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

ii) obje funkcije su diferencijabilne na intervalu (α, β) i $g'(x) \neq 0$ za $x \in (\alpha, \beta)$,

[1] G. F. Marquis de L'Hospital, francuski matematičar, 1661-1704.

iii) postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L.$

Tada postoji i $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Napomenimo da se ponekad L'Hospitalovo pravilo može i više puta upotrijebiti na izračunavanju granične vrijednosti jednog izraza, uz dodatnu pretpostavku da su i funkije f i g diferencijabilne barem onoliko puta koliko puta primjenjujemo pravilo.

Primjer 3.23 *Izračunati a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Rješenje. a) Ova granična vrijednost je neodređenog oblika $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, zadovoljeni su uvjeti prethodnog teorema u nekoj okolini tačke $x=0$, pa možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{ax}-e^{bx}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{1}=a-b.$$

b) Analogno imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\\ \overset{LP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.\quad\clubsuit\end{aligned}$$

U slučaju $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ također se primjenjuje L'Hospitalovo pravilo u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 3.7 *Neka su funkcije* $f(x)$ *i* $g(x)$ *definirane na intervalu* $I=[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ *za koje vrijedi:*

i) za neko $a\in I$ *je*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

ii) obje funkcije su diferencijabilne na intervalu (α,β) *i* $g'(x)\neq 0$ *za* $x\in(\alpha,\beta)$,

iii) postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L.$

Tada postoji i $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Napomena 3.4 *U oba prethodna teorema moguće je interval* $I=[\alpha,\beta]$ *zamijeniti intervalom* $I=[\alpha,+\infty)$ *(odnosno intervalom* $(-\infty,\beta]$*), a granični proces* $x\to a$ *sa* $x\to\infty$ *(odnosno* $x\to-\infty$*).*

Primjer 3.24 *Izračunati: a)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$, *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{e^{2x}}$.

Rješenje. a) Ovdje je u pitanju neodređeni izraz oblika $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ i može se primijeniti posljednji teorem:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1.\end{aligned}$$

b) Analogno,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+5}{e^{2x}} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2-2x+5\right)'}{(e^{2x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2}{2e^{2x}}\\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x-2)'}{(2e^{2x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{4e^{2x}}=0. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Koristeći se adekvatnim algebarskim transformacijama i preostali neodređeni oblici:

$$(0\cdot\infty),(\infty-\infty),\left(\infty^0\right),(1^\infty)\ \text{ i }\ \left(0^0\right)$$

se mogu svesti na jedan od dva slučaja: $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ili $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Tako u slučaju neodređenog oblika $(0\cdot\infty)$, tj. kada je, recimo, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, možemo napraviti neku od sljedeće dvije transformacije (naravno, biramo onu pogodniju za izračunavanje izvoda):

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad\text{ili}\quad\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Na primjer,

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Kod neodređenog oblika $(\infty-\infty)$, tj. kada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, može se postupiti na različite načine, a jedan od njih je:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right] = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Primjer 3.25 *Izračunati* $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$.

Rješenje. Očito je u pitanju neodređeni oblik $(\infty-\infty)$, pa je

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right) = (\infty\cdot 0)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{LP}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{2\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{2\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -\frac{3}{2}. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

U preostala tri slučaja, $\left(\infty^0\right), \left(1^\infty\right)$ i $\left(0^0\right)$, koristimo identitet

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}, \quad f(x) > 0$$

da bismo ih sveli na slučaj $(0\cdot\infty)$.

Primjer 3.26 *Izračunati* $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Rješenje. U pitanju je neodređeni oblik $\left(0^0\right)$, pa imamo

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(\sin x)} = e^L,$$

gdje je

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} x\ln(\sin x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LP}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x - x^2\sin x}{\cos x} = 0, \end{aligned}$$

te je

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1. \quad \clubsuit$$

Napomena 3.5 *Treba voditi računa da se L'Hospitalovo pravilo ne može uvijek uspješno koristiti, posebno ako se njegovom upotrebom dobija izraz koji je kompliciraniji od prethodnog.*

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Koristeći L'Hospitalovo pravilo pokazati da je:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x+1}-1} = -1$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.

Izračunati (2-6):

2. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}, a>0$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{x^3-5x+10}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+1}}{x}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-3x}\right)$.

5. a) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{te^{at}}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

3.10 Primjena diferencijalnog računa u optimizaciji

U ekonomskoj praksi stalno se pojavljuju problemi određenog izbora. Tako se u problematici proizvodnje određenog nivoa proizvoda susrećemo s izborom više alternativnih načina kako bi se to postiglo. Najčešće je jedna od tih alternativa (ili eventualno više njih) bolja nego ostale s aspekta određenog kriterija. Izbor najbolje od raspoloživih alternativa predstavlja bit problema optimizacije. Kriterij izbora među alternativama u ekonomiji je najčešće povezan s ciljem *maksimiziranja* nečega ili s ciljem *minimiziranja* nečega (npr. maksimizacija dobiti poduzeća ili korisnosti potrošača ili minimizacija troškova proizvodnje određene količine proizvoda). Jednim imenom se problemi maksimiziranja i minimiziranja nazivaju optimizacijom ("postizanjem najboljeg"). Da bi se to postiglo neophodano je prvo uvesti *funkciju cilja* u matematičkom smislu, a zatim ispitivati pod kojim uvjetima (tj. za koji izbor vrijednosti neovisne varijable) ta funkcija dostiže maksimalnu ili minimalnu vrijednost. Ubuduće ćemo koristiti termin *ekstrem* funkcije kao zajednički pojam za maksimum i minimum.
Ovu problematiku ćemo u daljnjoj raspravi razmatrati općenito, smatrajući da nam je data funkcija cilja (ovdje kao funkcija jedne varijable) $y = f(x)$. Razvit ćemo postupak po kojem se određuju nivoi vrijednosti neovisne varijable x koja će maksimizirati ili minimizirati vrijednost funkcije cilja y. U tu svrhu upoznajmo se prvo s pojmom monotonosti funkcije, a nakon toga posvetit ćemo se problematici određivanja ekstrema funkcije.

3.10.1 Monotonost funkcije

Upoznajmo se prvo s različitim tipovima monotonosti funkcije.

Definicija 3.5 *Kažemo da je funkcija $y = f(x)$ monotono* ***rastuća*** *u intervalu $(a,b)\subseteq\mathcal{D}(f)$ ako vrijedi*

$$f(x_1)\le f(x_2)\quad \textit{za sve } x_1,x_2\in(a,b)\,,\ x_1<x_2,$$

odnosno da je monotono ***strogo rastuća*** *ako vrijedi*

$$f(x_1)< f(x_2)\quad \textit{za sve } x_1,x_2\in(a,b)\,,\ x_1<x_2.$$

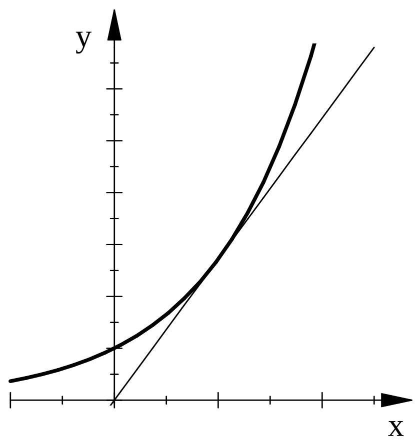
Definicija 3.6 *Kažemo da je funkcija $y = f(x)$ monotono* ***opadajuća*** *u intervalu $(a, b) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako vrijedi*

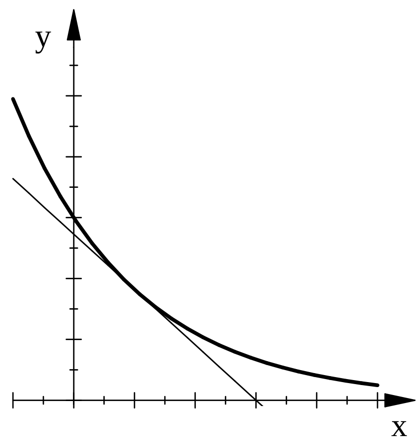
$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \textit{za sve } x_1, x_2 \in (a, b), \; x_1 < x_2,$$

odnosno da je monotono ***strogo opadajuća*** *ako vrijedi*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \textit{za sve } x_1, x_2 \in (a, b), \; x_1 < x_2.$$

Dakle, funkcija je monotono strogo rastuća ako većoj vrijednosti neovisne varijable x odgovara veća vrijednost funkcije f, a monotono strogo opadajuća ako većoj vrijednosti neovisne varijable x odgovara manja vrijednost funkcije f.





Slika FM1: $f'(x) > 0$, f strogo raste **Slika FM2**: $f'(x) < 0$, f strogo opada

Naravno, ispitivanje monotonosti funkcije na nekom intervalu praktično se ne određuje pomoću definicije, jer bi to u mnogim slučajevima bilo vrlo komplicirano. U tu svrhu koristimo se izvodom funkcije, kako to pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 3.8 *Pretpostavimo da je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna na intervalu $(a, b) \subseteq \mathcal{D}(f)$. Tada vrijedi:*

i) ako je $f'(x) > 0$ za $x \in (a, b)$, funkcija f je strogo rastuća na (a, b);

ii) ako je $f'(x) < 0$ za $x \in (a, b)$, funkcija f je strogo opadajuća na (a, b).

Primijetimo da se kriterij monotonosti može iskazati i ovako: funkcija f je monotono strogo rastuća na inetrvalu $(a, b) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako je nagib (tangente) krive pozitivan u svim tačkama grafa funkcije f s apcisama iz intervala (a, b), a f je monotono strogo opadajuća na inetrvalu $(a, b) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako je nagib (tangente) krive negativan u svim tačkama grafa funkcije f s apcisama iz intervala (a, b) (v. Slike FM1 i FM2).

Primjer 3.27 *Ispitati monotonost funkcije* $y = xe^{-2x}$.

Rješenje. Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Odredimo prvi izvod date funkcije:

$$y' = e^{-2x} + xe^{-2x} \cdot (-2) = (1-2x)\,e^{-2x}.$$

Prema prethodnom teoremu imamo:

i) $y' = (1-2x)\,e^{-2x} > 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, tj. funkcija je monotono strogo rastuća za sve $x < \frac{1}{2}$;

ii) $y' = (1-2x)\,e^{-2x} < 0 \Leftrightarrow 1-2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, tj. funkcija je monotono strogo opadajuća za sve $x > \frac{1}{2}$.

Ovdje smo vodili računa o tome da je eksponencijalna funkcija uvijek pozitivna, tj. $e^{-2x} > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. ♣

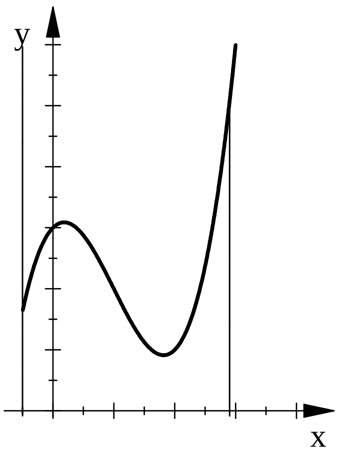
3.10.2 Lokalni ekstremi funkcije

Istaknimo da se najveća (najmanja) vrijednost funkcije na nekom intervalu, koji je podskup njenog definicionog područja, naziva *globalnim* maksimumom (minimumom) funkcije na tom intervalu. Međutim, posebno su zanimljivi tzv. lokalni ekstremi, čija precizna definicija slijedi.

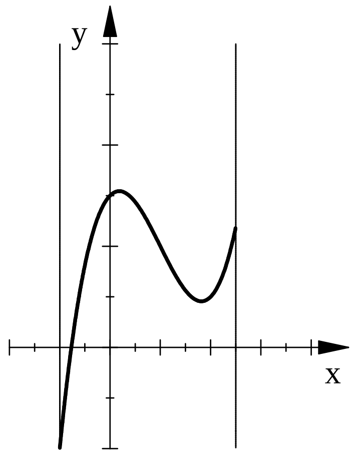
Definicija 3.7 *Kažemo da funkcija* $y = f(x)$ *ima u tački* $x_0 \in (a,b) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ***lokalni maksimum*** *(odnosno* ***lokalni minimum****) ako postoji okolina* $O_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *tačke* x_0 *tako da za sve* $x \in O_\delta(x_0)$ *vrijedi*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (\textit{odnosno } f(x) \geq f(x_0)).$$

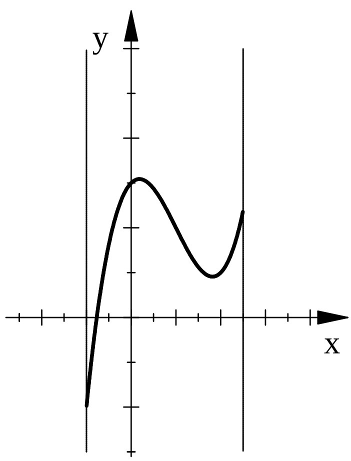
Zbog toga se može desiti da funkcija može imati nekoliko lokalnih ekstrema. Ako funkciju promatramo na zatvorenom intervalu, onda će njen apsolutni maksimum biti ili neki od lokalnih maksimuma ili neka od krajnjih tačaka, dok će lokalni minimum biti ili neki od lokalnih minimuma ili neka od krajnjih tačaka (v. Slike AE1, AE2, AE3 i AE4). Budući da je za većinu problema optimizacije u ekonomiji domen funkcije cilja ograničen na skup nenegativnih brojeva, to se uglavnom razmatraju lokalni ekstremi. Apsolutni maksimum ili apsolutni minimum na zatvorenom intervalu se onda jednostavno odrede.



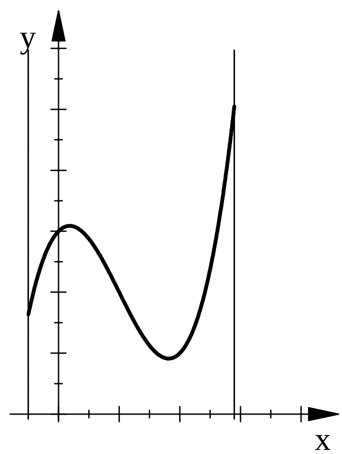
Slika AE1: Apsolutni maksimum u desnom kraju intervala



Slika AE2: Apsolutni minimum u lijevom kraju intervala



Slika AE3: Apsolutni maksimum se poklapa s lokalnim maksimumom

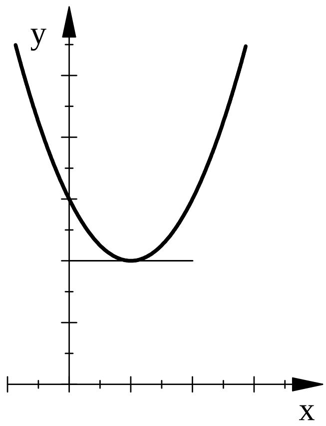


Slika AE4: Apsolutni minimum se poklapa s lokalnim minimumom

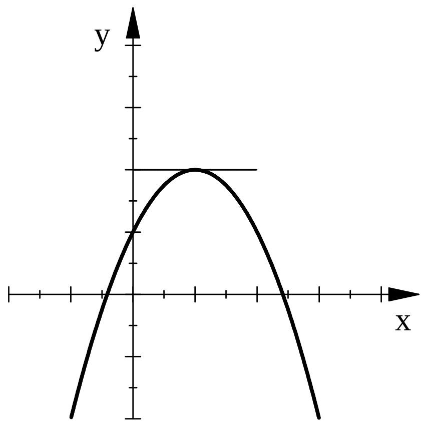
Mi ćemo ovdje spomenuti dva načina određivanja lokalnih ekstrema:

1. test pomoću prvog izvoda i
2. test pomoću izvoda višeg reda.

Činjenica je da za zadanu funkciju $y = f(x)$ njen izvod $f'(x)$ igra glavnu ulogu u određivanju njenih ekstremnih vrijednosti. Kao prvo, navedimo potreban uvjet egzistencije lokalnog ekstrema.

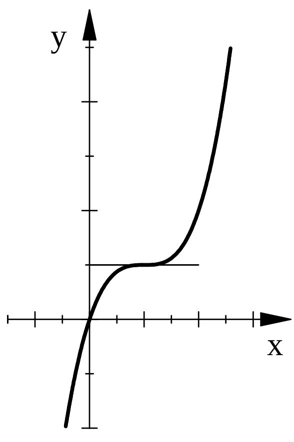


Slika LE1: Lokalni minimum



Slika LE2: Lokalni maksimum

Teorem 3.9 *Pretpostavimo da je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna funkcija u tački $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Ako je x_0 tačka lokalnog ekstrema funkcije f, tada je $f'(x_0) = 0$.*



Slika PT1: Nema lokalnog ekstrema

Drugim riječima, ako je $f'(x_0) \neq 0$, tada x_0 ne može biti tačka lokalnog ektrema. Međutim, uvjet $f'(x_0) = 0$ nije dovoljan da bi u tački x_0 funkcija f imala lokalni ekstrem. Naime, jasno je da je nagib tangente krive u tački ekstrema jednak 0 (v. Sliku LE1 i Sliku LE2), ali to se može desiti i u nekom specijalnom slučaju kada x_0 nije tačka ekstrema (v. Sliku PT1). Sljedeći teorem nam daje dovoljne uvjete egzistencije lokalnog ekstrema.

Teorem 3.10 *Ako za prvi izvod $f'(x_0)$ funkcije f u tački x_0 vrijedi $f'(x_0) = 0$, tada će vrijednost $f(x_0)$ biti*

a) lokalni maksimum ako izvod $f'(x)$ mijenja predznak iz pozitivnog u negativni dok neovisna varijabla prolazi s lijeve na desnu stranu tačke x_0;

b) lokalni minimum ako izvod $f'(x)$ mijenja predznak iz negativnog u pozitivni dok neovisna varijabla prolazi s lijeve na desnu stranu tačke x_0;

c) ni lokalni maksimum ni lokalni minimum ako $f'(x)$ ima isti znak dok neovisna varijabla prolazi s lijeve na desnu stranu tačke x_0.

Definicija 3.8 *Tačka $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ koja ima osobinu da je $f'(x_0) = 0$ naziva se* ***stacionarnom tačkom*** *funkcije $f(x)$.*

Napomena 3.6 *Napomenimo da ćemo ubuduće razmatrati samo one funkcije koje su diferencijabilne na nekom intervalu (isključujući, dakle, situacije kada se može desiti da prvi izvod funkcije mijenja predznak dok neovisna varijabla prolazi s lijeve na desnu stranu tačke x_0, a da pri tome ne postoji prvi izvod funkcije u toj tački), s obzirom da se uglavnom takve funkcije susreću u ekonomskoj praksi.*

Ako primijenimo Teorem 3.10 na funkciju $y = xe^{-2x}$ iz Primjera 3.27, vidimo da njen izvod mijenja predznak s pozitivnog na negativni u $x_0 = \frac{1}{2}$, pa u tački $x_0 = \frac{1}{2}$ funkcija dostiže lokalni maksimum.

Drugi test, test pomoću izvoda višeg reda, općenito je prikladniji nego test pomoću prvog izvoda, jer ne zahtijeva provjeru predznaka prvog izvoda slijeva i zdesna od stacionarne tačke x_0. Također, vrlo često je izračunavanje izvoda višeg reda brži postupak od određivanja znaka prvog izvoda, posebno ako je riječ o većem broju lokalnih ekstrema. U najpovoljnijem slučaju, kada je $f''(x_0) \neq 0$, test je dat sljedećim teoremom.

Teorem 3.11 *Pretpostavimo da je x_0 stacionarna tačka realne funkcije f i da funkcija ima drugi izvod u stacionarnoj tački različit od nule, tj. $f''(x_0) \neq 0$. Tada vrijedi:*

(a) ako je $f''(x_0) < 0$, onda u stacionarnoj tački x_0 funkcija f ima lokalni maksimum;

(b) ako je $f''(x_0) > 0$, onda u stacionarnoj tački x_0 funkcija f ima lokalni minimum.

Nedostatak ovog teorema je što nam ne daje odgovor o egzistenciji lokalnog ekstrema u slučaju kada je $f''(x_0) = 0$. Naime, funkcija u tom slučaju može da u stacionarnoj tački ima ili lokalni minimum ili lokalni maksimum ili da uopće nema lokalnog ekstrema. Tada se pribjegava ili testu pomoću prvog izvoda ili općenitijem testu pomoću izvoda višeg reda (od dva).

Teorem 3.12 *Pretpostavimo da je x_0 stacionarna tačka realne funkcije f i da funkcija ima sve izvode do reda k u stacionarnoj tački, takve da je*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \ f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

U slučaju kad je k paran broj, onda funkcija f u stacionarnoj tački ima lokalni maksimum ako je $f^{(k)}(x_0) < 0$, odnosno lokalni minimum ako je $f^{(k)}(x_0) > 0$. Ukoliko je k neparan broj, tada funkcija f u stacionarnoj tački nema lokalnog ekstrema.

Kasnije ćemo vidjeti (kad budemo govorili o konveksnosti i konkavnosti funkcije) da u slučaju neparnog broja k funkcija f u stacionarnoj tački ima prevojnu tačku

Uočavamo da je (općeniti) test pomoću izvoda višeg reda upotrebljiv u slučaju kada razmatrana funkcija ima u stacionarnoj tački izvod nekog reda različit od nule i kada izračunavanje izvoda višeg reda funkcije nije previše kompliciran. Srećom, većina funkcija ima tu osobinu i uglavnom ćemo koristiti upravo taj test.

Primjer 3.28 *Odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x) = xe^{-x}$.*

Rješenje. Očito je definiciono područje funkcije f cio skup realnih brojeva, tj. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Odredimo prvo stacionarne tačke funkcije kao nule njenog prvog izvoda:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x_0 = 1.$$

Drugi izvod je

$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)e^{-x} \cdot (-1) = (x-2)e^{-x}.$$

Kako je $f''(1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e} < 0$, funkcija u stacionarnoj tački $x_0 = 1$ ima lokalni maksimum $f_{\max} = f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. ♣

Primjer 3.29 *Odrediti lokalne ekstreme funkcije $y = (3-x)^4$.*

Rješenje. Kako je $y' = -4(3-x)^3 = 0$ za $x = 3$, to je tačka $x = 3$ stacionarna tačka date funkcije. Tražimo sada izvode višeg reda sve dok ne naiđemo na prvi od njih koji je u stacionarnoj tački različit od nule:

$$\begin{array}{lcl} y'' = 12(3-x)^2 & \Rightarrow & y''(3) = 0, \\ y''' = -24(3-x) & \Rightarrow & y'''(3) = 0, \\ y^{(4)} = 24 & \Rightarrow & y^{(4)}(3) = 24. \end{array}$$

Vidimo da je tek četvrti izvod date funkcije u stacionarnoj tački različit od nule (pozitivan), dakle, $k = 4$ je paran broj, pa data funkcija u stacionarnoj tački ima lokalni minimum $y_{\min} = y(3) = 0$. ♣

Primjeri primjene u ekonomiji

Ovdje ćemo navesti par primjera primjene optimizacije u slučaju ekonomskih funkcija.

Primjer 3.30 ***(Minimum prosječnih troškova)*** *Pretpostavimo da su pri proizvodnji Q jedinica nekog artikla ukupni troškovi dati sa*

$$T(Q) = 3Q^2 + 5Q + 75 \ \ (\$) .$$

Na kojem nivou proizvodnje će prosječni troškovi biti minimalni?

Rješenje. Prosječni troškovi su dati sa

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q} = 3Q + 5 + \frac{75}{Q}$$

dolara po jedinici proizvoda. Budući da je u ekonomskom smislu dovoljno razmatrati $Q > 0$, preostaje nam, dakle, da odredimo apsolutni minimum funkcije $\overline{T}(Q)$ na intervalu $(0, +\infty)$. Izvod funkcije prosječnih troškova je

$$\overline{T}'(Q) = 3 - \frac{75}{Q^2}$$

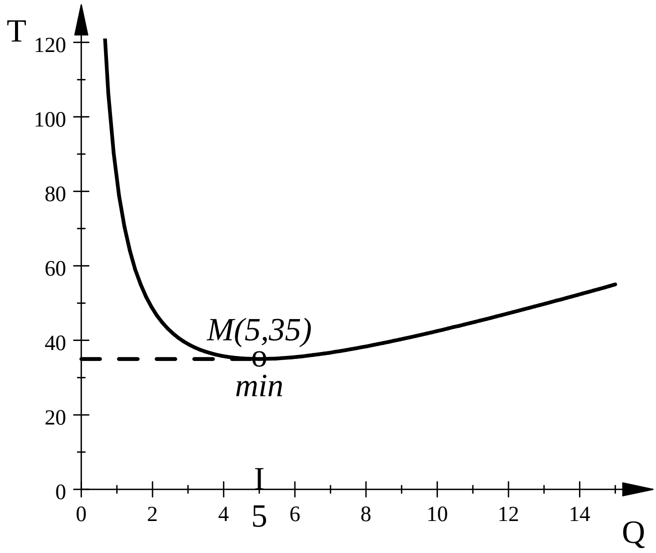
koji je jednak nuli kad je

$$3 - \frac{75}{Q^2} = 0,$$

odnosno kad je $Q = 5$ (vrijednost $Q = -5$ se ne razmatra jer je negativna). Prema tome, dobili smo samo jednu stacionarnu tačku $Q = 5$. Primijenimo test pomoću izvoda višeg reda:

$$\overline{T}''(Q) = \frac{150}{Q^3} \quad \Rightarrow \quad \overline{T}''(5) = \frac{150}{5^3} > 0,$$

tj. u stacionarnoj tački $Q = 5$ funkcija prosječnih troškova $\overline{T}(Q)$ ima lokalni minimum $\overline{T}_{\min} = \overline{T}(5) = 3 \cdot 5 + 5 + \dfrac{75}{5} = 35$ dolara po jedinici proizvoda. Budući da je funkcija $\overline{T}(Q)$ neprekidna na intervalu $(0, +\infty)$, to će se apsolutni minimum poklopiti s lokalnim minimumom (v. Sliku LE3). ♣



Slika LE3

Sljedeći primjer se odnosi na traženje maksimalne vrijednosti ukupne dobiti.

Primjer 3.31 ***(Maksimum dobiti)*** *Date su funkcije potražnje $Q(p) = -p + 30$ i prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = Q + 6 + \dfrac{34}{Q}$. Koja je maksimalna moguća dobit i uz koju potražnju?*

Rješenje. Pošto je ukupna dobit razlika ukupnih prihoda i ukupnih troškova, tj. $D(Q) = P(Q) - T(Q)$, odredimo prvo funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda:

$$T(Q) = \overline{T}(Q) \cdot Q = \left(Q + 6 + \frac{34}{Q}\right) Q = Q^2 + 6Q + 34,$$

$$P(Q) = pQ = (-Q + 30)\, Q = -Q^2 + 30Q,$$

jer iz jednakosti $Q(p) = -p + 30$ slijedi $p = -Q + 30$.
Funkcija ukupne dobiti je oblika

$$\begin{aligned} D(Q) &= P(Q) - T(Q) \\ &= \left(-Q^2 + 30Q\right) - \left(Q^2 + 6Q + 34\right) \\ &= -2Q^2 + 24Q - 34. \end{aligned}$$

Odredimo prvo stacionarne tačke funkcije ukupne dobiti:

$$D'(Q) = -4Q + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 6.$$

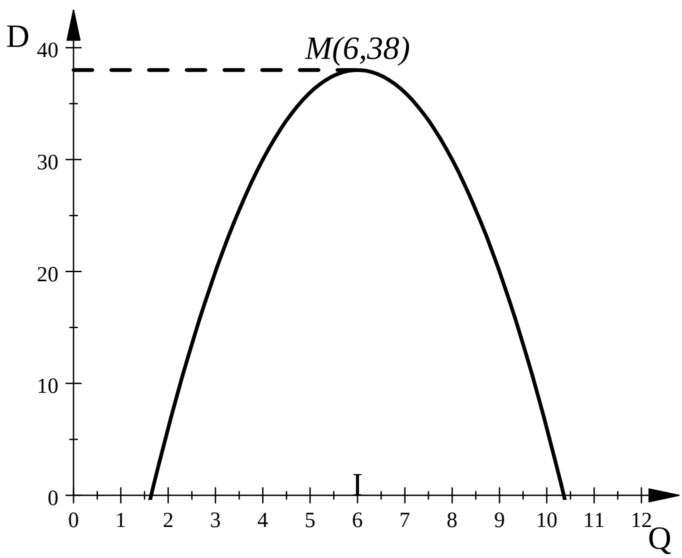
Imamo, dakle, jedinstvenu stacionarnu tačku $Q = 6$. Za određivanje ekstrema funkcije ukupne dobiti $D(Q)$ primijenimo test pomoću izvoda višeg reda:

$$D''(Q) = -4 \quad \Rightarrow \quad D''(6) = -4 < 0.$$

To znači da u stacionarnoj tački $Q = 6$ funkcija ukupne dobiti ima lokalni maksimum koji se poklapa s apsolutnim maksimumom, jer funkciju $D(Q)$ razmatramo na intervalu $(0, +\infty)$ na kojoj je ona neprekidna funkcija (i stalno opada za $Q > 6$). Dakle, maksimalna dobit iznosi

$$D_{\max} = D(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 34 = 38$$

novčanih jedinica (v. Sliku LE4). ♣



Slika LE4

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti intervale monotonosti funkcija:

a) $y = x^2 e^{-x}$, b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$, c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$.

2. Odrediti uvjete koje moraju zadovoljavati koeficijenti funkcije ukupnih troškova predstavljenih kubnom funkcijom

$$T(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d.$$

(Uputa: vidjeti o funkciji ukupnih troškova u Sekciji 2.3.3.)

3. Odrediti ekstreme sljedećih funkcija:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, b) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$, c) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

4. Koristeći se testom pomoću izvoda višeg reda odrediti lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

a) $y = \dfrac{2x}{1 - x}$, b) $y = x^3 + 6x^2 + 10$, c) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

5. Neko poduzeće ima sljedeće funkcije ukupnog troška i potražnje:

$$T(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 5, \quad Q = 100 - p.$$

a) Zadovoljava li funkcija ukupnog troška ograničenja za koeficjente iz 2. zadatka?

b) Naći funkciju ukupne dobiti kao funkciju potražnje Q.

c) Naći nivo proizvodnje Q^* koja maksimizira ukupnu dobit.

d) Kolika je maksimalna ukupna dobit?

6. Pretpostavimo da su pri proizvodnji Q jedinica nekog artikla ukupni troškovi dati sa

$$T(Q) = 3Q^2 + Q + 48 \ \ (\$)\,.$$

Na kojem nivou proizvodnje će prosječni troškovi biti minimalni?

7. Stolar treba da napravi otvorenu kutiju s kvadratnom osnovom. Izrada $1m^2$ strana kutije košta 3\$, a $1m^2$ osnove košta 4\$. Koje bi bile dimenzije kutije najveće moguće zapremine čija bi izrada koštala ukupno 48\$?

8. Zatvorena kutija kvadratne osnove mora imati zapreminu $250m^3$. Materijal za izradu gornje i donje osnove kutije košta 2\$ po $1m^2$, a materijal za izradu strana kutije košta 1\$ po $1m^2$. Može li se napraviti takva kutija za manje od 300\$?

9. Data je funkcija ukupnih troškova:

$$T(Q) = Q^2 e^{-Q}.$$

Na kojem se nivou potražnje ostvaruju maksimalni prosječni troškovi. Koliki su ti prosječni troškovi?

10. Date su funkcije ukupnih prihoda $P(Q) = 1400Q - 6Q^2$ i prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = \dfrac{1500}{Q} + 80$, kao funkcije proizvodnje (potražnje). Na kojem se nivou proizvodnje (potražnje) ostvaruje maksimalna ukupna dobit i koliko ta dobit iznosi?

3.10.3 Konveksnost/konkavnost funkcije

Pojam konveksnosti, odnosno konkavnosti, je vrlo bitan za potpuno analiziranje ponašanja funkcije općenito, a posebno ekonomskih funkcija (slučaj tzv. *krive indiferencije,* o kojoj će u ovoj sekciji biti riječi).

Definicija 3.9 *Za realnu funkciju $y = f(x)$ kažemo da je* ***strogo konveksna*** *na intervalu $(a,b) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako vrijedi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

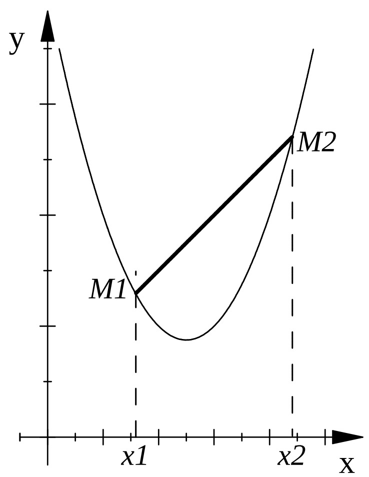
za sve $x_1, x_2 \in (a,b)$.

Definicija 3.10 *Za realnu funkciju $y = f(x)$ kažemo da je* ***strogo konkavna*** *na intervalu $(a,b) \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako vrijedi*

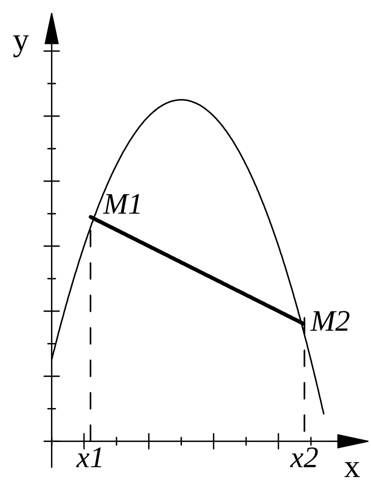
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

za sve $x_1, x_2 \in (a,b)$.

Geometrijska interpretacija pojma stroge konveksnosti (stroge konkavnosti) funkcije $y = f(x)$ je sljedeća: za sve $x_1, x_2 \in (a,b)$ tetiva $\overline{M_1 M_2}$ leži iznad (ispod) odgovarajućeg luka $\widehat{M_1M_2}$ krive, gdje je $M_1(x_1, f(x_1))$ i $M_2(x_2, f(x_2))$ (v. Slike K1 i K2). Međutim, geometrijska se interpretacija stroge konveksnosti (stroge konkavnosti) funkcije može iskazati i na drugi način (pažljivo promatrajući Slike K1 i K2). Naime, uz pretpostavku diferencijabilnosti funkcije $y = f(x)$ na intervalu (a, b) (tj. da kriva koja predstavlja graf funkcije ima tangentu u svakoj tački), zaključujemo da je ona strogo konveksna (strogo konkavna) ako se nalazi iznad (ispod) tangente povučene u proizvoljnoj tački grafa funkcije s apcisom iz intervala (a, b), ne uključujući tačku dodira. Imajući na umu da je nagib tangente ustvari jednak prvom izvodu funkcije u apcisi tačke dodira, onda je jasno da će u situaciji stroge konveksnosti (stroge konkavnosti) nagib tangente rasti (opadati). To će nam pomoći da dođemo do testa ispitivanja stroge konveksnosti (stroge konkavnosti) pomoću drugog izvoda funkcije, budući da bi to ispitivanje bilo vrlo nepraktično u mnogim slučajevima ako bismo koristili definiciju stroge konveksnosti (stroge konkavnosti).



Slika K1



Slika K2

Teorem 3.13 *Pretpostavimo da je funkcija $y = f(x)$ definirana na $[a, b]$ i da ima izvode prvog i drugog reda na (a, b). Ako je $f''(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na (a, b). Ukoliko je $f''(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na (a, b).*

Napomena 3.7 *Napomenimo da obrat prethodnog teorema ne vrijedi, tj. ako je funkcija strogo konveksna (strogo konkavna) na (a, b), tada ne mora biti $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ za sve $x \in (a, b)$. Naime, za funkciju $y = f(x) = x^4$, čiji je graf strogo konveksna kriva, vrijedi $f''(x) = 12x^2 > 0$, ali je $f''(0) = 0$.*

Pojam konveksnosti (konkavnosti) je važan za shvatanje oblika krive koja predstavlja graf funkcije. Posebno je bitna tačka grafika u kojoj se dešava promjena tog oblika sa strogo konveksnog na strogo konkavan ili obrnuto (v. Sliku K3). Zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.11 *Neka je funkcija* $f(x)$ *definirana i diferencijabilna u nekoj okolini* $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *tačke* x_0*. Osim toga, pretpostavimo da je* f *neprekidna u tački* x_0 *i da njen graf ima tangentu u tački* $(x_0, f(x_0))$*. Tačku* $(x_0, f(x_0))$ *nazivamo* ***prevojnom tačkom*** *krive koja predstavlja graf funkcije* $y = f(x)$ *ako je funkcija* f *strogo konveksna (strogo konkavna) u intervalu* $(x_0 - \delta, x_0)$ *i strogo konkavna (strogo konveksna) u intervalu* $(x_0, x_0 + \delta)$*.*

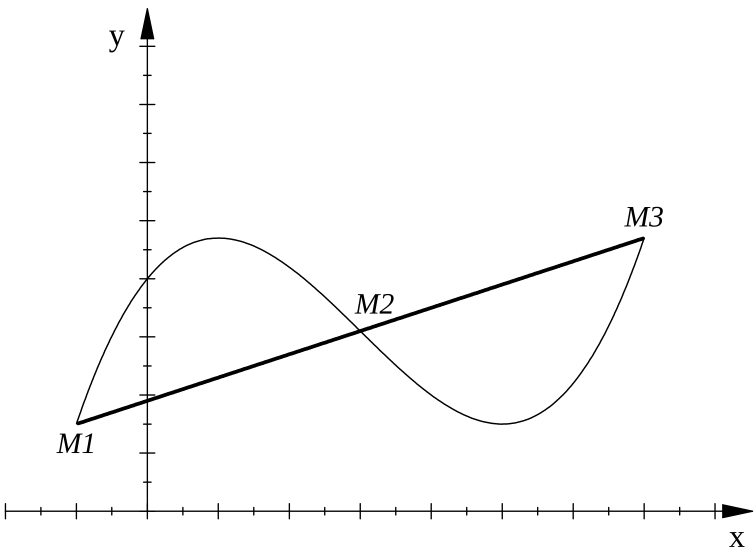
Sljedeći teorem nam daje potrebne i dovoljne uvjete egzistencije prevojne tačke funkcije.

Teorem 3.14 *Pretpostavimo da je funkcija* f *zajedno sa prvih* n *izvoda neprekidna u nekoj okolini tačke* x_0 *i da u toj okolini postoji* $f^{(n+1)}(x)$*. Neka je pri tome*

$$f''(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x) \neq 0.$$

Ako je n *paran broj, onda je* $(x_0, f(x_0))$ *prevojna tačka krive* $y = f(x)$*.*

Prema ovom teoremu očito je da tačka $x_0 = 0$ nije prevojna tačka funkcije $y = f(x) = x^4$.



Slika K3

Primjer 3.32 *Odrediti intervale stroge konveksnosti i stroge konkavnosti, te prevojne tačke funkcija:*

$$a)\ y = xe^{-2x}, \quad b)\ y = (x-2)^5 .$$

Rješenje. a) U Primjeru 3.27 smo vidjeli da je $y' = (1-2x)\,e^{-2x}$, pa je

$$y'' = -2e^{-2x} - 2\,(1-2x)\,e^{-2x} = 4\,(x-1)\,e^{-2x}.$$

Zbog $y'' > 0$ za $x > 1$ i $y'' < 0$ ya $x < 1$, imamo da je funkcija $y = xe^{-2x}$ strogo koveksna u intervalu $(1, +\infty)$ i strogo konkavna u intervalu $(-\infty, 1)$. Zbog toga je $\left(1, e^{-2}\right)$ prevojna tačka krive $y = xe^{-2x}$, jer u njoj funkcija prelazi iz stroge konkavnosti u strogu konveksnost. Također, zbog $y''\,(1) = 0$ i $y''' = 4\,(3-2x)\,e^{-2x}$, odnosno $y'''\,(1) = 4e^{-2} \neq 0$, prema kriteriju iz Teorema 3.14, zaključujemo da je $\left(1, e^{-2}\right)$ prevojna tačka krive $y = xe^{-2x}$.

b) Kako je $y'' = 20\,(x-2)^3$, zaključujemo da je $y'' > 0$ za $x > 2$ i $y'' < 0$ za $x < 2$, što znači da je funkcija $y = xe^{-2x}$ strogo koveksna u intervalu $(2, +\infty)$ i strogo konkavna u intervalu $(-\infty, 2)$. Prema Definiciji 3.11 tačka $(2, 0)$ je prevojna tačka krive $y = (x-2)^5$. Do istog zaključka za prevojnu tačku moglo se doći koristeći Teorem 3.14, jer je $y''\,(2) = y'''\,(2) = y^{(4)}\,(2) = 0$ i $y^{(5)}\,(2) = 120 \neq 0$. ♣

Napomena 3.8 *Uočimo praktični značaj prevojne tačke grafa funkcije. Naime, poznato nam je da prvi izvod y' funkcije predstavlja brzinu promjene te funkcije. Tamo gdje je $y'' > 0$ ($y'' < 0$) funkcija je strogo konveksna (strogo konkavna), a to opet znači da je prvi izvod y' na tom intervalu rastuća (opadajuća) funkcija, tj. u tom intervalu brzina promjene funkcije y raste (opada). Dakle, brzina promjene funkcije y je najveća u x_0 u kojoj funkcija y prelazi iz stroge konveksnosti u strogu konkavnost, odnosno brzina promjene funkcije je najmanja u x_0 u kojoj funkcija y prelazi iz stroge konkavnosti u strogu konveksnost.*

Primjeri primjene konveksnosti/konkavnosti u ekonomiji

Pojam konveksnosti (konkavnosti) funkcije usko je vezan s pojmom *krive indiferencije.* Naime, razmatrajmo na nekom tržištu dva dobra A i B koja je moguće supstituirati. To znači da se ova dva dobra konzumiraju zajedno, ali da se određena količina jednog dobra može zamijeniti određenom količinom drugog dobra, a da pri tome potrošač ostane na istom nivou zadovoljstva (korisnosti). Kriva koja spaja sve parove vrijednosti količina dobara A i B za koje je potrošaač na istom nivou zadovoljstva naziva se *krivom indiferencije.* Očigledno je da je u pitanju opadajuća kriva. Pokazuje se da je *kriva indiferencije strogo konveksna ako i samo ako se dobra mogu supstituirati* (što se može postići provjerom vrijednosti linearne funkcije čiji je dio grafa sjekanta M_1N_1 i odgovarajućih vrijednosti funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[x_1, x_2]$, ako nam x predstavlja količinu dobra A, a y količinu dobra B).

Primjer 3.33 ***(Kriva indiferencije)*** *Zadana je funkcija korisnosti potrošača dobrima A i B, s količinama x i y, respektivno:*

$$u(x, y) = (3x + 2)(2y - 1).$$

Ispitati da li se dobra A i B mogu supstituirati na nivou korisnosti 10.

Rješenje. Već smo konstatirali da se dobra mogu supstituirati ako i samo ako je kriva indiferencije konveksna. Zato prvo odredimo krivu indiferencije. Funkcija korisnosti, na nivou 10 je oblika

$$(3x + 2)(2y - 1) = 10,$$

a to je implicitni oblik funkcije $y = y(x)$. Odavde je

$$2y - 1 = \frac{10}{3x + 2},$$

odnosno dobijamo krivu indiferencije

$$y(x) = \frac{5}{3x + 2} + \frac{1}{2}.$$

Preostaje još da provjerimo da li je ona konveksna. Odredimo prvo prvi izvod:

$$y'(x) = \left(\frac{5}{3x + 2}\right)' + \left(\frac{1}{2}\right)' = 5\left((3x + 2)^{-1}\right)' = -\frac{15}{(3x + 2)^2},$$

a zatim i drugi izvod:

$$y''(x) = -15\left((3x + 2)^{-2}\right)' = \frac{90}{(3x + 2)^3}.$$

Budući da je x količina dobra A, znači da je $x > 0$, pa je i $y''(x) > 0$, tj. kriva indiferencije je zaista strogo konveksna, pa se dobra A i B mogu supstituirati. ♣

Primjer 3.34 ***(Maksimalna brzina promjene ukupnih prihoda)*** *Odrediti maksimalnu brzinu promjene ukupnih prihoda zadatih kao funkcija količine proizvodnje određenog artikla*

$$P(Q) = (3 - Q)\, e^{2Q}$$

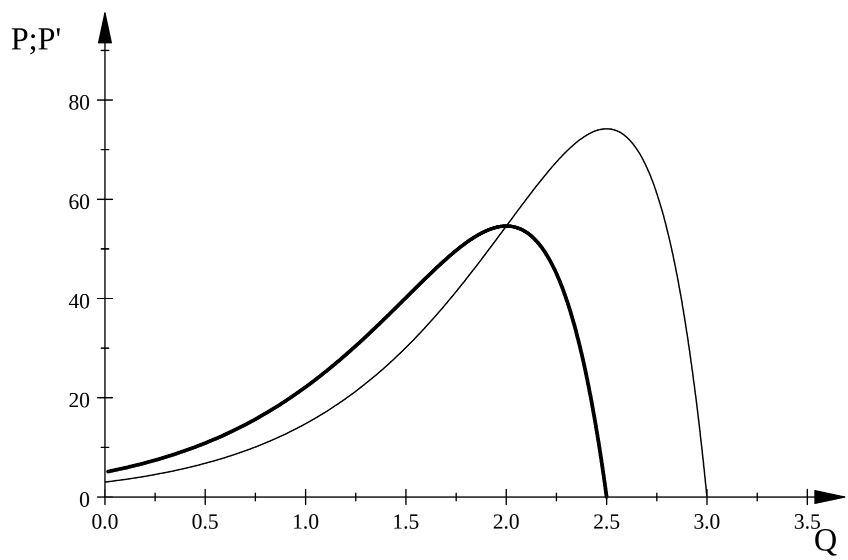
i nivo proizvodnje na kojem se ona dostiže.

Rješenje. Primijetimo da funkcija ukupnih prihoda ima smisla za $Q > 0$ i $P(Q) = (3 - Q)\, e^{2Q} > 0$, tj. za $Q \in (0, 3)$. Na osnovu Napomene 3.8 moramo odrediti prevojne tačke ove funkcije, jer u njima se dostiže maksimalna ili minimalna brzina promjene polazne funkcije. Nađimo prvi i drugi izvod funkcije ukupnih prihoda:

$$P'(Q) = -e^{2Q} + (3 - Q)\, e^{2Q} \cdot 2 = (5 - 2Q)\, e^{2Q},$$

$$P''(Q) = -2e^{2Q} + (5 - 2Q)\, e^{2Q} \cdot 2 = 4\,(2 - Q)\, e^{2Q}.$$

Kako je $P''(Q) = 4\,(2 - Q)\, e^{2Q} < 0$ za $Q > 2$, $P''(Q) = 4\,(2 - Q)\, e^{2Q} > 0$ za $Q < 2$, to funkcija ukupnih prihoda u $Q = 2$ prelazi iz stroge konveksnosti (kada brzina promjene ukupnih prihoda raste) u strogu konkavnost (kada brzina promjene ukupnih prihoda opada), pa je tačka $\left(2, e^4\right)$ prevojna tačka te funkcije i u njoj imamo maksimalnu promjenu brzine ukupnih prihoda. Dakle, na nivou proizvodnje $Q = 2$, prvi izvod $P'(Q)$ ima maksimalnu vrijednost $P'_{\max} = P'(2) = e^4$, koja je ustvari maksimalna vrijednost brzine promjene ukupnih prihoda (v. Sliku K4). ♣



Slika K4: Graf funkcije $P(Q)$ (tanka linija) i graf funkcije $P'(Q)$ (deblja linija)

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti intervale stroge konveksnosti i stroge konkavnosti funkcija:

a) $y = \dfrac{x^2}{2x^2+1}$, b) $y = \dfrac{e^x}{x}$, c) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Odrediti prevojne tačke sljedećih funkcija:

a) $y = \dfrac{1-x}{x^2}$, b) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$, c) $y = x^2 e^{-x}$.

3. Zadana je funkcija korisnosti potrošača dobrima A i B, s količinama x i y, respektivno:

$$u\left(x,y\right) = \left(2x+1\right)\left(5y-1\right).$$

Ispitati da li se dobra A i B mogu supstituirati na nivou korisnosti 20.

4. Zadana je funkcija korisnosti potrošača dobrima A i B, s količinama x i y, respektivno:

$$u\left(x,y\right) = \left(x-3\right)\left(2y+1\right).$$

Ispitati da li se dobra A i B mogu supstituirati na nivou korisnosti 30.

5. Odrediti maksimalnu brzinu promjene ukupnih prihoda zadatih kao funkcija količine proizvodnje određenog artikla

$$P\left(Q\right) = Qe^{-\frac{Q}{2}}$$

i nivo proizvodnje na kojem se ona dostiže.

3.11 Primjena diferencijalnog računa u ekonomiji

Ogromna je primjena diferencijalnog računa u ekonomiji. Mi ćemo ovdje demonstrirati tu primjenu pri uvođenju pojmova graničnih (marginalnih) funkcija u ekonomiji i pri ispitivanju njihovih osobina. Osim toga, pokazat ćemo kako se diferencijalni račun primjenjuje i u proučavanju elastičnosti funkcije.

3.11.1 Granične (marginalne) funkcije

Neka nam je općenito data neka ekonomska funkcija $y = f(x)$ kojom se izražava neka ukupnost (ukupni troškovi, ukupni prihod, ukupna dobit, ukupna proizvodnja i sl.). *Granična (ili marginalna) funkcija* $Gy = Gy(x)$ definira se kao granična vrijednost količnika prirasta Δy funkcije y i prirasta Δx argumenta x kada prirast Δx teži ka nuli, ako ta granična vrijednost postoji, tj.

$$Gy(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

odnosno

$$Gy(x) = \frac{dy}{dx} = y'_x.$$

Dakle, ukoliko nam je data neka ekonomska funkcija koja je diferencijabilna, onda *njen prvi izvod predstavlja graničnu ili marginalnu funkciju*, tj.

$$\boxed{\text{granična funkcija} = (\text{ekonomska funkcija})'.} \tag{3.16}$$

Na taj način definiramo sljedeće funkcije:
a) granični trošak $GT(Q)$ ili $GT(p)$ kao izvod funkcije ukupnih troškova, tj.

$$GT(Q) = \frac{dT}{dQ} = T'(Q) \quad \text{ili} \quad GT(p) = \frac{dT}{dp} = T'(p);$$

b) granični prihod $GP(Q)$ ili $GP(p)$ kao izvod funkcije ukupnih prihoda, tj.

$$GP(Q) = \frac{dP}{dQ} = P'(Q) \quad \text{ili} \quad GP(p) = \frac{dP}{dp} = P'(p);$$

c) granična dobit $GD(Q)$ ili $GD(p)$ kao izvod funkcije ukupne dobiti, tj.

$$GD(Q) = \frac{dD}{dQ} = D'(Q) \quad \text{ili} \quad GD(p) = \frac{dD}{dp} = D'(p);$$

d) granična sklonost potrošnji $GC(Y)$ (koja je funkcija dohotka Y) kao izvod funkcije potrošnje, tj.

$$GC(Y) = \frac{dC}{dY} = C'(Y);$$

e) granična sklonost štednji $GS(Y)$ (koja je funkcija dohotka Y) kao izvod funkcije štednje, tj.

$$GS(Y) = \frac{dS}{dY} = S'(Y);$$

itd.

Jednostavno objašnjenje za uvođenje pojma granične funkcije na ovaj način možemo naći, recimo, u slučaju graničnih troškova. Naime, granični troškovi se definiraju kao trošak proizvodnje dodatne jedinice proizvoda. Dakle, po toj definiciji vrijedi

$$GT(Q) = \frac{\Delta T}{\Delta Q} = \frac{T_2 - T_1}{Q_2 - Q_1},$$

gdje je $T_i = T(Q_i)$ za $i = 1, 2$. Međutim, kao što smo već rekli, ovaj količnik ćemo razmatrati za dovoljno male promjene ΔQ, tj. pustit ćemo da $\Delta Q \to 0$, pa ćemo u slučaju diferencijabilnosti funkcije ukupnih troškova $T(Q)$ ustvari imati

$$GT(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta Q} = \frac{dT}{dQ}.$$

Primjer 3.35 *Pretpostavimo da su ukupni troškovi (u dolarima) proizvodnje Q jedinica određene robe dati sa $T(Q) = 3Q^2 + Q + 48$.*
a) Na kojem nivou proizvodnje su prosječni troškovi najmanji i kolika je ta najmanja vrijednost?
b) Na kojem nivou proizvodnje su prosječni troškovi jednaki graničnim troškovima?
c) Na istoj slici grafički predstaviti obje funkcije, prosječne i granične troškove.

Rješenje. a) Treba da odredimo apsolutni minimum funkcije prosječnih troškova

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q} = 3Q + 1 + \frac{48}{Q}$$

za $Q \in (0, +\infty)$ (jer samo tada funkcija ima ekonomskog smisla). Prvi izvod ove funkcije je

$$\overline{T}'(Q) = 3 - \frac{48}{Q^2} = \frac{3\left(Q^2 - 16\right)}{Q^2}$$

koja je jednaka nuli na intervalu $(0, +\infty)$ samo za $Q = 4$, tj. $Q = 4$ je stacionarna tačka. Kako je drugi izvod $\overline{T}''(Q) = \dfrac{96}{Q^3}$ pozitivan za sve $Q > 0$, to znači da je prosječni trošak minimalan na nivou proizvodnje $Q = 4$ i ta minimlna vrijednost je $\overline{T}_{\min} = \overline{T}(4) = 25\,(\$)$.

b) Granični troškovi su $GT(Q) = T'(Q) = 6Q + 1$ i oni treba da su jednaki prosječnim troškovima, tj.

$$6Q + 1 = 3Q + 1 + \frac{48}{Q},$$

odakle se dobije

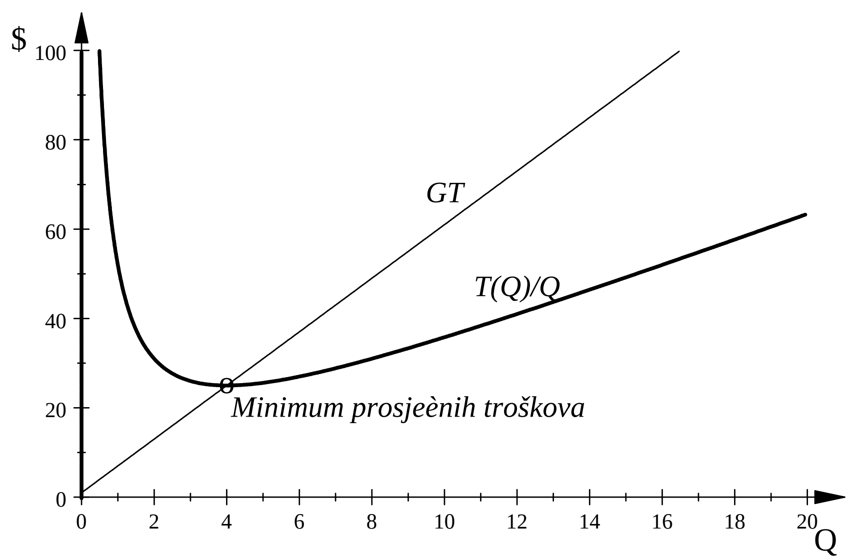
$$Q^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad Q = 4,$$

što je isti nivo proizvodnje na kome se ostvaruju i minimalni prosječni troškovi. Pokazat ćemo uskoro da ovo nije slučajno, nego da vrijedi općenito.

c) Graf funkcije graničnih troškova je linearna funkcija koja se jednostavno grafički predstavlja pravom. Primijetimo da je za prosječne troškove (v. pod a))

$$\overline{T}'(Q) = \frac{3\left(Q^2 - 16\right)}{Q^2} < 0$$

za $0 < Q < 4$, dok je $\overline{T}'(Q) > 0$ za $Q > 4$. Dakle, funkcija prosječnih troškova je opadajuća za $0 < Q < 4$, a rastuća za $Q > 4$ i ima lokalni minimum u $Q = 4$. Grafici obiju funkcija su dati na Slici K5. ♣



Slika K5

Navedimo sada (s dokazom) spomenuti općeniti rezultat o vezi između prosječnih i graničnih troškova u slučaju kad su prosječni troškovi minimalni.

Teorem 3.15 *Prosječni troškovi jednaki su graničnim troškovima ako su prosječni troškovi minimalni.*

Dokaz. Prema Teoremu 3.9 potreban uvjet egzistencije lokalnog ekstrema u nekoj vrijednosti neovisne varijable neke funkcije je da je izvod funkcije jednak nuli u toj vrijednosti neovisne varijable. Ako su prosječni troškovi minimalni, znači da postoji nivo proizvodnje Q^* na kojem je $\overline{T}(Q^*) = \overline{T}_{\min}$, pa iz potrebnog uvjeta za egzistenciju ekstrema slijedi $\overline{T}'(Q^*) = \dfrac{d\overline{T}}{dQ}(Q^*) = 0$, odnosno

$$\overline{T}'(Q^*) = \frac{d\overline{T}}{dQ}(Q^*) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{T(Q)}{Q}\right)(Q^*) = \left(\frac{Q \cdot \dfrac{dT}{dQ} - T \cdot 1}{Q^2}\right)(Q^*) = 0.$$

Odavde je

$$\left(Q \cdot \frac{dT}{dQ} - T\right)(Q^*) = 0,$$

tj.

$$Q^* \cdot T'(Q^*) = T(Q^*),$$

pa je

$$T'(Q^*) = \frac{T(Q^*)}{Q^*},$$

a što znači da je

$$GT(Q^*) = \overline{T}(Q^*)$$

upravo na nivou proizvodnje $Q = Q^*$ na kojem su prosječni troškovi minimalni. ■

Motivirani prethodnim teoremom možemo doći do zanimljive veze između prosječnih i graničnih troškova. Naime, ako je $GT(Q) < \overline{T}(Q)$, tada je

$$T'(Q) < \frac{T(Q)}{Q}, \text{ tj. } Q \cdot T'(Q) < T(Q),$$

pa imamo

$$\overline{T}'(Q) = \frac{Q \cdot T'(Q) - T(Q)}{Q^2} < 0,$$

što znači da je funkcija prosječnih troškova $\overline{T}(Q)$ opadajuća.

Slično, ako je $GT(Q) > \overline{T}(Q)$, tada je

$$T'(Q) > \frac{T(Q)}{Q}, \text{ tj. } Q \cdot T'(Q) > T(Q),$$

pa imamo

$$\overline{T}'(Q) = \frac{Q \cdot T'(Q) - T(Q)}{Q^2} > 0,$$

što znači da je funkcija prosječnih troškova $\overline{T}(Q)$ rastuća.

Prema tome, vrijedi:

a) prosječni troškovi $\overline{T}(Q)$ su rastući kada je $GT(Q) > \overline{T}(Q)$;
b) prosječni troškovi $\overline{T}(Q)$ su opadajući kada je $GT(Q) < \overline{T}(Q)$;
c) prosječni troškovi $\overline{T}(Q)$ imaju kritičnu tačku (obično tačku lokalnog minimuma) kada je $GT(Q) = \overline{T}(Q)$.

Uvjeti za maksimizaciju ukupne dobiti

Jedna od najvažnijih činjenica koje student ekonomije uči je sljedeće: da bi poduzeće maksimiziralo ukupnu dobit neophodno je da izjednači granični trošak i granični prihod. To nam slijedi iz sljedećeg teorema.

Teorem 3.16 *Dobit je maksimalna na nivou Q^* proizvedenih i prodatih jedinica robe na kojoj je granični prihod jednak graničnom trošku.*

Dokaz. Dakle, da bismo našli nivo proizvodnje Q^* koja maksimizira ukupnu dobit, prema Teoremu 3.9 treba da je zadovoljen potreban uvjet egzistencije maksimuma: $\frac{dD}{dQ}(Q^*) = 0$. Kako je ukupna dobit jednaka razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova, tj. $D(Q) = P(Q) - T(Q)$, to za prvi izvod funkcije ukupne dobiti imamo

$$\frac{dD}{dQ}(Q^*) = D'(Q^*) = P'(Q^*) - T'(Q^*) = 0,$$

odakle je

$$P'(Q^*) = T'(Q^*),$$

odnosno

$$GP(Q^*) = GT(Q^*). \tag{3.17}$$

Dakle, optimalna proizvodnja Q^* zaista zadovoljava jednakost $GP(Q^*) = GT(Q^*)$.
■

Na ovaj način smo dobili samo uvjet prvog reda (potreban uvjet) za maksimiziranje ukupne dobiti. Problem je u tome što taj uvjet može voditi ka minimumu, umjesto ka maksimumu. Stoga se mora koristiti test pomoću izvoda višeg reda, prema kojem mora biti

$$\frac{d^2D}{dQ^2}\left(Q^*\right) < 0,$$

odnosno

$$\frac{d^2D}{dQ^2}\left(Q^*\right) = D''\left(Q^*\right) = P''\left(Q^*\right) - T''\left(Q^*\right) < 0,$$

a što je zadovoljeno ako i samo ako je

$$P''\left(Q^*\right) < T''\left(Q^*\right). \tag{3.18}$$

Primijetimo da će ovaj uvjet uvijek biti zadovoljen ako je, na primjer, kriva ukupnog prihoda u Q^* konkavna, a kriva ukupnih troškova konveksna.
U suprotnom, tj . kada je

$$P''\left(Q^*\right) > T''\left(Q^*\right),$$

ukupna dobit će imati minimalnu vrijednost na nivou proizvodnje Q^*.

S druge strane, uvjet (3.18) se može iskazati i relacijom

$$\frac{d\left(GP\right)}{dQ}\left(Q^*\right) < \frac{d\left(GT\right)}{dQ}\left(Q^*\right),$$

što znači da će na nivou proizvodnje Q^* *ukupna dobit biti maksimalna ako je nagib (brzina promjene) graničnog prihoda u* Q^* *manji od nagiba (brzine promjene) graničnih troškova u* Q^**.*

Primjer 3.36 *Neka je funkcija ukupnog prihoda*

$$P\left(Q\right) = 50Q - 2Q^2$$

i funkcija prosječnih troškova

$$\overline{T}\left(Q\right) = Q^2 - 40.25Q + 191 + \frac{1200}{Q}.$$

Odrediti nivo proizvodnje Q^* *koji maksimizira ukupnu dobit.*

Rješenje. Ovdje ćemo primijeniti postupak koji smo upravo razmatrali. Da bismo našli kandidate za optimizacijsku proizvodnju, primijenimo potreban uvjet

$$GP\left(Q^*\right) = GT\left(Q^*\right).$$

Funkcija ukupnih troškova je

$$T(Q) = \overline{T}(Q) \cdot Q = Q^3 - 40.25Q^2 + 191Q + 1200.$$

Kako je

$$GP(Q) = P'(Q) = 50 - 4Q$$

i

$$GT(Q) = T'(Q) = 3Q^2 - 80.5Q + 191,$$

uvjet (3.17) je oblika

$$50 - 4Q = 3Q^2 - 80.5Q + 191,$$

odnosno

$$Q^2 - 25.5Q + 47 = 0$$

odakle se dobije

$$Q_1^* = 2 \quad \text{i} \quad Q_2^* = 23.5.$$

Preostaje da provjerimo uvjet (3.18). Imamo

$$P''(Q) = -4, \quad T''(Q) = 6Q - 80.5,$$

pa je

$$P''(Q_1^*) = P''(Q_2^*) = -4,$$

$$T''(Q_1^*) = 6Q_1^* - 80.5 = -68.5, \quad T''(Q_2^*) = 6Q_2^* - 80.5 = 60.5.$$

Vidimo da je

$$P''(Q_1^*) > T''(Q_1^*) \quad \text{i} \quad P''(Q_2^*) < T''(Q_2^*).$$

Dakle, proizvodnja $Q_2^* = 23.5$ maksimizira ukupnu dobit, dok $Q_1^* = 2$ minimizira ukupnu dobit. Budući da je funkcija ukupne dobiti

$$D(Q) = P(Q) - T(Q) = -Q^3 + 38.25Q^2 - 141Q - 1200,$$

maksimalna ukupna dobit će iznositi

$$D_{\max} = D(Q_2^*) = D(23.5) = 3632.1875\,(\$). \quad \clubsuit$$

3.11.2 Elastičnost

Jedan od vrlo važnih primjera primjene diferencijala u ekonomiji je u slučaju tzv. *elastičnosti funkcije*. Pomoću elastičnosti funkcije moguće je doći do bitnih osobina nekih ekonomskih veličina (funkcija) i zato ćemo tom pojmu posvetiti posebnu pažnju. Pod pojmom elastičnosti podrazumijevamo mjeru sposobnosti jedne ekonomska veličine y da reagira (s manjim ili većim intenzitetom) na promjenu neke druge ekonomske veličine x koja je s njom u funkcionalnoj međuovisnosti $y = f(x)$. Ta se mjera, koju ćemo zvati *koeficijentom elastičnosti*, izražava količnikom relativnog prirasta funkcije y i relativnog prirasta neovisne varijable x, tj.

$$E_{y,x} = \frac{\text{relativna prirast od } y}{\text{relativni prirast od } x},$$

odnosno

$$E_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}, \tag{3.19}$$

ali uz uvjet da se radi o beskonačno malim prirastima obiju veličina (što je u ekonomiji uglavnom slučaj). Ukoliko je funkcija $y = f(x)$ neprekidna funkcija u tački x, onda smatrajući da $\Delta x \to 0$, imamo i da $\Delta y \to 0$, pa će koeficijent elastičnosti funkcije $y = f(x)$ u tački x biti

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Dakle, uz uvjet da se radi o neprekidnoj funkciji y od neovisne varijable x, za koeficijent elstičnosti imamo formulu

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{3.20}$$

koja se naziva *Marshallovom formulom* (prema Alfredu Marshallu koji je prvi, 1885. godine, izložio pojam elastičnosti i mjeru elastičnosti potražnje, vidjeti [22], str. 444.).

Uočimo da se u Marshalovoj formuli (3.20) pojavljuju diferencijali dy i dx, čiji se količnik smatra izvodom funkcije y u tački x, odnosno graničnom funkcijom od y. Također, pošto se (3.20) može napisati u obliku

$$E_{y,x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}, \tag{3.21}$$

a kako odnos $\frac{y}{x}$ smatramo prosječnom funkcijom od y, to se koeficijent elastičnosti može tumačiti i kao odnos granične funkcije i prosječne funkcije, tj.

$$E_{y,x} = \frac{\text{granična funkcija}}{\text{prosječna funkcija}}.$$

Specijalno, koeficijent elstičnosti funkcije ukupnih troškova $T(Q)$ kao funkcije potražnje Q je jednak količniku graničnih troškova i prosječnih troškova

$$E_{T,Q} = \frac{GT(Q)}{\overline{T}(Q)}. \tag{3.22}$$

Napomenimo da koeficijent elastičnosti razmatramo na nekom nivou x_0 neovisne veličine x, te je preciznije koristiti oznaku $E_{y,x}(x_0)$.

Ustanovimo sada šta nam to praktično predstavlja koeficijent elastičnosti. U tu svrhu pretpostavimo da se neovisna varijabla x na nekom nivou x_0 povećala za 1%, tj. za $\frac{1}{100}$. Tada je relativni prirast neovisne veličine

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{\frac{x_0}{100}}{x_0} = \frac{1}{100},$$

pa je

$$E_{y,x}(x_0) \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{1}{100}} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100.$$

Odavde vidimo da *koeficijent elastičnosti označava za koliko se procenata promijenila veličina y nakon što se neovisna varijabla x povećala za* 1%. Ukoliko je koeficijent elastičnosti pozitivan, to znači da se veličina y povećala, dok u negativna vrijednost koeficijenta elastičnosti znači da se veličina y smanjila. Dakle, koeficijent elastičnosti označava i u kojem smjeru se promijenila veličina y.

Ako je $|E_{y,x}| < 1$, veličina y je *neelastična* u odnosu na promjenu veličine x. Naime, u tom slučaju se veličina y promijeni za manje od 1% nakon što se veličina x povećala za 1%, tj. promjena neelastične veličine je manjeg intenziteta od promjene neovisne varijable.

Ako je $|E_{y,x}| > 1$, veličina y je *elastična* u odnosu na promjenu veličine x, tj. u tom slučaju se veličina y promijeni za više od 1% nakon što se veličina x povećala za 1%. Drugim riječima, promjena elastične veličine je većeg intenziteta od promjene neovisne varijable.

U slučaju kad je $|E_{y,x}| = 1$, za veličinu y kažemo da je *jedinične elastičnosti* prema promjeni veličine x. Tada povećanje veličine x za 1% izaziva promjenu (povećanje ili smanjenje) veličine y također za 1%.

Dogodi li se da je $E_{y,x} = 0$, kažemo da je veličina y *perfektno neelastična*, budući da promjena veličine x ne prouzrokuje promjenu veličine y.

Ako je $|E_{y,x}| = \infty$, veličina y je *perfektno elastična.*

Sada smo u mogućnosti uvesti pojmove područja elastičnosti i područja neelastičnosti određene ekonomske veličine.

Definicija 3.12 ***Područjem elastičnosti*** *veličine y nazivamo skup vrijednosti (nivoa) veličine x za koje je funkcija y elastična, tj. skup*

$$\mathcal{P}_{EL} = \{x \mid x \in \mathcal{D}(y) \wedge |E_{y,x}| > 1\}.$$

Definicija 3.13 ***Područjem neelastičnosti*** *veličine y nazivamo skup vrijednosti (nivoa) veličine x za koje je funkcija y neelastična, tj. skup*

$$\mathcal{P}_{NEEL} = \{x \mid x \in \mathcal{D}(y) \wedge |E_{y,x}| < 1\}.$$

Primjer 3.37 *Zadana je funkcija potražnje $Q(p) = -p^2 + 20$, gdje p predstavlja cijenu.*
i) Izračunati koeficijent elastičnosti funkcije potražnje na nivou cijene: a) $p = 5$, b) $p = 2$. Interpretirati rezultat.
ii) Na kojem nivou cijene će potražnja biti: 1. jedinične elastičnosti, 2. perfektne neelastičnosti, 3. perfektne elastičnosti?

Rješenje.i) Općenito je koeficijent elastičnosti, prema Marshallovoj formuli (3.20):

$$E_{Q,p} = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{-p^2 + 20} \cdot (-2p) = \frac{-2p^2}{-p^2 + 20}. \tag{3.23}$$

a) Na nivou cijene $p = 5$ imamo

$$E_{Q,p}(5) = \frac{-2 \cdot 5^2}{-5^2 + 20} = 10.$$

Interpretacija: Kad se cijena p na nivou $p = 5$ poveća za 1%, tj. poveća na $p = 5.05$, tada se potražnja poveća za 10% i na nivou cijene $p = 5$ funkcija potražnje je elastična.

b) Na nivou cijene $p = 2$ imamo

$$E_{Q,p}(2) = \frac{-2 \cdot 2^2}{-2^2 + 20} = -\frac{1}{2}.$$

Interpretacija: Kad se cijena p na nivou $p = 2$ poveća za 1%, tj. poveća na $p = 2.02$, tada se potražnja smanji za za 0.5%, pa je funkcija potražnje neelastična na nivou cijene $p = 2$.

ii) Koristeći rezultat (3.23) imamo:

1. jediničnu elastičnost funkcije potražnje kad je $|E_{Q,p}| = \left|\frac{-2p^2}{-p^2+20}\right| = 1$, odnosno

$$\frac{-2p^2}{-p^2+20} = 1 \text{ ili } \frac{-2p^2}{-p^2+20} = -1,$$

iz čega se dobije $p = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$;

2. perfektnu neelastičnost potražnje kada je $|E_{Q,p}| = \left|\frac{-2p^2}{-p^2+20}\right| = 0$, što je moguće samo na nivou cijene $p = 0$;

3. perfektnu elastičnost potražnje ako je $|E_{Q,p}| = \left|\frac{-2p^2}{-p^2+20}\right| = \infty$, odnosno ako je $-p^2 + 20 = 0$, tj. kad je $p = 2\sqrt{5}$. ♣

Primjer 3.38 *Odrediti koeficijent elastičnosti* ***Paretove funkcije***

$$y(x) = \frac{A}{x^a}, \quad A > 0, a > 0.$$

Interpretirati dobijeni rezultat.

Rješenje. U ovom slučaju je

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\frac{A}{x^a}} \cdot A(-a)\,x^{-a-1} = -ax^{a+1}x^{-a-1} = -a.$$

Interpretacija: Vidimo da je koeficijent elastičnosti isti na svim nivoima neovisne varijable x, pri čemu povećanje veličine x za 1% prouzrokuje smanjenje veličine y za a%. ♣

Napomena 3.9 *Kako je*

$$d(\ln y) = \frac{dy}{y}, \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

koeficijent elastičnosti možemo, prema (3.21), napisati i u obliku

$$E_{y,x} = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \tag{3.24}$$

Ova formula je od posebnog praktičnog značaja kada treba izračunati koeficijent elastičnosti funkcije koja je znatno jednostavnijeg oblika nakon što se logaritmira (v. sljedeći primjer).

Primjer 3.39 *Odrediti koeficijent elastičnisti funkcije* $y = x^a e^{bx}$ *koristeći Marshallovu formulu (3.21), a zatim koristeći formulu (3.24). Odrediti parametre* a *i* b *tako da je* $E_{y,x}(1) = 2$ *i* $E_{y,x}(2) = -1$.

Rješenje. Prema Marshalovoj formuli (3.21) imamo

$$\begin{aligned} E_{y,x} &= \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^a e^{bx}} \left(a x^{a-1} e^{bx} + b x^a e^{bx} \right) \\ &= \frac{1}{x^{a-1} e^{bx}} \cdot x^{a-1} e^{bx} (a + bx) \\ &= a + bx. \end{aligned}$$

Kako je

$$d(\ln y) = d(a \ln x + bx) = a d(\ln x) + b dx,$$

koristeći formulu (3.24) imamo

$$\begin{aligned} E_{y,x} &= \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = \frac{a d(\ln x) + b dx}{d(\ln x)} \\ &= a + b \frac{dx}{d(\ln x)} = a + b \frac{dx}{\frac{1}{x} dx} \\ &= a + bx. \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga imamo

$$\begin{aligned} (E_{y,x}(1) = 2 \wedge E_{y,x}(2) = -1) &\Leftrightarrow (a + b = 2 \wedge a + 2b = -1) \\ &\Leftrightarrow (a = 5, b = -3). \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Osobine koeficijenta elastičnosti

Navedimo sada neke od najbitnijih osobina koeficijenta elastičnosti.

1. **Koeficijent elastičnosti zbira funkcija**

   Ako imamo dvije funkcije po x: $u(x)$ i $v(x)$, koeficijent elastičnosti zbira, odnosno razlike, tih funkcija je

$$\begin{aligned} E_{u \pm v,x} &= \frac{x}{u \pm v} \cdot \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{x}{u \pm v} \cdot \frac{du \pm dv}{dx} = \frac{x}{u \pm v} \left(\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{u \pm v} \left(u \cdot \frac{x}{u} \frac{du}{dx} \pm v \cdot \frac{x}{v} \frac{dv}{dx} \right) = \frac{1}{u \pm v} \left(u E_{u,x} \pm v E_{v,x} \right), \end{aligned}$$

   dakle,

$$E_{u \pm v,x} = \frac{u}{u \pm v} E_{u,x} \pm \frac{v}{u \pm v} E_{v,x}. \tag{3.25}$$

2. **Koeficijent elastičnosti proizvoda funkcija**

   Koeficijent elastičnosti proizvoda dvije funkcije $u(x)$ i $v(x)$ je

$$E_{uv,x} = \frac{x}{uv} \cdot \frac{d(uv)}{dx} = \frac{x}{uv}\left(v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right) = \frac{x}{u}\frac{du}{dx} + \frac{x}{v}\frac{dv}{dx},$$

   tj.

$$E_{uv,x} = E_{u,x} + E_{v,x}. \tag{3.26}$$

3. **Koeficijent elastičnosti količnika funkcija**

   Analogno određujemo i koeficijent elastičnosti količnika funkcija $u(x)$ i $v(x)$:

$$E_{\frac{u}{v},x} = \frac{x}{\frac{u}{v}} \cdot \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{xv}{u}\frac{\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)}{v^2} = \frac{x}{u}\frac{du}{dx} - \frac{x}{v}\frac{dv}{dx},$$

   tj.

$$E_{\frac{u}{v},x} = E_{u,x} - E_{v,x}. \tag{3.27}$$

4. **Koeficijent elastičnosti složene funkcije**

   Neka je y funkcija od u, a u funkcija od x, tj. y je složena funkcija $y(u(x))$. Tada je njen koeficijent elastičnosti, koristeći lančano pravilo,

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u}{y}\frac{dy}{du} \cdot \frac{x}{u}\frac{du}{dx},$$

   odnosno

$$E_{y,x} = E_{y,u} \cdot E_{u,x}. \tag{3.28}$$

5. **Koeficijent elastičnosti inverzne funkcije**

   Ako je y funkcija od x takva da postoji njoj inverzna funkcija $x = x(y)$, tada je koeficijent elastičnosti inverzne funkcije

$$E_{x,y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{E_{y,x}}.$$

   Dakle, vrijedi

$$E_{x,y} = \frac{1}{E_{y,x}}. \tag{3.29}$$

Primjer 3.40 *Zadana je funkcija potražnje $Q(p) = \sqrt{30 - 2p}$. Odrediti koeficijent elastičnosti cijene u odnosu na promjenu potražnje na nivou potražnje $Q = 4$. Interpretirati rezultat.*

Rješenje. Jednostavniji postupak izračunavanja traženog koeficijenta elastičnosti je korištenjem pravila za koeficijent elastičnosti inverzne funkcije nego direktnim putem, tj. $E_{p,Q} = \frac{1}{E_{Q,p}}$. No, odredimo prvo definiciono područje funkcije potražnje:

$$30 - 2p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 15.$$

Dakle, $\mathcal{D}(Q) = [0, 15]$. Koeficijent elastičnosti potražnje u odnosu na promjenu cijene u općem slučaju je

$$\begin{aligned} E_{Q,p} &= \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{\sqrt{30-2p}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{30-2p}} \cdot (-2) \\ &= -\frac{p}{30-2p}. \end{aligned}$$

Nađimo sada nivo cijene koji odgovara nivou potražnje $Q = 4$:

$$Q = 4 \Leftrightarrow \sqrt{30-2p} = 4 \Leftrightarrow 30 - 2p = 16 \Leftrightarrow p = 7.$$

Prema (3.29) imamo

$$E_{p,Q}(Q = 4) = \frac{1}{E_{Q,p}(p = 7)} = -\frac{30 - 2 \cdot 7}{7} = -\frac{16}{7}.$$

Interpretacija: Povećanjem potražnje na nivou $Q = 4$ za 1%, tj. na $Q = 4.04$, cijena se smanji za $\frac{16}{7}$%. ♣

Primjer 3.41 *Odrediti područje elastičnosti i područje neelastičnosti funkcije potražnje* $Q(p) = \frac{800 - 2p^2}{5}$.

Rješenje. Odredimo uvjete pod kojima ekonomske veličine imaju smisla. Naime, treba da je $p \geq 0$ i

$$Q(p) \geq 0 \Leftrightarrow 800 - 2p^2 \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \leq 400.$$

Dakle, $p \in [0, 20]$. Koeficijent elastičnosti potražnje u odnosu na promjenu cijene je

$$E_{Q,p} = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{5p}{800 - 2p^2} \cdot \left(-\frac{4p}{5}\right) = -\frac{2p^2}{400 - p^2}.$$

Područje elastičnosti potražnje (vodeći računa o činjenici $p \in [0, 20]$) je na onom nivou cijene p na kojem je $|E_{Q,p}| > 1$, tj.

$$\begin{aligned} \left| -\frac{2p^2}{400 - p^2} \right| &> 1 \Leftrightarrow \frac{2p^2}{|400 - p^2|} > 1 \Leftrightarrow \frac{2p^2}{400 - p^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow 2p^2 > 400 - p^2 \Leftrightarrow p^2 > \frac{400}{3} \Leftrightarrow p > \frac{20}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{P}_{EL} = \left(\dfrac{20}{\sqrt{3}}, 20\right]$. Preostaje da je $\mathcal{P}_{NEEL} = \left[0, \dfrac{20}{\sqrt{3}}\right)$. ♣

Elastičnost ukupnih troškova i prosječnih troškova

Uočimo zanimljivu vezu između koeficijenta elastičnosti ukupnih troškova i koeficijenta elastičnosti prosječnih troškova. Prvi od njih je dat formulom (3.22). Odredimo sada koeficijent elastičnosti prosječnih troškova:

$$\begin{aligned} E_{\overline{T},Q} &= \frac{Q}{\overline{T}} \cdot \frac{d\overline{T}}{dQ} = \frac{Q}{\frac{T}{Q}} \cdot \frac{d}{dQ}\left(\frac{T}{Q}\right) = \frac{Q^2}{T} \cdot \frac{T'Q - TQ'}{Q^2} \\ &= \frac{T'Q}{T} - Q' = \frac{Q}{T}\frac{dT}{dQ} - 1 = E_{T,Q} - 1. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$E_{\overline{T},Q} = E_{T,Q} - 1. \tag{3.30}$$

Veza (3.30) se može iskoristiti za brže izračunavanje jednog od ova dva koeficijenta elastičnosti preko onog drugog u slučaju kad je taj drugi lakše naći direktno nego prvi.

Primjer 3.42 *Data je funkcija ukupnih troškova*

$$T(Q) = \frac{Q^2}{10} + \frac{Q}{Q+5}.$$

Odrediti koeficijente elastičnosti ukupnih troškova i prosječnih troškova na nivou proizvodnje (potražnje) $Q = 10$.

Rješenje. Budući da je funkcija prosječnih troškova jednostavnijeg oblika od funkcije ukupnih troškova, odredimo direktnim putem koeficijent elastičnosti prosječnih troškova:

$$\begin{aligned} E_{\overline{T},Q} &= \frac{Q}{\overline{T}(Q)} \cdot \frac{d\overline{T}}{dQ} = \frac{Q}{\frac{Q}{10} + \frac{1}{Q+5}}\left(\frac{Q}{10} + \frac{1}{Q+5}\right)' \\ &= \frac{Q}{\frac{Q}{10} + \frac{1}{Q+5}}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{(Q+5)^2}\right), \end{aligned}$$

odakle je

$$E_{\overline{T},Q}(Q = 10) = \frac{10}{\frac{10}{10} + \frac{1}{10+5}}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{(10+5)^2}\right) = \frac{43}{48}.$$

Na osnovu (3.30) imamo

$$E_{T,Q}(Q=10) = E_{\overline{T},Q}(Q=10) + 1 = \frac{43}{48} + 1 = \frac{91}{48}. \quad \clubsuit$$

Fleksibilnost cijene i granični prihod

Poznato nam je da ako označimo sa Q potražnju za nekom robom i sa p cijenu te robe, tada su ukupni izdaci potrošača na tu robu, odnosno ukupan prihod proizvođača te robe, dati sa

$$P = Qp.$$

Pri tome najčešće smatramo da je potražnja funkcija cijene (koja je, naravno, opadajuća funkcija), pa je tada

$$P(p) = pQ(p).$$

Mijenjanje ukupnih izdataka potrošača na neku robu u odnosu na promjenu cijene te robe mjeri se graničnim izdacima potrošača, odnosno graničnim prihodom proizvođača:

$$GP(p) = \frac{dP}{dp}.$$

Očigledno je

$$\begin{aligned} GP(p) &= \frac{dP}{dp} = 1 \cdot Q + p\frac{dQ}{dp} = Q\left(1 + \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}\right) \\ &= Q(1 + E_{Q,p}). \end{aligned}$$

Formula

$$GP(p) = Q(1 + E_{Q,p}) \tag{3.31}$$

se naziva *Amoroso-Robinsonovom formulom.*

Poznato je da je uvijek $E_{Q,p} < 0$, jer je funkcija potražnje opadajuća funkcija cijene robe. Uvedemo li oznaku $f = -E_{p,Q} = -\dfrac{1}{E_{Q,p}}$, uobičajeno da se f naziva *koeficijentom fleksibilnosti cijene.*

Za robe koje imaju elastičnu potražnju, tj. ako pad cijene izaziva relativno veći porast količine potražnje i obratno, imamo da je $E_{Q,p} < -1$, odnosno $0 < f < 1$. Tada je $GP(p) < 0$, što znači da ukupni izdaci potrošača (ukupni prihod proizvođača) opadaju. Drugim riječima, veća cijena znači pad ukupnih izdataka potrošača, odnosno manji prihod proizvođača, kada je $E_{Q,p} < -1$ (odnosno $0 < f < 1$).

S druge strane, za robe koje imaju neelastičnu potražnju, tj. ako porast cijene izaziva smanjenje potražnje, ali relativno manje nego što je porasla cijena, imamo da je $-1 < E_{Q,p} < 0$, odnosno $f > 1$. Tada je $GP(p) > 0$, pa ukupni izdaci potrošača (ukupni prihod proizvođača) rastu. To znači da veća cijena prouzrokuje veće izdatke potrošača, odnosno veći prihod proizvođača, kada je $-1 < E_{Q,p} < 0$, odnosno $f > 1$.

Ukoliko je riječ o dobrima čija potražnja pada za približno jednaki postotak za koji je porasla njihova cijena, odnosno ako je $E_{Q,p} = -1$, tj. $f = 1$, tada su granični izdaci potrošača (granični prihod proizvođača) jednaki nuli, a to znači da su ukupni izdaci $P(p) = pQ(p)$ maksimalni.

Primjer 3.43 *Zadana je cijena p neke robe kao funkcija potražnje*

$$p = p(Q) = \frac{1}{50}e^{\frac{10}{Q}}.$$

Koje vrijednosti treba da imaju cijena p i potražnja Q da bi ukupni prihod bio maksimalan?

Rješenje. U gornjem razmatranju smo zaključili da će ukupan prihod P biti maksimalan kada je $f = -E_{p,Q} = 1$. Naime, to znači

$$\begin{aligned} -1 &= E_{p,Q} = \frac{Q}{p}\frac{dp}{dQ} = \frac{Q}{\frac{1}{50}e^{\frac{10}{Q}}}\left(\frac{1}{50}e^{\frac{10}{Q}}\right)' = \frac{Q}{\frac{1}{50}e^{\frac{10}{Q}}} \cdot \frac{1}{50}e^{\frac{10}{Q}}\left(-\frac{10}{Q^2}\right) \\ &= -\frac{10}{Q}, \end{aligned}$$

odakle je $Q = 10$. Tada je cijena robe

$$p = \frac{1}{50}e^{\frac{10}{10}} = \frac{e}{50} = 0.054,$$

pa je maksimalni ukupni prihod

$$P_{\max} = 0.054 \cdot 10 = 0.54. \quad \clubsuit$$

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

1. Poznata je funkcija potražnje nekog proizvoda $Q(p) = -0.5p + 11000$ i funkcija ukupnih troškova $T(Q) = 2Q^2 + 10^7$. Odrediti interval rentabilnosti proizvodnje, optimalnu proizvodnju, optimalnu cijenu i maksimalnu dobit.

2. Za neki proizvod A data je funkcija potražnje $Q(p) = -0.2p + 100$ i funkcija prosječnih troškova $\overline{T}(Q) = 2.5Q + 350 + \dfrac{250}{Q}$. Odrediti interval rentabilnosti proizvodnje, optimalnu proizvodnju, optimalnu cijenu i maksimalnu dobit.

3. Pretpostavimo da su ukupni troškovi (u dolarima) proizvodnje Q jedinica određene robe dati sa $T(Q) = 4Q^2 + Q + 60$.

a) Na kojem nivou proizvodnje su prosječni troškovi najmanji i kolika je ta najmanja vrijednost?

b) Na kojem nivou proizvodnje su prosječni troškovi jednaki graničnim troškovima?

c) Na istoj slici grafički predstaviti obje funkcije, prosječne i granične troškove.

4. Ako je koeficijent elastičnosti funkcije prosječnih troškova u odnosu na potražnju $E_{\overline{T},Q} = \frac{2Q-3}{Q+10}$, koliki je koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova u odnosu na potražnju?

5. Dati su ukupni troškovi proizvodnje nekog artikla, $T(Q) = 0.02Q^2 + 30Q + 800$. Odrediti koeficijente elastičnosti ukupnih i prosječnih troškova na nivou proizvodnje $Q = 300$. Interpretirati rezultat.

6. Odrediti područje elastičnosti i područje neelastičnosti funkcije potražnje $Q(p) = \sqrt{50 - p^2}$.

7. Dat je koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova $E_{T,Q} = \dfrac{Q}{\sqrt{2Q-3}}$. Odredite količinu proizvodnje za koju su prosječni troškovi jednaki graničnim troškovima.

8. Pretpostavimo da je data potražnja neke robe kao funkcija cijene $Q(p) = 500 - 2p$.

a) Odrediti na kojim nivoima cijene je potražnja elastična, neelastična, jedinične elastičnosti.

b) Koristeći rezultate iz dijela a), odrediti intervale rasta i opadanja funkcije ukupnih prihoda i cijenu za koju je ukupan prihod maksimalan.

c) Odrediti funkciju ukupnih prihoda eksplicitno kao funkciju cijene, te koristeći izvode odredite intervale rasta i opadanja te funkcije kao i cijenu za koju je ukupan prihod maksimalan.

9. Pretpostavimo da je data potražnja neke robe kao funkcija cijene $Q(p) = 120 - 0.1p^2$.

a) Odrediti na kojim nivoima cijene je potražnja elastična, neelastična, jedinične elastičnosti.

b) Koristeći rezultate iz dijela a), odrediti intervale rasta i opadanja funkcije ukupnih prihoda i cijenu za koju je ukupan prihod maksimalan.

c) Odrediti funkciju ukupnih prihoda eksplicitno kao funkciju cijene, te koristeći izvode odredite intervale rasta i opadanja te funkcije kao i cijenu za koju je ukupan prihod maksimalan.

10. Dokazati da je granični prihod kao funkcija potražnje oblika

$$GP(Q) = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right),$$

gdje je $\eta = E_{Q,p}$.

11. Pretpostavimo da su potražnja Q i cijena p određene robe povezane relacijom $p = 60 - 2Q$.

a) Odrediti elastičnost potražnje kao funkciju od Q.

b) Izračunati elastičnost potražnje na nivou $Q = 10$. Interpretirati rezultat.

c) Odrediti elastičnost potražnbje kao funkciju od p.

12. Data je cijena neke robe kao funkcija potražnje $p(Q) = 600 - 2Q^2$.

a) Izraziti elastičnost potražnje kao funkciju od Q i odrediti kada je $|\eta| = 1, |\eta| < 1$ i $|\eta| > 1$.

b) Koristeći rezultat iz dijela a) odrediti intervale rasta i opadanja ukupnog prihoda kao funkcije od Q. Na kojem nivou potražnje je ukupan prihod maksimalan?

c) Izraziti ukupan prihod kao funkciju od Q i koristeći izvode odrediti intervale rasta i opadanja ukupnog prihoda kao funkcije od Q i na kojem nivou potražnje je ukupan prihod maksimalan?

13. Neko poduzeće ima ukupan trošak i potražnju iskazane sljedećim funkcijama

$$T(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 111Q + 5 \quad \text{i} \quad Q_d(p) = 100 - p.$$

a) Zadovoljava li data funkcija $T(Q)$ uvjete za koeficijente pod kojim zaista može biti funkcija ukupnog troška?

b) Odrediti funkciju ukupnog prihoda poduzeća pomoću varijable Q.

c) Odrediti funkciju ukupne dobiti poduzeća pomoću varijable Q.

d) Odrediti nivo proizvodnje Q^* koja maksimizira ukupnu dobit poduzeća.

e) Kolika je maksimalna dobit poduzeća?

Poglavlje 4

Diferencijalni račun funkcija dvije i više varijabli

4.1 Funkcije dvije i više varijabli - osnovni pojmovi

Do sada smo imali priliku da izučavamo realne funkcije jedne varijable. Međutim, poznato je da u mnogim praktičnim situacijama vrijednost jedne veličine može ovisiti o vrijednostima druge dvije ili više drugih veličina. Na primjer, potražnja maslaca može ovisiti o cijeni maslaca i o cijeni margarina. Slično, količina proizvodnje nekog outputa iz neke tvornice može ovisiti o uloženom kapitalu i o uloženom radu. Na taj način, veličina koja ovisi o druge dvije veličine je funkcija dvije varijable. U skladu s općenitom definicijom funkcije, Definicijom 2.1, možemo dati preciznu definiciju realne funkcije dvije i više varijabli.

Definicija 4.1 *Za funkciju $f : A \to B$, pri čemu su A i B neprazni skupovi, kažemo da je* ***realna funkcija dvije varijable*** *ako je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i $B \subseteq \mathbb{R}$, odnosno da je* ***realna funkcija** n **varijabli*** *ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $B \subseteq \mathbb{R}$.*

U slučaju kad je $f : A \to B$ realna funkcija dvije varijable, tada se, prema određenom zakonu f, svakom uređenom paru $(x, y) \in A$ pridružuje tačno jedan realan broj $z = f(x, y)$, a u slučaju kad je $f : A \to B$ realna funkcija n varijabli, tada se svakoj uređenoj n-torci $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ pridružuje tačno jedan realan broj $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Predmet izučavanja ovog poglavlja će biti uglavnom realne funkcije dvije varijable, ali ćemo navesti i osnovne pojmove općenito vezane za realne funkcije n varijabli. Slično kao kod realne funkcije jedne varijable i ovdje pod *domenom* ili *definicionim područjem* realne funkcije više varijabli podrazumijevamo skup $\mathcal{D}(f) \subseteq A$ svih uređenih n-torki $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ za koje je $z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$.

Primjer 4.1 *Data je funkcija* $f(x,y) = \dfrac{2xy^2 + 7x}{x - 3y}$.

a) Odrediti definiciono područje od f.

b) Izračunati $f(-1,2)$ *i* $f(4,0)$.

Rješenje. a) Očito je da će izraz $\dfrac{2xy^2 + 7x}{x - 3y}$ biti definiran samo ako mu nazivnik nije nula, tj. ako je $x - 3y \neq 0$, odnosno $y \neq \dfrac{x}{3}$. Dakle,

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \frac{x}{3} \right\}.$$

b) $f(-1,2) = \dfrac{2(-1) \cdot 2^2 + 7(-1)}{-1 - 3 \cdot 2} = \dfrac{15}{7}$,

$f(4,0) = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 0^2 + 7 \cdot 4}{4 - 3 \cdot 0} = \dfrac{28}{4} = 7.$ ♣

U ekonomskoj praksi vrlo često korištena funkcija dvije varijable je tzv. **Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje**, kojom se izražava ovisnost količine outputa Q iz određene tvornice o uloženom kapitalu K i uloženom radu L u obliku

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

gdje su A i α pozitivne konstante i $0 < \alpha < 1$. Kasnije ćemo objasniti ekonomski smisao parametra α (kad bude riječi o tzv. koeficijentu parcijalne elastičnosti).

Primjer 4.2 *Pretpostavimo da je u određenoj tvornici količina proizvoda* Q *nekog outputa data u obliku Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje* $Q(K,L) = 50K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ *jedinica, gdje je* K *uloženi kapital izražen u jedinicama od* 1000\$, *a* L *uloženi rad izražen u radnim satima.*

a) Izračunati količinu outputa ako je za njenu proizvodnju uložen kapital u vrijednosti 343000\$, *i utrošeno* 1000 *radnih sati.*

b) Pokazati da će količina proizvoda outputa iz dijela a) biti udvostručena ako se udvostruče obje varijable: i uloženi kapital i uloženi rad.

Rješenje. a) Uvrštavanjem vrijednosti $K = 343$ hiljade dolara i $L = 1000$, dobijamo

$$Q(343, 1000) = 50 \cdot 343^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{3}} = 50 \cdot 7 \cdot 100 = 35000$$

jedinica outputa.

b) Uzimajući $K = 2 \cdot 343$ i $L = 2 \cdot 1000$, imamo

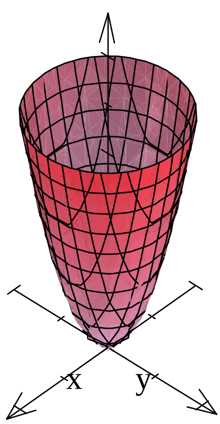
$$\begin{aligned} Q(2 \cdot 343, 2 \cdot 1000) &= 50(2 \cdot 343)^{\frac{1}{3}}(2 \cdot 1000)^{\frac{2}{3}} \\ &= 50 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 343^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\left[50 \cdot 343^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{3}}\right] \\ &= 2Q(343, 1000) = 2 \cdot 35000 \\ &= 70000 \end{aligned}$$

jedinica outputa. Dakle, zaista je količina outputa udvostručena kada je $K = 2 \cdot 343$ i $L = 2 \cdot 1000$, tj. kad su obje varijable, K i L, udvostručene. ♣

Kao i kod realne funkcije jedne varijable i u slučaju realne funkcije dvije varijable, ukoliko imamo njen analitički izraz, moguće je funkciju grafički predstaviti u pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu u trodimenzionalnom prostoru kao skup

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathcal{D}(f) \wedge z = f(x, y)\},$$

koji nazivamo *grafom* funkcije f. Geometrijska predstava grafa funkcije dvije varijable je površ u prostoru. Na Slici FG1 predstavljen je graf funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (što predstavlja površ u prostoru koju nazivamo paraboloidom).



Slika FG1

Važan pojam kod funkcija dvije varijable je *nivo linija*. Naime, ako je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta, tada je nivo linija funkcije $z = f(x, y)$ na nivou C kriva $f(x, y) = C$. Nivo linije imaju veliku primjenu, posebno u ekonomiji. Ukoliko nam je $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje, onda nivo linija ove funkcije na nivou C ima oblik $Q(K, L) = C$, odnosno

$$AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = C. \tag{4.1}$$

Posljednja relacija (4.1) pokazuje određenu kombinaciju vrijednosti varijabli K i L koje treba uzeti da bi količina proizvodnje bila na nivou C. Dobijena nivo linija (4.1) u ovom specijalnom slučaju se naziva *krivom konstantne proizvodnje* C, ili još jednostavnije, *izokvantom.*

U slučaju izokvante (4.1) jedna varijabla može se eksplicitno izraziti pomoću one druge, to jest, recimo, varijabla K je funkcija od L:

$$K = K(L) = \left(CA^{-1}L^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.2}$$

Primjer 4.3 *Data je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje* $Q(K, L) = 170K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$. *Odrediti kombinaciju uloženog kapitala i uloženog rada* (K, L) *za koju je nivo proizvodnje* 1700 *jedinica outputa, a zatim kombinaciju* (K, L) *za koju će nivo proizvodnje biti dvostruko veći od zadanog. Šta se može reći o odgovarajućim izokvantama?*

Rješenje. Prema datim podacima imamo sljedeću jednadžbu

$$1700 = 170K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}},$$

odakle je

$$K = \frac{10^4}{L^3}.$$

U drugom slučaju imamo

$$2 \cdot 1700 = 170K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}},$$

odakle je

$$K = 16 \cdot \frac{10^4}{L^3}.$$

Uočavamo da je izokvanta u drugom slučaju, koja odgovara većem nivou proizvodnje, "iznad" izokvante u prvom slučaju, koja odgovara nivou proizvodnje na datom nivou. ♣

Druga primjena nivo linija u ekonomiji uključuje koncept *krivih indiferencije.* Naime, kriva indiferencije predstavlja krivu s osobinom da je potrošač jednako zadovoljan svakom kombinacijom (x, y) dobara x i y koje se nalaze na toj krivoj. Drugim riječima, ako je $U(x, y)$ funkcija korisnosti potrošača određenim dobrima x i y, onda je svaka nivo linija $U(x, y) = C$ funkcije korisnosti jedna kriva indiferencije.

Primjer 4.4 *Pretpostavimo da je zadovoljstvo potrošača konzumiranjem x jedinica prvog dobra i y jedinica drugog dobra dato funkcijom korisnosti*

$$U(x, y) = (3x + 1)(2y + 3).$$

Potrošač trenutno posjeduje 5 *jedinica prvog dobra i* 7 *jedinica drugog dobra. Odrediti nivo potrošačeve korisnosti (zadovoljstva), a onda odrediti odgovarajuću krivu indiferencije.*

Rješenje. Traženi nivo korisnosti je

$$U(5, 7) = (3 \cdot 5 + 1)(2 \cdot 7 + 3) = 272,$$

a odgovarajuća indiferentna kriva za taj nivo korisnosti je

$$272 = (3x + 1)(2y + 3),$$

odnosno

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{272}{3x + 1} - 3\right). \quad \clubsuit$$

∘ ∘ ∘

Zadaci za samostalan rad

U zadacima 1-4 odrediti definiciono područje funkcije f i izračunati naznačene vrijednosti:

1. $f(x, y) = \dfrac{2x - 3y}{x + 2y^2}$, $f(1, 2)$, $f(-2, 1)$.

2. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x^2}$, $f(1, 2)$, $f(-2, 10)$.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln y}$, $f(3, 2)$, $f(0, 1)$.

4. $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{3 - e^{xy}}$, $f(1, 0)$, $f(\ln 2, 2)$.

5. Koristeći x vještih radnika i y nevještih radnika, tvornica može da proizvede $Q(x, y) = 10x^2y$ jedninica određenog artikla dnevno. Trenutno je zaposleno 20 vještih i 40 nevještih radnika.

a) Koliko će jedinica tog artikla biti proizvedeno svakoga dana?

b) Za koliko će se nivo dnevne proizvodnje tog artikla promijeniti ako se u sadašnji proces proizvodnje uključi još 1 vješti radnik?

c) Za koliko će se procenata nivo dnevne proizvodnje tog artikla promijeniti ako se u sadašnji proces proizvodnje uključi još 1 nevješti radnik?

d) Za koliko će se nivo dnevne proizvodnje tog artikla promijeniti ako se u sadašnji proces proizvodnje uključi još 1 vješti radnik i 1 nevješti radnik?

6. Pretpostavimo da je u određenoj tvornici količina proizvoda Q nekog outputa data u obliku Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje $Q(K, L) = 120K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ jedinica, gdje je K uloženi kapital izražen u jedinicama od 1000\$, a L uloženi rad izražen u radnim satima.

a) Izračunati količinu outputa ako je za njenu proizvodnju uložen kapital u vrijednosti 125000\$, i utrošeno 1331 radni sat.

b) Šta se može očekivati u ukupnoj količini outputa u dijelu a) ako se obje, i uloženi kapital i uloženi rad, smanje za pola?

7. Koristeći x vještih radnika i y nevještih radnika, tvornica može da proizvede $Q(x, y) = 3x + 2y$ jedninica određenog artikla dnevno. Trenutno je zaposleno 20 vještih i 40 nevještih radnika.

a) Izračunati sadašnju ukupnu dnevnu količinu proizvodnje.

b) Odrediti jednadžbu koja povezuje nivoe uposlenih vještih i nevještih radnika ako ukupna dnevna količina proizvodnje ostaje nepromijenjena.

c) U dvodimenzionalnom Descartesovom koordinatnom sistemu nacrtati izokvantu koja odgovara trenutnom nivou ukupne proizvodnje.

d) Koliku promjenu treba napraviti u broju nevještih radnika y ako se broj vješih radnika x poveća za 2, a da se pri tome ne promijeni dnevna ukupna količina proizvodnje?

8. Pretpostavimo da je zadovoljstvo potrošača konzumiranjem x jedinica prvog dobra i y jedinica drugog dobra dato funkcijom korisnosti $U(x, y) = 2x^3y$. Potrošač trenutno posjeduje 5 jedinica prvog dobra i 4 jedinica drugog dobra. Odrediti nivo potrošačeve korisnosti (zadovoljstva), a onda odrediti odgovarajuću krivu indiferencije.

9. Pretpostavimo da je zadovoljstvo potrošača konzumiranjem x jedinica prvog dobra i y jedinica drugog dobra dato funkcijom korisnosti

$$U(x,y) = (x+1)(y+2).$$

Potrošač trenutno posjeduje 25 jedinica prvog dobra i 8 jedinica drugog dobra. Odrediti nivo potrošačeve korisnosti (zadovoljstva), a onda odrediti odgovarajuću krivu indiferencije.

4.2 Parcijalni izvodi

U mnogim problemima koji uključuju funkcije dvije varijable (kao i općenito funkcije više varijabli) imamo za cilj procijeniti brzinu promjene funkcije u odnosu na jednu varijablu, dok druga varijabla (ili sve ostale) ostaje konstantna. To jest, cilj nam je derivirati funkciju u odnosu na odabranu varijablu dok je druga varijabla (ili sve ostale) fiksirana. Ovaj proces je poznat kao parcijalno deriviranje (diferenciranje), a dobijeni izvod ćemo zvati parcijalnim izvodom funkcije u odnosu na odabranu varijablu. Dakle, ukoliko želimo da odredimo brzinu promjene funkcije $z = f(x,y)$ na nivou vrijednosti varijabli $x = x_0$ i $y = y_0$ u odnosu na varijablu x, onda varijablu y držimo fiksnom s vrijednošću $y = y_0$ i provjeravamo da li postoji granična vrijednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{4.3}$$

Ukoliko postoji konačna granična vrijednost (4.3), onda je nazivamo *prvim parcijalnim izvodom* (ili *parcijalnim izvodom prvog reda*) funkcije $z = f(x,y)$ po varijabli x u tački (x_0, y_0) i označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ \text{ili} \ f_x(x_0, y_0).$$

Analogno postupamo i u slučaju kada želimo odrediti brzinu promjene funkcije $z = f(x,y)$ na nivou vrijednosti varijabli $x = x_0$ i $y = y_0$ u odnosu na varijablu y. Tada varijablu x držimo fiksnom s vrijednošću $x = x_0$ i provjeravamo da li postoji granična vrijednost

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{4.4}$$

Ako postoji konačna granična vrijednost (4.4), onda je nazivamo *prvim parcijalnim izvodom* (ili *parcijalnim izvodom prvog reda*) funkcije $z = f(x,y)$ po varijabli y u tački (x_0, y_0) i označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \ \text{ili} \ f_y(x_0, y_0).$$

Naravno, kada razmatramo parcijalni izvod u proizvoljnoj tački (x, y), onda upotrebljavamo oznake

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f_x, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, f_y.$$

Općenito, za funkciju $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definiramo parcijalni izvod prvog reda po varijabli x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ kao graničnu vrijednost

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i},$$

ukoliko ona postoji i konačna je, a označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \ \text{ili} \ f_{x_i}.$$

Primjer 4.5 *Odrediti parcijalne izvode prvog reda funkcije*

$$f(x, y) = x^2 y + y^3 x - y^2 + \frac{2y}{5x}.$$

Rješenje. Zbog jednostavnosti izračunavanja napišimo datu funkciju u obliku

$$f(x, y) = x^2 y + y^3 x - y^2 + \frac{2y}{5} x^{-1}.$$

Pri izračunavanju parcijalnog izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ promatrat ćemo funkciju f kao funkciju od x, diferencirajući sumu član po član, tretirajući pri tome varijablu y konstantom. To znači da ćemo y ispuštati u procesu računanja kada je aditivna konstanta (kao što je član y^2), ali će se zadržati ako je multiplikativna konstanta (u svim ostalim članovima zbira). Tako imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(x^2\right)' y + y^3 (x)' - \left(y^2\right)'_x + \frac{2y}{5}\left(x^{-1}\right)' = 2xy + y^3 - \frac{2y}{5} x^{-2}.$$

Analogno postupamo u slučaju izračunavanja parcijalnog izvoda $\frac{\partial f}{\partial y}$, s tim da ovdje promatramo funkciju f kao funkciju od y, dok varijablu x tretiramo kao konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 (y)' + \left(y^3\right)' x - \left(y^2\right)' + \frac{2(y)'}{5} x^{-1} = x^2 + 3y^2 x - 2y + \frac{2}{5} x^{-1}. \quad \clubsuit$$

Primjer 4.6 *Zadana je funkcija ponude dvije robe kao funkcija njihovih cijena p_1 i p_2 u obliku*

$$Q_s(p_1, p_2) = 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_2^3 - \frac{3}{p_1 p_2}.$$

Odrediti brzinu promjene funkcije ponude u odnosu na svaku od varijabli pojedinačno.

Rješenje. U suštini treba izračunati parcijalne izvode date funkcije ponude u odnosu na svaku od varijabli pojedinačno. Pri izračunavanju brzine promjene ponude u odnosu na cijenu prve robe p_1, cijenu p_2 smatrat ćemo konstantom, te imamo

$$\frac{\partial Q_s}{\partial p_1} = 3\left(p_1^2\right)' p_2 + 2\left(p_1\right)' p_2^3 - \frac{3}{p_2}\left(p_1^{-1}\right)' = 6p_1 p_2 + 2p_2^3 + \frac{3}{p_2} p_1^{-2}.$$

Smatrajući da je cijena p_1 konstanta, dobijamo brzinu promjene ponude u odnosu na cijenu p_2:

$$\frac{\partial Qs}{\partial p_2} = 3p_1^2\left(p_2\right)' + 2p_1\left(p_2^3\right)' - \frac{3}{p_1}\left(p_2^{-1}\right)' = 3p_1^2 + 6p_1 p_2^2 + \frac{3}{p_1} p_2^{-2}. \quad \clubsuit$$

4.3 Totalni diferencijal

U slučaju realne funkcije jedne varijable vidjeli smo da možemo aproksimirati prirast funkcije Δy pri maloj promjeni neovisne varijable Δx na sljedeći način

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} \Delta x,$$

odnosno

$$\Delta y \simeq dy = y'(x)\, dx.$$

Držimo li varijablu y u funkciji $z = f(x, y)$ konstantnom, onda ćemo imati da se prirast funkcije Δz_x pri maloj promjeni Δx varijable x može aproksimirati kao

$$\Delta z_x \simeq \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x.$$

Izraz $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ nazivamo *parcijalnim diferencijalom prvog reda* funkcije *z po varijabli x.*

Analogno, ako je varijabla x konstantna, onda se prirast funkcije Δz_y pri maloj promjeni Δy varijable y može aproksimirati kao

$$\Delta z_y \simeq \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Izraz $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ nazivamo *parcijalnim diferencijalom prvog reda* funkcije *z po varijabli y.*

U slučaju kad se mijenjaju obje varijable za male vrijednosti Δx i Δy, tada se odgovarajući totalni prirast funkcije Δz može aproksimirati zbirom odgovarajućih parcijalnih diferencijala po jednoj i po drugoj varijabli, tj.

$$\Delta z \simeq d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4.5}$$

Izraz

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{4.6}$$

nazivamo *prvim totalnim diferencijalom* (ili *totalnim diferencijalom prvog reda*) *funkcije $z = f(x, y)$.*

Slično se definira totalni diferencijal funkcije n varijabli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kao

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Primjer 4.7 *U nekoj tvornici dnevni izlaz određenog proizvoda je $Q = 240K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ jedinica, gdje je K uloženi kapital koji se mjeri jedinicama od 1000\$, dok je L uloženi rad mjeren radnim satima. Trenutno uloženi kapital iznosi 512000\$ dnevno i uloženi rad je 1000 radnih sati dnevno. Procijeniti promjenu u količini outputa koja će biti izazvana povećanjem uloženog kapitala za 1000\$ i povećanjem uloženog rada za 5 radnih sati.*

Rješenje. Primijenimo formulu (4.5) za $K = 512, L = 1000, dK = \Delta K = 1$ i $dL = \Delta L = 5$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned}
\Delta Q &\simeq \frac{\partial Q}{\partial K}dK + \frac{\partial Q}{\partial L}dL \\
&= 240 \cdot \frac{1}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}\Delta K + 240 \cdot \frac{2}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}\Delta L \\
&= 80 \cdot (512)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1000)^{\frac{2}{3}} \cdot 1 + 160 \cdot (512)^{\frac{1}{3}} \cdot (1000)^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 \\
&= 80 \cdot \left(8^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 1 + 160 \cdot \left(8^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(10^3\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 \\
&= 80 \cdot \frac{1}{64} \cdot 100 + 160 \cdot 8 \cdot \frac{1}{10} \cdot 5 \\
&= 765
\end{aligned}$$

jedinica outputa. Dakle, doći će do porasta proizvodnje za 765 jedinica. ♣

Zanimljiva je potreba da se izračuna **približna procentualna promjena** neke veličine ako su nam poznate procentualne promjene njenih komponenti (varijabli). Naime, ako pretpostavimo da je veličina z funkcija od x i y i da je Δx mala promjena veličine x, a Δy mala promjena veličine y, tada je odgovarajuća procentualna promjena veličine z:

$$\Delta_{\%} z = 100\frac{\Delta z}{z} \simeq 100 \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}{z}. \tag{4.7}$$

Primjer 4.8 *U nekoj tvornici proizvodnja se odvija po Cobb-Douglasovoj funkciji* $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, *gdje su* A *i* α *pozitivne konstante i* $0 < \alpha < 1$. *Približno izračunati procentualnu promjenu u količini proizvodnje ako se i uloženi kapital i uloženi rad povećaju za* 1%.

Rješenje. Prema formuli (4.7), za $\Delta K = \frac{1}{100}K$ i $\Delta L = \frac{1}{100}L$, imamo

$$\begin{aligned}
\Delta_{\%} Q &= 100\frac{\Delta Q}{Q} \simeq 100 \cdot \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L}{Q} \\
&= 100 \cdot \frac{A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \cdot \frac{1}{100}K + A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} \cdot \frac{1}{100}L}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} \\
&= 100 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{A\alpha K^{\alpha}L^{1-\alpha} + A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} \\
&= \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}(\alpha + 1 - \alpha)}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = 1 \ (\%).
\end{aligned}$$

Dakle, pod navedenim uvjetima doći će do približnog povećanja proizvodnje za 1%. ♣

4.4 Lančano pravilo

U mnogim praktičnim situacijama pojedine veličine su date kao funkcije dvije ili više varijabli, od kojih svaka opet može biti funkcija još nove varijable. Pri tome nam cilj bude upravo da odredimo brzinu (stopu) promjene promatrane veličine u odnosu na ovu novu varijablu. Na primjer, potražnja određene robe može ovisiti o cijeni te robe i o cijeni konkurentne robe na tržištu, pri čemu obje cijene opet rastu u odnosu na vrijeme, a cilj nam je da odredimo brzinu promjene potražnje u odnosu na vrijeme. Ovaj problem se može riješiti generalizacijom odgovarajućeg lančanog pravila za realne funkcije jedne varijable. Naime, vrijedi sljedeći teorem (kojeg navodimo bez dokaza).

Teorem 4.1 *Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u nekoj oblasti $A \subseteq \mathbb{R}^2$, pri čemu su x i y funkcije od t, tj. $x = x(t), y = y(t)$, $(x(t), y(t)) \in A$ i neka one imaju izvode $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$. Tada vrijedi*

$$\frac{dz}{dt}\left(=\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{4.8}$$

Primijetimo da je izvod $\dfrac{df}{dt}$ iz (4.8) zbir dva člana, od kojih svaki može biti interpretiran korištenjem lančanog pravila za funkciju jedne varijable. Tako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \text{brzini promjene } z \text{ u odnosu na } t \text{ za fiksno } y$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \text{brzini promjene } z \text{ u odnosu na } t \text{ za fiksno } x.$$

Tako ustvari lančano pravilo (4.8) govori da je totalna brzina promjene veličine z u odnosu na varijablu t zbir ove dvije "parcijalne" brzine promjene.

Navedimo sada par primjera koji ilustriraju upotrebu lančanog pravila za složene funkcije dvije varijable.

Primjer 4.9 *Odrediti $\dfrac{dz}{dt}$ ako je $z = f(x, y) = 2x^2 + 3xy^2 + 5$, a x i y dati kao funkcije od t: $x = 3t^2 - t$, $y = t + 1$.*

Rješenje. Prema lančanom pravilu, imamo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(4x + 3y^2\right)(6t - 1) + 6xy \cdot 1.$$

Zamjenom $x = 3t^2 - t$ i $y = t + 1$ u posljednjoj jednakosti, dobije se

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \left(12t^2 - 4t + 3t^2 + 6t + 3\right)(6t - 1) + 6\left(3t^2 - t\right)(t + 1) \\ &= 108t^3 + 9t^2 + 10t - 3. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 4.10 *U apoteci se prodaju dvije vrste multivitamina, brend A i brend B. Prodajne vrijednosti pokazuju da, ako se brend A prodavao po x dolara po boci, a brend B po y dolara po boci, potražnja za brendom A će biti*

$$Q(x, y) = 200 - 10x^2 + 15y \quad \textit{boca mjesečno.}$$

Procijenjeno je da će nakon t mjeseci od sada cijena brenda A biti

$$x = 1 + 0.3t \quad \textit{dolara po boci,}$$

a cijena brenda B će biti

$$y = 3 + 0.2 \ln t \quad \textit{dolara po boci.}$$

Kojom brzinom će se mijenjati potražnja za brendom A u odnosu na vrijeme od 5 *mjeseci od sada?*

Rješenje. Cilj nam je ustvari da odredimo $\dfrac{dQ}{dt}$ za $t = 5$. Koristeći lančano pravilo (4.8), dobijamo

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -20x \cdot 0.3 + 15 \cdot 0.2 \cdot \frac{1}{t} = -6x + \frac{3}{t}.$$

Za $t = 5$ je $x = 1 + 0.3 \cdot 5 = 2.5$, pa je

$$\frac{dQ}{dt} = -6 \cdot 2.5 + \frac{3}{5} = -15 + 0.6 = -14.4 \ .$$

Dakle, nakon 5 mjeseci će potražnja za brendom A opadati za 14.4 boce mjesečno. ♣

Lančano pravilo za složenu funkciju dvije varijable može se koristiti i pri izračunavanju nagiba tangente na nivo liniju $f(x, y) = C$ u određenoj tački (x_0, y_0) te linije. Poznato nam je odranije da je taj nagib jednak izvodu $\dfrac{dy}{dx}(x_0, y_0)$. Ponekad je iz jednakosti $f(x, y) = C$ moguće varijablu y eksplicitno izraziti preko x, a onda neposrednim diferenciranjem izračunati traženi izvod, odnosno traženi nagib promatrane nivo linije. Međutim, vrlo često to nije moguće uraditi i potrebno je izvršiti diferenciranje implicitne funkcije (što smo već objasnili u Sekciji 3.7). Taj se postupak može izvesti i pomoću lančanog pravila složene funkcije. Naime, diferenciranjem jednakosti $f(x, y) = C$ po varijabli x, smatrajući pri tome da je y funkcija od x, primjenom lančanog pravila za složenu funkciju dvije varijable, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

odakle je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}. \tag{4.9}$$

Na taj način smo dobili formulu (4.9) za izračunavanje nagiba (tangente) nivo linije $f(x, y) = C$.

Primjer 4.11 *Odrediti nagib nivo linije* $f(x,y) = 17$ *kad je* $x = 1$ *ako je*

$$f(x,y) = 2x^3y^2 + xy^3 - 3x + 4.$$

Rješenje. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 + y^3 - 3 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y + 3xy^2,$$

prema formuli (4.9), imamo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2y^2 + y^3 - 3}{4x^3y + 3xy^2}. \tag{4.10}$$

Odredimo tačku u kojoj se traži nagib date nivo linije. Naime, iz $f(x,y) = 17$, za $x = 1$, slijedi

$$\begin{aligned} 2y^2 + y^3 - 3 + 4 &= 17 \Leftrightarrow 2y^2 - 8 + y^3 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y^2 - 8 + y^3 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(y-2)(y+2) + (y-2)\left(y^2 + 2y + 4\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)\left(y^2 + 4y + 8\right) = 0, \end{aligned}$$

odakle je $y = 2$ jedino realno rješenje (ostala dva su $-2 \pm 2i$). Dakle, tražimo nagib date nivo linije u tački $(1,2)$, te iz (4.10) dobijamo

$$\frac{dy}{dx}(1,2) = -\frac{6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 2^3 - 3}{4 \cdot 1^3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2} = -\frac{29}{20}. \quad \clubsuit$$

4.4.1 Primjeri primjene u ekonomiji

Slično Primjeru 3.19 i ovdje se može navesti zanimljiva primjena u ekonomiji lančanog pravila za složenu funkciju dvije varijable.

Primjer 4.12 *Koristeći* x *radnih sati vještih radnika i* y *radnih sati nevještih radnika, tvornica može da proizvede* $f(x,y) = 10x^2\sqrt{y}$ *jedinica nekog artikla dnevno. Trenutno se koriste* 18 *radnih sati vještih radnika i* 36 *sata nevještih radnika, a planira se povećanje radnih sati vještih radnika za* $\frac{1}{4}$ *radnog sata. Procijeniti promjenu broja radnih sati nevještih radnika tako da proizvodnja ostane na istom nivou.*

Rješenje. Trenutni broj izlaznih jedinica artikla je $f(18,36) = 19440$. Kombinacija x i y za koje nivo proizvodnje ostaje nepromijenjen su koordinate tačaka koje leže na nivo liniji funkcije proizvodnje $f(x,y) = 19440$, odnosno $x^2\sqrt{y} = 1944$. Aproksimaciona formula promjene broja radnih sati nevještih radnika Δy, pri promjeni $\Delta x = \frac{1}{4}$, je

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx}\Delta x.$$

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20x\sqrt{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5x^2}{\sqrt{y}},$$

koristeći formulu (4.9), imamo

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx}\Delta x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\Delta x = -\frac{20x\sqrt{y}}{\frac{5x^2}{\sqrt{y}}} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{y}{x},$$

odnosno, za $x = 18$ i $y = 36$,

$$\Delta y \simeq -\frac{36}{18} = -2.$$

Dakle, kompenzacija za povećanje radnih sati vještih radnika za $\frac{1}{4}$ radnog sata jeste smanjenje broja radnih sati nevještih radnika za približno 2 radna sata da bi proizvodnja ostala na istom nivou. ♣

Primjer 4.13 *Pretpostavimo da je korisnost koju ostvari potrošač iz x jedinica jednog dobra i y jedinica drugog dobra data funkcijom korisnosti $U(x,y) = 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. Potrošač trenutno posjeduje $x = 25$ jedinica prvog dobra i $y = 36$ jedinica drugog dobra. Procijeniti koliko je jedinica drugog dobra potrošač treba da zamijeni za 1 jedinicu prvog dobra, a da pri tome ne promijeni ukupnu korisnost.*

Rješenje. Trenutni nivo ukupne korisnosti potrošača je $U(25,36) = 1500$. Kombinacija x i y za koje ukupna korisnost ostaje nepromijenjena su koordinate tačaka koje leže na nivo liniji $f(x,y) = 1500$, odnosno $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 750$. Cilj nam je da procijenimo promjenu Δy koja odgovara promjeni $\Delta x = -1$ tako da ukupna korisnost potrošača ostane na istom nivou. Aproksimaciona formula

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx}\Delta x = -\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} = 3x^{-1}y = \frac{3y}{x}$$

za $x = 25$ i $y = 36$ daje

$$\Delta y \simeq \frac{108}{25} = 4.32 \;\text{ jedinice.}$$

Dakle, potrošač treba da zamijeni 4.32 jedinice drugog dobra za 1 jedinicu prvog dobra kako ne bi došlo do promjene nivoa ukupne korisnosti. ♣

4.5 Parcijalni izvodi višeg reda

Izračunavanjem parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $f(x, y)$ zaključujemo da su i oni funkcije varijabli x i y. Neka je, na primjer,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y).$$

Budući da ćemo raditi s funkcijama koje imaju primjenu u ekonomiji, onda ćemo smatrati da i njihovi parcijalni izvodi prvog reda imaju parcijalne izvode prvog reda po obje varijable. Dakle, ima smisla tražiti parcijalne izvode prvog reda funkcija g i h: $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial x}$ i $\frac{\partial h}{\partial y}$. Te ćemo izvode zvati izvodima drugog reda funkcije f i može ih biti četiri, a označavat ćemo ih na sljedeći način:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Također koristimo i ove oznake:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Parcijalni izvod $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ zovemo *parcijalnim izvodom drugog reda po* x funkcije f, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ zovemo *parcijalnim izvodom drugog reda po* y funkcije f, dok $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ zovemo *mješovitim parcijalnim izvodima po* x i y, odnosno po y i x funkcije f. Napomenimo da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ čitamo kao: ”delta dva ef po delta iks na kvadrat”.

Primjer 4.14 *Odrediti parcijalne izvode drugog reda funkcije*

$$f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y - 3y + x - 5.$$

Rješenje. Prvo odredimo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4xy + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 2x^2 - 3.$$

Odavde slijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + 4xy + 1\right) = 6xy^2 + 4y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + 4xy + 1\right) = 6x^2y + 4x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y + 2x^2 - 3\right) = 6x^2y + 4x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3y + 2x^2 - 3\right) = 2x^3. \quad \clubsuit$$

Iz prethodnog primjera vidimo da su mješoviti parcijalni izvodi drugog reda međusobno jednaki, tj. vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

Pokazuje se da to nije slučajnost, nego da vrijedi općenito, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 4.2 ***(Schwarzov[1] teorem)*** *Pretpostavimo da funkcija $f(x,y)$ ima parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke (x_0,y_0) i da su $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ neprekidne funkcije u tački (x_0,y_0). Tada je*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0).$$

[1] H.A. Schwarz, njemački matematičar, 1843-1921.

Uočimo, međutim, da su i parcijalni izvodi drugog reda funkcije f također funkcije varijabli x i y, pa svaki od njih može imati po dva parcijalna izvoda prvog reda, koje nazivamo parcijalnim izvodima trećeg reda funkcije f. Na primjer,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{xxy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx},$$

itd. Sličnim postupkom se dobijaju parcijalni izvodi funkcije f četvrtog i višeg reda.

Analogno Schwarzovom teoremu za mješovite parcijalne izvode prvog reda, vrijedi i općenita tvrdnja: dva mješovita parcijalna izvoda višeg reda date funkcije f su međusobno jednaka ako je u njima po jednak broj puta izvršeno deriviranje po jednoj, odnosno po drugoj varijabli, a pri tome nije bitan redoslijed deriviranja. Tako je

$$f_{xxyx} = f_{xxxy} = f_{yxxx} = f_{xyxx}.$$

Slično kao u slučaju parcijalnih izvoda, uočavamo da je prvi totalni diferencijal df funkcija od x i y i od diferencijala dx i dy. Budući da se naša razmatranja odnose samo na one funkcije koje imaju "dobre"osobine, smatrat ćemo da se može naći totalni diferencijal od df, koji zovemo drugim totalnim diferencijalom funkcije f i označavamo ga sa $d^2 f$. Pri tome je

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Zaista, primjenom definicije totalnog diferencijala prvog reda na sam diferencijal df, vodeći računa da se dx i dy smatraju konstantama, imamo

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(df) = \frac{\partial (df)}{\partial x} dx + \frac{\partial (df)}{\partial y} dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dy \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.
\end{aligned}$$

Napomenimo još da se analogno definiraju i parcijalni izvodi višeg reda funkcije više od dvije varijable.

$\circ \quad \circ \quad \circ$

Zadaci za samostalan rad

U zadacima 1-4 odrediti sve parcijalne izvode prvog reda date funkcije.

1. a) $f(x,y) = 2xy^4 + 3x^3y^2 + x^2 - 2$, b) $z = (2x-3y)^7$.

2. a) $f(x,y) = \dfrac{2x-3y}{x+2y^2}$, b) $z = \sqrt{y^2 - 2x^2}$.

3. a) $f(x,y) = x^2ye^{xy}$, b) $f(x,y) = x \ln xy$.

4. a) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{3-e^{xy}}$, b) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$.

5. U nekoj tvornici dnevni izlaz određenog proizvoda je $Q = 120K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ jedinica, gdje je K uloženi kapital koji se mjeri jedinicama od 1000\$, dok je L uloženi rad mjeren radnim satima. Trenutno uloženi kapital iznosi 400000\$ dnevno i uloženi rad je 1000 radnih sati dnevno. Koristeći totalni diferencijal funkcije Q, procijeniti promjenu u količini outputa koja će biti izazvana povećanjem uloženog kapitala za 500\$ i povećanjem uloženog rada za 4 radnih sati.

6. Dobit prodavca mješovitom robom od prodaje dva tipa osvježavajućeg pića je

$$D(x,y) = (x-30)(70-5x+4y) + (y-40)(80+6x-7y) \quad \text{(centi)},$$

gdje je x cijena po komadu prvog tipa pića, a y cijena po komadu drugog tipa pića. Trenutno se prvi tip pića prodaje po cijeni 50 centi po komadu, a drugi tip po 52 centa po komadu. Koristeći totalni diferencijal funkcije D, procijeniti promjenu dnevne dobiti koja će biti izazvana ako prodavač podigne cijenu prvog tipa pića za 1 cent po komadu, a cijenu drugog tipa pića poveća za 2 centa po komadu.

7. U nekoj tvornici ukupna količina proizvodnje neke robe je $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ jedinica, gdje K označava uloženi kapital, a L označava uloženi rad. Približno izračunati procentualnu promjenu u količini proizvodnje ako se uloženi kapital poveća za 1%, a uloženi rad poveća za 2%.

U zadacima 8-9, koristeći lančano pravilo, odrediti $\dfrac{dz}{dt}$.

8. $z = \dfrac{x+y}{x-y}; x = t^3 + 1, y = 1 - t^3.$

9. $z = xy^2; x = e^t, y = e^{-t}.$

U zadacima 10-11 odrediti nagib tangente na naznačenu nivo liniju $f(x,y) = C$ za specificirane vrijednosti od x i date funkcije $f(x,y)$.

10. $f(x,y) = x^2y - 3xy + 5; C = 9, x = 1.$

11. $f(x,y) = e^{2x} \ln \dfrac{y}{x}; C = e^2, x = 1.$

12. Koristeći x radnih sati vještih radnika i y radnih sati nevještih radnika, tvornica može da proizvede $f(x,y) = x^2y$ jedinica nekog artikla dnevno. Trenutno se koriste 16 radnih sati vještih radnika i 32 sata nevještih radnika, a planira se povećanje radnih sati vještih radnika za $\dfrac{1}{2}$ radnog sata. Procijeniti promjenu broja radnih sati nevještih radnika tako da proizvodnja ostane na istom nivou.

13. Pretpostavimo da je korisnost koju ostvari potrošač iz x jedinica jednog dobra i y jedinica drugog dobra data funkcijom korisnosti $U(x,y) = x^{\frac{3}{2}}y$. Potrošač trenutno posjeduje $x = 16$ jedinica prvog dobra i $y = 20$ jedinica drugog dobra. Procijeniti koliko je jedinica drugog dobra potrošač treba da zamijeni za 1 jedinicu prvog dobra, a da pri tome ne promijeni ukupnu korisnost.

U zadacima 14-16 izračunati sve parcijalne izvode drugog reda kao i totalni diferencijal drugog reda date funkcije.

14. a) $f(x,y) = 3x^3y^4 - 5x^2y,$ b) $f(x,y) = \dfrac{y+1}{x-1}.$

15. a) $f(x,y) = xye^{x^2y},$ b) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y\right).$

16. a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$ b) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{xy^2}.$

4.6 Lokalni ekstremi funkcija više varijabli

Iako ćemo uglavnom razmatrati funkcije dvije varijable, ipak ćemo osnovne pojmove i tvrdnje navesti u općem slučaju kad data funkcija ovisi o n $(n \geq 2)$ varijabli. U tu svrhu uvedimo sljedeće oznake: $X = (x_1, x_2, ..., x_n), A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, za tačke iz $\mathbb{R}^n$.

Definicija 4.2 *Neka je funkcija* $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *definirana u nekoj oblasti* $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Ako postoji neka okolina* $\mathcal{U}(A)$ *tačke* $A \in \mathcal{O}$ *takva da vrijedi*

$$f(X) < f(A) \text{ za sve tačke } X \in \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{O},$$

odnosno

$$f(X) > f(A) \text{ za sve tačke } X \in \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{O},$$

tada kažemo da funkcija f *u tački* A *ima* ***lokalni maksimum****, odnosno* ***lokalni minimum****.*

Kao i kod realnih funkcija jedne varijable, lokalni maksimum i lokalni minimum zvat ćemo lokalnim ekstremima.

Smatrat ćemo da funkcija f ima parcijalne izvode prvog i drugog reda po svim varijablama, te da vrijedi općenita tvrdnja analogna Schwarzovom teoremu za slučaj mješovitih parcijalnih izvoda. Prvo ćemo navesti potrebne uvjete za egzistenciju lokalnog ekstrema funkcije f više varijabli (što predstavlja višedimenzionalni analogon za odgovarajući teorem u slučaju funkcije jedne varijable, Teorem 3.9).

Teorem 4.3 *Ako u nekoj tački* $A \in \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ *funkcija* f *ima lokalni ekstrem, tada je*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0. \tag{4.11}$$

Tačku $A \in \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ koja zadovoljava uvjet (4.11) nazivamo *stacionarnom tačkom* funkcije f. Napomenimo da i ovdje stacionarna tačka, kao i kod funkcije jedne varijable, ne mora biti tačka lokalnog ekstrema. Dakle, nakon što odredimo stacionarnu tačku A rješavanjem sistema jednadžbi (4.11), treba ustanoviti i da li je ona tačka lokalnog ekstrema, a za to nam trebaju dovoljni uvjeti egzistencije lokalnog ekstrema.

Prvo uvedimo pojam *Hesseove matrice (Hessian)*[2] *za funkciju više varijabli* $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definicija 4.3 *Neka je*

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \quad (i, j \in \{1, 2, ..., n\}).$$

[2] L.O. Hesse, njemački matematičar, 1811-1874.

Matricu

$$H(X) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*nazivamo **Hesseovom matricom** ili **Hessianom** funkcije f u tački X.*

Primijetimo da je Hessian simetrična matrica jer vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$. Glavne minore Hessiana funkcije f u tački X označino sa:

$$\Delta_1(X) = a_{11}, \quad \Delta_2(X) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \quad \Delta_n(X) = \det H(X).$$

Dovoljni uvjeti egzistencije loaklnog ekstrema funkcije više varijabli iskazani su tzv. *Silvesterovim kriterijem.*

Teorem 4.4 ***(Silvesterov kriterij)*** *Neka je A stacionarna tačka funkcije $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Tada:*

1° *ako je $\Delta_1(A) > 0$, $\Delta_2(A) > 0, ...,$ $\Delta_n(A) > 0$, funkcija f ima lokalni minimum u tački A;*

2° *ako je $\Delta_1(A) < 0$, $\Delta_2(A) > 0, \Delta_3(A) < 0, ...,$ tj. ako glavni minori Hessiana funkcije f računati u tački A, naizmjenično mijenjaju znak, s tim da je $\Delta_1(A) < 0$, funkcija u tački A ima lokalni maksimum.*

Specijalno, za $n = 2$, ovaj se kriterij, uz dopunu, može iskazati na sljedeći način.

Teorem 4.5 *Neka je $X^* = (x^*, y^*)$ stacionarna tačka funkcije $f(x, y)$. Tada:*

1° *ako je $a_{11} > 0$ i $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, funkcija f ima lokalni minimum u tački X^*;*

2° *ako je $a_{11} < 0$ i $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, funkcija f ima lokalni maksimum u tački X^*;*

3° *ako je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, funkcija u tački X^* nema lokalnog ekstrema;*

4° *ako je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja da se odredi priroda stacionarne tačke.*

Slično, u slučaju $n = 3$, odgovarajući teorem ima sljedeću formulaciju.

Teorem 4.6 *Neka je $X^* = (x^*, y^*, z^*)$ stacionarna tačka funkcije $f(x, y, z)$. Tada:*

1° *ako je $\Delta_1(X^*) > 0$, $\Delta_2(X^*) > 0$, $\Delta_3(X^*) > 0$, funkcija f ima lokalni minimum u tački X^*;*

2° *ako je* $\Delta_1(X^*) < 0$, $\Delta_2(X^*) > 0, \Delta_3(X^*) < 0$, *funkcija* f *ima lokalni maksimum u tački* X^**;*

3° *ako je* $\Delta_1(X^*) = 0$, $\Delta_2(X^*) = 0$ *ili* $\Delta_3(X^*) = 0$, *potrebna su dodatna ispitivanja da se odredi priroda stacionarne tačke;*

4° *u ostalim slučajevima funkcija u tački* X^* *nema lokalnog ekstrema.*

Primjer 4.15 *Odrediti lokalne ekstreme funkcije* $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$.

Rješenje. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 6x,$$

stacionarne tačke date funkcije određujemo rješavanjem sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6y &= 0, \\ -3y^2 + 6x &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe imamo

$$y = -\frac{x^2}{2},$$

pa zamjenom u drugu jednadžbu, dobijemo

$$-\frac{3x^4}{4} + 6x = 0,$$

odnosno

$$x\left(x^3 - 8\right) = 0.$$

Jedina realna rješenja posljednje jednadžbe su $x = 0$ i $x = 2$, pošto je $x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$. Tako smo dobili dvije stacionarne tačke: $A(0,0)$ i $B(2,-2)$. Parcijalni izvodi drugog reda funkcije f su:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

Za tačku $A(0,0)$ je $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = 6, a_{22} = 0$, pa je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -36 < 0$, što znači da u tački $A(0,0)$ funkcija f nema lokalnog ekstrema.

S druge strane, za tačku $B(2,-2)$ imamo $a_{11} = 12 > 0, a_{12} = a_{21} = 6, a_{22} = 12$, pa je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 108 > 0$, što znači da funkcija f ima lokalni minimum u tački $B(2,-2)$ i vrijedi

$$f_{\min} = f(2,-2) = 2^3 - (-2)^3 + 6 \cdot 2 \cdot (-2) = -8. \quad \clubsuit$$

4.6.1 Primjeri primjene u ekonomiji

U sljedećim primjerima vidjet ćemo kako se može primijeniti teorija lokalnih ekstrema funkcija dvije i više varijabli u rješavanju problema optimizacije u ekonomiji. Naravno, u takvim se problemima traži apsolutni ekstrem, tako da ćemo ubuduće pretpostavljati da se apsolutni i lokalni maksimum (odnosno minimum) podudaraju.

Primjer 4.16 *Jedna trgovinska radnja u maloj ruralnoj zajednici ima na raspolaganju samo dva brenda smrznutog soka od narandže: lokalni brend koji se dobija po cijeni od* 30 *centi po komadu i dobro poznati nacionalni brend koji se dobija po cijeni od* 40 *centi po komadu. Trgovac procjenjuje da ako se lokalni brend prodaje za x centi po komadu, a nacionalni brend za y centi po komadu, onda će približno da se svakog dana prodaje* $70 - 5x + 4y$ *komada lokalnog brenda i* $80 + 6x - 7y$ *komada nacionalnog brenda. Po kojoj bi cijeni svaki od tih brendova trgovac trebao da prodaje kako bi imao maksimalnu dobit (u odnosu na sadašnje stanje)?*

Rješenje. Ovdje je očito ukupna dobit jednaka zbiru pojedinačnih dobiti za svaki brend. To znači da bi dnevna dobit od prodaje narandžinog soka bila predstavljena funkcijom

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y) \\ &= -5x^2-7y^2+10xy-20x+240y-5300. \end{aligned}$$

Stacionarne tačke ove funkcije određujemo iz sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} f_x &= -10x+10y-20=0, \\ f_y &= -14y+10x+240=0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} -x+y &= 2, \\ 5x-7y &= -120, \end{aligned}$$

odakle je $x = 53$ i $y = 55$. Dakle, $A(53,55)$ je jedina stacionarna tačka funkcije f. Parcijalni izvodi drugog reda funkcije f su

$$f_{xx} = -10, \quad f_{xy} = 10, \quad f_{yy} = -14,$$

tako da je $a_{11} = f_{xx} = -10 < 0$ i

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 40 > 0.$$

Dakle, funkcija f ima lokalni maksimum kada je $x = 53$ i $y = 55$, a to i jesu tražene cijene brendova kojima bi trgovac maksimizirao dnevnu dobit. ♣

Primjer 4.17 *Jedna monopolistička firma proizvodi tri artikla u količinama Q_1, Q_2 i Q_3, čije su cijene na tržištu, p_1, p_2 i p_3, date kao funkcije količine proizvodnje:*

$$p_1 = 63 - 4Q_1, \quad p_2 = 105 - 5Q_2, \quad p_3 = 75 - 6Q_3.$$

Ukupni troškovi proizvodnje sva tri artikla dati su sa

$$T = 10 + 15\left(Q_1 + Q_2 + Q_3\right) + \left(Q_1 + Q_2 + Q_3\right)^2.$$

Po kojim cijenama bi ta firma trebala da prodaje proizvodne artikle kako bi na tržištu imala maksimalnu ukupnu dobit?

Rješenje. Ukupni prihodi od prodaje svakog artikla pojedinačno su $P_1 = p_1 Q_1$, $P_2 = p_2 Q_2$ i $P_3 = p_3 Q_3$, tj.

$$P_1 = 63Q_1 - 4Q_1^2, \quad P_2 = 105Q_2 - 5Q_2^2, \quad P_3 = 75Q_3 - 6Q_3^2,$$

odnosno ukupni prihod od prodaje sva tri artikla je

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 63Q_1 - 4Q_1^2 + 105Q_2 - 5Q_2^2 + 75Q_3 - 6Q_3^2.$$

Funkcija ukupne dobiti za sva tri artikla je

$$\begin{aligned} D\left(Q_1, Q_2, Q_3\right) &= P - T \\ &= 48Q_1 + 90Q_2 + 60Q_3 - 5Q_1^2 - 6Q_2^2 - 7Q_3^2 \\ &\quad -2\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3\right) - 10. \end{aligned}$$

Koordinate stacionarnih tačaka ove funkcije su rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial Q_1} &= 48 - 10Q_1 - 2Q_2 - 2Q_3 = 0, \\ \frac{\partial D}{\partial Q_2} &= 90 - 12Q_2 - 2Q_1 - 2Q_3 = 0, \\ \frac{\partial D}{\partial Q_3} &= 60 - 14Q_3 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{aligned}$$

Primijenimo Cramerov metod. Imamo

$$\mathsf{D} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 194, \quad \mathsf{D}_1 = \begin{vmatrix} 24 & 1 & 1 \\ 45 & 6 & 1 \\ 30 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 564,$$

$$\mathsf{D}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 24 & 1 \\ 1 & 45 & 1 \\ 1 & 30 & 7 \end{vmatrix} = 1266, \quad \mathsf{D}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 24 \\ 1 & 6 & 45 \\ 1 & 1 & 30 \end{vmatrix} = 570,$$

pa su ravnotežne količine (koordinate stacionarne tačke funkcije $D(Q_1, Q_2, Q_3)$)

$$Q_1^* = \frac{282}{97}, Q_2^* = \frac{633}{97}, Q_3^* = \frac{285}{97}.$$

Odredimo sada parcijalne izvode drugog reda funkcije $D(Q_1, Q_2, Q_3)$:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial Q_1^2} = -10, \ \frac{\partial^2 D}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2, \ \frac{\partial^2 D}{\partial Q_1 \partial Q_3} = -2,$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial Q_2^2} = -12, \ \frac{\partial^2 D}{\partial Q_2 \partial Q_3} = -2, \ \frac{\partial^2 D}{\partial Q_3^2} = -14.$$

Odgovarajući Hessian u stacionarnoj tački je oblika

$$H = \begin{vmatrix} -10 & -2 & -2 \\ -2 & -12 & -2 \\ -2 & -2 & -14 \end{vmatrix},$$

a njegovi glavni minori su

$$\Delta_1 = -10 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -12 \end{vmatrix} = 116 > 0, \quad \Delta_3 = H = -1552 < 0.$$

Prema Silvesterovom kriteriju, funkcija $D(Q_1, Q_2, Q_3)$ ima lokalni (i apsolutni) maksimum u stacionarnoj tački (Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*) . Dakle, da bi maksimizirala ukupnu dobit, firma treba da prodaje svoje artikle po cijenama

$$p_1 = 63 - 4Q_1^* = \frac{4983}{97}, \ p_1 = 105 - 5Q_2^* = \frac{7020}{97}, \ p_3 = 75 - 6Q_3^* = \frac{5565}{97}. \quad \clubsuit$$

4.7 Vezani ekstrem funkcija dvije varijable

U ekonomskoj praksi se vrlo često susreću i problemi optimizacije uz određena ograničenja. Naime, određeni ekonomski resursi mogu biti ograničeni (budžet, materijal, sirovine i sl.) a da se pri tome traži optimizacija neke ekonomske veličine, kao npr. maksimizacija dobiti ili minimizacija troškova. To ustvari znači da treba maksimizirati ili minimizirati neku funkciju dvije ili više varijabli uz ograničenje na njene varijable predstavljeno jednom ili više jednakosti. Mi ćemo ovdje razmatrati najjednostavniju situaciju kada je u pitanju optimizacija funkcije dvije varijable $f(x, y)$ uz jedno dodatno ograničenje na njene varijable oblika

$$g(x, y) = 0. \tag{4.12}$$

Taj problem se razlikuje od prethodnog problema optimizacije bez ikakva ograničenja. Zbog ograničenja (4.12), odnosno veze između varijabli funkcije date sa (4.12), odgovarajući ekstrem zovemo *vezanim ekstremom*. Postoji standardni metod za rješavanje problema vezanog ekstrema koji se naziva *Lagrangeovim metodom multiplikatora*. No, u nekim jednostavnijim situacijama moguće je primijeniti jedan jednostavniji metod, tzv. *metod supstitucije (zamjene)*.

4.7.1 Metod supstitucije

Ovaj metod se primjenjuje u slučaju kad se iz (4.12) jedna varijabla može izraziti preko one druge, npr.

$$y = \varphi(x).$$

Tada izvršimo zamjenu te varijable u polaznoj funkciji. U ovom slučaju zamijenimo varijablu y u funkciji $f(x,y)$ i dobijamo funkciju

$$f(x, \varphi(x)) = F(x),$$

koja je funkcija jedne varijable čiji ekstrem znamo odrediti. Time smo problem iznalaženja vezanog ekstrema funkcije dvije varijable sveli na problem određivanja ekstrema funkcije jedne varijable. Taj ekstrem, ukoliko postoji, je jednak ekstremu funkcije $f(x,y)$ uz ograničenje (4.12).

Primjer 4.18 *Data je funkcija korisnosti* $U(Q_1, Q_2) = (2Q_1 + 10)(Q_2 - 5)$. *Ako je cijena jedinice prvog dobra* 10\$, *jedinice drugog dobra* 5\$, *a potrošač ima na raspolaganju* 1000\$, *naći kombinaciju prvog i drugog dobra za koju se uz maksimalno iskorištenje kapaciteta (novca) ostvaruje maksimalna korisnost.*

Rješenje. Uočavamo da imamo ograničenje budžeta u obliku

$$10Q_1 + 5Q_2 = 1000. \tag{4.13}$$

Dakle, uz ovo ograničenje treba maksimizirati datu funkciju korisnosti $U(Q_1, Q_2)$. Iz (4.13) slijedi

$$Q_2 = 200 - 2Q_1.$$

Uvrštavanjem u funkciju korisnosti, dobijamo

$$U = (2Q_1 + 10)(195 - 2Q_1) = -4Q_1^2 + 370Q_1 + 1950,$$

što je ustvari funkcija jedne varijable. Stacionarna tačka ove funkcije je rješenje jednadžbe

$$\frac{dU}{dQ_1} = -8Q_1 + 370 = 0,$$

tj. $Q_1^* = 46.25$. Maksimalna vrijednost funkcije korisnosti (zbog $\frac{d^2U}{dQ_1^2}(Q_1^*) = -8$) je

$$U_{\max} = -4 \cdot (46.25)^2 + 370 \cdot 46.25 + 1950 = 10506.25\ .$$

Ona se dostiže ako potrošač kupi $Q_1^* = 46.25$ jedinica prvog dobra i $Q_2^* = 107.5$ jedinica drugog dobra. Maksimalna vrijednost funkcije korisnosti može se dobiti i na sljedeći način

$$U_{\max} = U(Q_1^*, Q_2^*) = (2 \cdot 46.25 + 10)(107.5 - 5) = 10506.25\ . \quad \clubsuit$$

Primjer 4.19 *Date su funkcije ukupnih troškova i funkcije proizvodnje u ovisnosti o uloženom radu L i uloženom kapitalu K:*

$$T(L, K) = (L + K)^2 + 10, \quad Q(L, K) = K\sqrt{2L}.$$

Naći kombinaciju uloženog rada i uloženog kapitala uz koju se na nivou proizvodnje $Q = 8$ ostvaruju minimalni troškovi. Koliki su ti minimalni troškovi?

Rješenje. Treba, dakle, minimizirati funkciju ukupnih troškova T uz ograničenje

$$K\sqrt{2L} = 8.$$

Odavde je $L = \frac{32}{K^2}$, pa zamjenom u funkciji T, imamo

$$T = \left(\frac{32}{K^2} + K\right)^2 + 10.$$

Iz

$$\frac{dT}{dK} = 2\left(\frac{32}{K^2} + K\right)\left(-\frac{64}{K^3} + 1\right) = 0,$$

zbog pozitivnosti veličine K (u suprotnom zadatak ne bi imao ekonomskog smisla), slijedi da je $K = 4$. Kako je

$$\frac{d^2T}{dK^2} = 2\left(-\frac{64}{K^3} + 1\right)^2 + 2\left(\frac{32}{K^2} + K\right) \cdot \frac{192}{K^4},$$

vrijedi $\frac{d^2T(4)}{dK^2} = 12 \cdot \frac{192}{256} > 0$, pa zaista funkcija T ima minimum za $K = 4$ (i $L = 2$). Minimalni troškovi iznose

$$T_{\min} = T(2, 4) = (2 + 4)^2 + 10 = 46. \quad \clubsuit$$

4.7.2 Metod Lagrangeovih multiplikatora

Metod suspstitucije nije uvijek moguće uspješno primijeniti. Takve situacije se javljaju kada se iz ograničenja (4.12) ne može jednoznačno jedna varijabla predstaviti kao eksplicitna funkcija druge varijable ili kad imamo vezani ekstrem za funkcije više od dvije varijable. Zbog toga se mora pribjeći rješavanju problema vezanog ekstrema na neki drugi način. Vrlo efikasan metod u tom slučaju je *metod Lagrangeovih multiplikatora* (ili jednostavno *Lagrangeov*[3] *metod*). Taj je metod univerzalan i može se koristiti i u situacijama kada je moguće primijeniti i metod supstitucije. Istaknimo da je uloga Lagrangeovog multiplikatora s vrijednostima u stacionarnoj tački bitna u ekonomiji, jer se može posebno istaknuti tada njegov ekonomski smisao.

Dakle, promatrajmo ponovo funkciju $f(x,y)$ koju treba optimizirati (maksimizirati ili minimizirati) uz dodatni uvjet (4.12), tj.

$$g(x,y) = 0.$$

Prema definiciji totalnog diferencijala prvog reda funkcije dvije varijable, imamo

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \\ 0 &= dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy. \end{aligned}$$

Množenjem druge jednadžbe nekim (za sada neodređenim) realnim brojem λ, a zatim sabiranjem obiju jednadžbi, dobijamo

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy. \tag{4.14}$$

Da bismo odredili broj λ, zahtijevajmo da je u tački u kojoj se dostiže vezani ekstrem

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{4.15}$$

Ako je $M(x_0,y_0)$ tačka u kojoj se dostiže taj vezani ekstrem funkcije $f(x,y)$ uz ograničenje (4.12), tada prema teoremu o potrebnim uvjetima egzistencije lokalnog ekstrema vrijedi

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0) = 0,$$

odnosno $df(x_0,y_0) = 0$. Zbog toga i zbog (4.15), iz (4.14) slijedi da u tački $M(x_0,y_0)$ vrijedi jednakost

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0. \tag{4.16}$$

[3] Joseph-Louis Lagrange, francuski matematičar, 1736-1813.

Prema tome, da bismo odredili stacionarnu tačku $M(x_0, y_0)$ i realan broj $\lambda = \lambda_0$, neophodne su nam tri jednadžbe: (4.15),(4.14) i (4.12), tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 0, \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ideja Lagrangeovog metoda je da se formira pomoćna funkcija $F(x, y, \lambda)$ koja za stacionarnu tačku ima upravo tačku $M^*(x_0, y_0; \lambda_0)$, odnosno da su izrazi koji se pojavljuju na lijevim stranama triju jednakosti u (4.17) ustvari parcijalni izvodi funkcije F. Ta funkcija je oblika

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y). \tag{4.18}$$

Tako se jednadžbe iz sistema (4.17) mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Funkciju (4.18) nazivamo *Lagrangeovom funkcijom*, a realan broj λ, koji je varijabla funkcije F, nazivamo *Lagrangeovim multiplikatorom (množiteljem)* funkcije $f(x, y)$. Na ovaj se način određivanje vezanih ekstrema funkcije $f(x, y)$ uz ograničenje (4.12) svodi na određivanje (običnih) lokalnih ekstrema bez ograničenja funkcije tri varijable $F(x, y, \lambda)$, budući da obje stacionarne tačke $M^*(x_0, y_0; \lambda_0)$ i $M(x_0, y_0)$ su iste prirode.

Ipak, pozabavimo se ispitivanjem pod kojim uvjetima je stacionarna tačka $M^*(x_0, y_0; \lambda_0)$ tačka vezanog ekstrema. U tu svrhu neophodno nam je ispitati znak drugog diferencijala Lagrangeove funkcije. Naime, ako je $d^2F(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$, tada je stacionarna tačka M^* tačka lokalnog maksimuma funkcije F, odnosno stacionarna tačka M je tačka vezanog maksimuma funkcije f, a ako je, međutim, $d^2F(x_0, y_0; \lambda_0) > 0$, tada je stacionarna tačka M^* tačka lokalnog minimuma funkcije F, odnosno stacionarna tačka M je tačka vezanog minimuma funkcije f. Ako je, pak, $d^2F(x_0, y_0; \lambda_0) = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja da se utvrdi da li je stacionarna tačka ujedno i tačka vezanog ekstrema.

Pokazuje se da se $d^2F(x, y; \lambda)$ može predstaviti pomoću determinante

$$d^2F(x, y; \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

(koja se odnosi na matricu koja je poznata kao prošireni Hessian funkcije F), što nam omogućava jednostavnije ispitivanje prirode stacionarne tačke.

Primjer 4.20 ***(Raspodjela sredstava)*** *Jedan urednik je dodijelio* 60000$ *da se utroši na pripremu i promociju nove knjige. Procjenjuje se da ako je x hiljada dolara dodijeljeno za pripremu, a y hiljada dolara dodijeljeno za promociju, približno će $f(x, y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$ kopija knjige biti rasprodano. Koliko bi novca trebao urednik izdvojiti na pripremu, a koliko na promociju da bi maksimizirao prodaju?*

Rješenje. Cilj nam je, dakle, maksimizirati funkciju $f(x, y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$ uz ograničenje

$$g(x, y) = x + y - 60 = 0.$$

Iako se ovaj problem može jednostavnije riješiti metodom supstitucije, ipak ćemo na njemu ilustrirati Lagrangeov metod, a čitatelju ostavljamo da primijeni metod supstitucije i da napravi komparaciju između ova dva metoda. Formirajmo Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y; \lambda) = 20x^{\frac{3}{2}}y + \lambda(x + y - 60).$$

Odredimo stacionarne tačke ove funkcije rješavanjem sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 30x^{\frac{1}{2}}y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 20x^{\frac{3}{2}} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x + y - 60 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi

$$30x^{\frac{1}{2}}y = 20x^{\frac{3}{2}},$$

odakle je

$$y = \frac{2}{3}x.$$

Zamjenom ovog izraza u trećoj jednadžbi, dobijamo

$$x + \frac{2}{3}x = 60,$$

odnosno $x = 36$, pa je $y = 24$ i $\lambda = -4320$. Prema tome, stacionarna tačka funkcije $F(x, y; \lambda)$ je $M^*(36, 24; -4320)$. Ispitajmo da li je ona tačka ekstrema. Kako je

$$g_x = 1, g_y = 1, F_{xx} = 15x^{-\frac{1}{2}}y, F_{xy} = 30x^{\frac{1}{2}}, F_{yy} = 0,$$

odnosno

$$g_x(M^*) = 1, g_y(M^*) = 1, F_{xx}(M^*) = 60, F_{xy}(M^*) = 180, F_{yy}(M^*) = 0,$$

imamo, prema (4.20),

$$d^2F(x, y; \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 60 & 180 \\ 1 & 180 & 0 \end{vmatrix} = -300 < 0.$$

Dakle, stacionarna tačka $M(36, 24)$ je tačka maksimuma funkcije $f(x, y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$, uz ograničenje $g(x, y) = x + y - 60 = 0$. To znači, da bi maksimizirao prodaju urednik treba da izdvoji 36000\$ za pripremu i 24000\$ za promociju knjige. Maksimalna prodaja bi bila

$$f_{\max} = f(36, 24) = 20(36)^{\frac{3}{2}} \cdot 24 = 103680$$

kopija nove knjige.

Uočimo da se linija ograničenja $x + y - 60 = 0$ i nivo linija $f(x, y) = 20x^{\frac{3}{2}}y = 103680$ dodiruju u stacionarnoj tački $M(36, 24)$. ♣

Interpretacija Lagrangeova multiplikatora

Napomenuli smo da Lagrangeov multiplikator računat u stacionarnoj tački neke ekonomske funkcije često ima određenu ekonomsku interpretaciju. Naime, pretpostavimo da se ograničenje (4.12) može napisati u obliku

$$g(x, y) = c - h(x, y) = 0.$$

Ako pretpostavimo da je Jakobijan funkcije F ne iščezava u optimalnom stanju, tj. da je različit od nule u stacionarnoj tački $M^*(x_0, y_0; \lambda_0)$, tada se x_0, y_0 i λ_0 mogu izraziti kao funkcije od c (slijedi iz teorema implicitne funkcije, kojeg zbog kompliciranosti izostavljamo) koje će sve imati neprekidne izvode. Zbog toga imamo sljedeće identitete

$$\begin{aligned} & c - h(x_0, y_0) = 0, \\ & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Označimo li sa F^* optimalnu vrijednost funkcije F, onda ona ovisi o x_0, y_0 i λ_0 i vrijedi

$$F^* = f(x_0, y_0) + \lambda_0 [c - h(x_0, y_0)], \tag{4.22}$$

odnosno F^* je funkcija samo od c. Koristeći se lančanim pravilom, iz (4.22) imamo

$$\begin{aligned} \frac{dF^*}{dc} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx_0}{dc} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy_0}{dc} + \frac{d\lambda_0}{dc}[c - h(x_0, y_0)] + \lambda_0 \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx_0}{dc} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy_0}{dc}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_0 \frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{dx_0}{dc} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda_0 \frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{dy_0}{dc} + [c - h(x_0, y_0)]\frac{d\lambda_0}{dc} + \lambda_0, \end{aligned}$$

pri čemu se svi parcijalni izvodi računaju u stacionarnoj tački. Imajući na umu (4.21), prva tri člana zbira na desnoj strani posljednje jednakosti se anuliraju, tako da ostaje

$$\lambda_0 = \frac{dF^*}{dc}.$$

Iz ovog slijedi da *vrijednost Lagrangeovog multiplikatora u stacionarnoj tački predstavlja brzinu promjene optimalne vrijednosti funkcije cilja u odnosu na parametar* c.

Napomena 4.1 *Pri interpretaciji Lagrangeovog multiplikatora moramo biti oprezni. Naime, Lagrangeovu funkciju moramo pisati u obliku (4.22), što znači da se drugi član* ***ne smije*** *pisati u obliku* $\lambda_0 [h(x_0, y_0) - c]$.

Primjer 4.21 *Pretpostavimo da je urednik u Primjeru 4.20 dodijelio* 60200\$, *umjesto* 60000\$, *kako bi izvršio pripremu i promociju nove knjige. Procijeniti za koliko će dodatnih* 200\$ *utjecati na maksimalnu prodaju knjige.*

Rješenje. U Primjeru 4.20 smo dobili stacionarnu tačku (vodeći računa o prethodnoj napomeni)

$$M^*(x_0, y_0; \lambda_0) = M^*(36, 24; 4320),$$

kao i maksimalnu vrijednost $F^* = 103680$ funkcije f prodaje nove knjige. Ovdje treba da procijenimo promjenu $\Delta\ F^*$ u maksimalnoj prodaji nove knjige koja će biti posljedica promjene rasta od $\Delta c = 0.2$ (hiljade dolara) u odgovarajućem fondu. Kako je

$$\lambda_0 = \frac{dF^*}{dc},$$

onda, kao što znamo od ranije za funkcije jedne varijable, vrijedi

$$\Delta F^* \simeq \frac{dF^*}{dc}\Delta c = \lambda_0 \Delta c = 4320 \cdot 0.2 = 864.$$

Dakle, maksimalna prodaja nove knjige će se povećati približno za 864 kopija nove knjige ako se budžet za pripremu i promocije knjige poveća sa 60000\$ na 60200\$ i novac bude raspoređen optimalno. ♣

4.7.3 Optimizacija proizvodnje uz ograničenje budžeta

Imali smo prilike vidjeti proizvodnu funkciju u obliku Cobb-Douglasove funkcije korisnosti. No, postavlja se pitanje: pod kojim uvjetima proizvoljna funkcija $Q = Q(K, L)$ može biti funkcija proizvodnje? Da bismo dobili odgovor na ovo pitanje moramo na ovu funkciju nametnuti zahtjev da se ona može maksimizirati uz ograničenje budžeta. Naime, ako je p_L cijena jedne jedinice uloženog rada L, a p_K vrijednost jedne jedinice uloženog kapitala, pri ograničenom budžetu proizvodne firme u iznosu od c novčanih jedinica, tj. ako je

$$p_K K + p_L L = c, \tag{4.23}$$

treba maksimizirati funkciju proizvodnje $Q = Q(K, L)$. Ako se funkcija ne može maksimizirati, onda ona nema ekonomskog smisla i ne može biti funkcija proizvodnje (niti funkcija korisnosti).

Lagrangeova funkcija u ovom slučaju ima oblik

$$F(K, L; \lambda) = Q(K, L) + \lambda (c - p_K K - p_L L), \tag{4.24}$$

a jednadžbe (4.19) su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial K} &= \frac{\partial Q}{\partial K} - \lambda p_K = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial L} &= \frac{\partial Q}{\partial L} - \lambda p_L = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= c - p_K K - p_L L = 0.
\end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobijamo

$$\lambda = \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}}{p_K} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{p_L},$$

odakle je

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial K}}{\frac{\partial Q}{\partial L}} = \frac{p_K}{p_L}. \tag{4.25}$$

Prema tome, optimalna kombinacija količine uloženog kapitala i uloženog rada je data sa (4.23) i (4.25). Preostaje jedino još da zahtijevamo da dobijena stacionarna tačka jeste tačka maksimuma funkcije $Q = Q(K, L)$, a to znači da zahtijevamo da je u stacionarnoj tački

$$d^2F(K, L; \lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_K & g_L \\ g_K & F_{KK} & F_{KL} \\ g_L & F_{KL} & F_{LL} \end{vmatrix} < 0.$$

Kako je

$$g_K = \frac{\partial}{\partial K}(c - p_K K - p_L L) = -p_K, \quad g_L = \frac{\partial}{\partial L}(c - p_K K - p_L L) = -p_L,$$

$$F_{KK} = Q_{KK},\ F_{KL} = Q_{KL},\ F_{LL} = Q,$$

imamo

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_K & -p_L \\ -p_K & Q_{KK} & Q_{KL} \\ -p_L & Q_{KL} & Q_{LL} \end{vmatrix} > 0,$$

odnosno

$$2p_K p_L Q_{KL} - p_K^2 Q_{LL} - p_L^2 Q_{KK} = -p_K^2 \left[Q_{LL} - 2\left(\frac{p_L}{p_K}\right) Q_{KL} + \left(\frac{p_L}{p_K}\right)^2 Q_{KK} \right] > 0.$$

Budući da je u pitanju kvadratna nejednadžba u odnosu na izraz $\frac{p_L}{p_K}$, ona će biti zadovoljena za svaki količnik $\frac{p_L}{p_K}$ ako je diskriminanta odgovarajuće kvadratne funkcije negativna, odnosno ako je

$$Q_{KK} Q_{LL} > Q_{KL}^2. \tag{4.26}$$

Prema tome, *proizvoljna funkcija* $Q = Q(K, L)$ *može biti funkcija proizvodnje samo ako zadovoljava uvjet (4.26).*

Jednostavno se pokazuje da Cobb-Douglasova funkcija zadovoljava uvjet (4.26) (v. zadatke za samostalan rad).

Napomena 4.2 *Napomenimo da Lagrangeov multiplikator u funkciji proizvodnje,* $\lambda = \dfrac{dF}{dc}$*, ovdje označava tzv.* ***graničnu (marginalnu) produktivnost novca****, odnosno označava koliko povećanje budžeta za jednu novčanu jedinicu utiče na promjenu maksimalnog nivoa proizvodnje, uz pretpostavku da se cijene uloženog kapitala i uloženog rada ne mijenjaju.*

Primjer 4.22 *Pokazati da funkcija* $Q\left(K,L\right) = 5K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$ *predstavlja funkciju proizvodnje. Ako je cijena jedne jedinice uloženog kapitala* 20\$*, a cijena jedne jedinice uloženog rada* 25\$*, odrediti graničnu produktivnost novca pri budžetu od* 3000\$*.*

Rješenje. Provjerimo prvo da li data funkcija zadovoljava uvjet (4.26). Imamo

$$Q_K = \frac{5}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}, \quad Q_L = \frac{5}{4}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{4}},$$

pa je

$$Q_{KK} = -\frac{5}{4}K^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{4}}, \quad Q_{KL} = \frac{5}{8}K^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{4}}, \quad Q_{LL} = -\frac{15}{16}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{7}{4}}.$$

Dakle,

$$Q_{KK}Q_{LL} = \frac{75}{64}K^{-1}L^{-\frac{3}{2}} \quad \text{i} \quad Q_{KL}^2 = \frac{25}{64}K^{-1}L^{-\frac{3}{2}},$$

što znači da je uvjet (4.26) zadovoljen i da je data funkcija zaista funkcija proizvodnje.

Uz ograničenje budžeta oblika

$$20K + 25L = 3000, \tag{4.27}$$

možemo formirati odgovarajuću Lagrangeovu funkciju

$$F\left(K,L;\lambda\right) = 5K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}} + \lambda\left(3000 - 20K - 25L\right).$$

Stacionarnu tačku određujemo iz sistema jednadžbi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial K} &= \frac{5}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}} - 20\lambda = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial L} &= \frac{5}{4}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{4}} - 25\lambda = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 3000 - 20K - 25L = 0.
\end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobijamo

$$\lambda = \frac{1}{8}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{20}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{4}},$$

odakle slijedi $L = \dfrac{2}{5}K$. Zamjenom u jednakosti (4.27), imamo da je $K = 100$ i $L = 40$. Na osnovu svega ovoga zaključujemo da je granična vrijednost novca pri budžetu 3000\$ jednaka Lagrangeovom multiplikatoru računatom u stacionarnoj tački, tj. za $K = 100$ i $L = 40$ i iznosi

$$\frac{dF}{dc} = \lambda = \frac{1}{8}100^{-\frac{1}{2}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{40}}{80} \simeq 0.0314 \ . \qquad \clubsuit$$

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

U zadacima 1-4 odrediti lokalne ekstreme zadane funkcije.

1. a) $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$, b) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$.

2. a) $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$, b) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$.

3. a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$, b) $f(x,y) = (x-4)\ln(xy)$.

4. a) $f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$, b) $f(x,y) = x^3 - 4xy + y^3$.

5. Jedna monopolistička firma proizvodi tri artikla u količinama Q_1, Q_2 i Q_3, čije su cijene na tržištu, p_1, p_2 i p_3, date kao funkcije količine proizvodnje:

$$p_1 = 63 - 4Q_1, \quad p_2 = 105 - 5Q_2, \quad p_3 = 75 - 6Q_3.$$

Ukupni troškovi proizvodnje sva tri artikla dati su sa

$$T = 10 + 15\left(Q_1 + Q_2 + Q_3\right).$$

Po kojim cijenama bi ta firma trebala da prodaje proizvodne artikle kako bi na tržištu imala maksimalnu ukupnu dobit?

6. Jedna telefonska kompanija planira da uvede dva nova tipa izvršnih komunikacionih sistema i nada se da će ih prodati velikom broju komercijalnih kupaca. Procijenjeno je da ako se prvi tip sistema cijeni x stotina dolara po sistemu, a drugi tip sistema y stotina dolara po sistemu, onda će približno $40 - 8x + 5y$ kupaca kupiti prvi tip sistema, a drugi tip sistema će kupiti približno $50 + 9x - 7y$ kupaca. Ako je tvornička cijena prvog tipa 1000\$ po sistemu, a tvornička cijena drugog tipa 3000\$ po sistemu, kolika bi telefonska kompanija trebala imati cijene svakog od tih tipova sistema da bi ostvarila najveću moguću dobit?

7. Odrediti ekstreme funkcije $f(x,y) = xy$ uz ograničenje $x + y = 1$.

8. Odrediti ekstreme funkcije $f(x,y) = xy$ uz ograničenje $x^2 + y^2 = 1$.

9. Odrediti minimalnu vrijednost funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ uz ograničenje $xy = 1$.

10. Odrediti ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2+2y^2-xy$ uz ograničenje $2x+y = 22$.

11. Odrediti ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$ uz ograničenje $x^2 + y^2 = 4$.

12. Data je funkcija korisnosti $U(Q_1, Q_2) = (Q_1 + 2)(Q_2 + 1)$. Ako je cijena jedinice prvog dobra 5\$, jedinice drugog dobra 10\$, a potrošač ima na raspolaganju 500\$, naći kombinaciju prvog i drugog dobra za koju se uz maksimalno iskorištenje kapaciteta ostvaruje maksimalna korisnost.

13. Pokazati da Cobb-Douglasova funkcija jeste funkcija proizvodnje, tj. zadovoljava uvjet (4.26).

14. Ako je x hiljada dolara uloženo u rad i ako je y hiljada dolara uloženo u opremu, ukupna proizvodnja nekog artikla u određenoj tvornici će biti $Q(x,y) = 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ jedinica. Ako je na raspolaganju budžet od 120000\$, koliko bi trebalo uložiti u rad, a koliko u opremu da bi se postigla najveća moguća proizvodnja?

15. U prethodnom zadatku procijeniti kako će dodatnih 1000\$ ulaganja u rad i opremu utjecati na maksimalnu proizvodnju.

16. Neka tvornica je dodijelia 8000\$ da se utroši na izradu i promociju novog proizvoda. Procjenjuje se da ako je x hiljada dolara dodijeljeno za izradu, a y hiljada dolara dodijeljeno za promociju, približno će $f(x,y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$ jedinica tog proizvoda biti rasprodano. Koliko bi novca trebala tvornica izdvojiti na izradu, a koliko na promociju da bi se maksimizirala prodaja tog proizvoda?

4.8 Primjena u ekonomiji

Slično kao i u slučaju primjene diferencijalnog računa funkcije jedne varijable, velika je primjena i diferencijalnog računa funkcija dvije i više varijabli u ekonomiji. Naravno da će prvo biti riječi o graničnim (marginalnim) funkcijama, a nakon toga i o tzv. parcijalnoj elastičnosti.

4.8.1 Granične (marginalne) funkcije

U slučaju funkcije jedne varijable vidjeli smo da njen izvod, kojeg smo zvali graničnom funkcije date funkcije, predstavlja brzinu promjene te funkcije u odnosu na promjenu njene varijable. Slično se razmatranje može izvesti i u slučaju funkcije više varijabli, no mi ćemo se ovdje ograničiti na funkcije dvije varijable. Ukoliko fiksiramo jednu varijablu (tj. njena vrijednost ostaje na istom nivou) i promatramo kako se mijenja (kojom brzinom) funkcija u odnosu na promjenu druge varijable, vidimo da upravo brzina te promjene je ustvari parcijalni izvod funkcije u odnosu na varijablu koja se mijenja, a kojeg ćemo onda zvati *graničnom funkcijom date funkcije u odnosu na tu varijablu.* To su općeniti nazivi, prema kojima je za funkciju $f(x,y)$:

$$Gf_{/x} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ granična funkcija funkcije } f \text{ u odnosu na varijablu } x,$$
$$Gf_{/y} = \frac{\partial f}{\partial y} \text{ granična funkcija funkcije } f \text{ u odnosu na varijablu } y.$$

Međutim, kod određenih ekonomskih funkcija ti će nazivi imati i svoje specifičnosti.

Razmotrimo prvo funkciju proizvodnje $Q(K,L)$. Parcijalni izvod $\dfrac{\partial Q}{\partial K} = Q_K$ označava brzinu promjene proizvodnje u odnosu na male promjene kapitala, dok je istovremeno uloženi rad konstantan, i zato taj parcijalni izvod nazivamo *funkcijom granične fizičke produktivnosti kapitala* (ili samo *granična produktivnost kapitala*). S druge strane, parcijalni izvod $\dfrac{\partial Q}{\partial L} = Q_L$ označava brzinu promjene proizvodnje u odnosu na male promjene uloženog rada, uz konstantno ulaganje kapitala, i taj parcijalni izvod nazivamo *funkcijom granične fizičke produktivnosti rada* (ili samo *granična produktivnost rada*). Specijalno, ako je funkcija proizvodnje data u obliku Cobb-Douglasove funkcije $Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, granična produktivnost kapitala i granična produktivnost rada su (redom):

i) $Q_K = \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha\dfrac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = \alpha\dfrac{Q}{K}$,

ii) $Q_L = \dfrac{\partial Q}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)\dfrac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = (1-\alpha)\dfrac{Q}{L}$.

Primjer 4.23 *Odrediti graničnu produktivost kapitala i graničnu produktivnost rada u slučaju funkcije proizvodnje* $Q(K,L) = 50K^{0.25}L^{0.75}$ *na nivou uloženog kapitala od* 625 *jedinica i uloženog rada od* 16 *jedinica.*

Rješenje. Primijetimo da je data funkcija proizvodnje ustvari Cobb-Douglasova funkcija kod koje je $\alpha = \frac{1}{4}$. Prema već izvedenim formulama, imamo da je:
i) granična produktivnost kapitala

$$\begin{aligned} Q_K &= \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q(625,16)}{625} = \frac{1}{4} \cdot \frac{50 \cdot 625^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}}{625} \\ &= \frac{\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}}{50} = \frac{40}{50} = 0.80; \end{aligned}$$

ii) granična produktivnost rada

$$Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q(625,16)}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{50 \cdot 625^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}}{16} = \frac{375}{4} = 93.75\ . \quad \clubsuit$$

Slična razmatranja se mogu izvesti i za neke druge ekonomske funkcije dvije varijable.

Primjer 4.24 *Poznata je funkcija prosječnih troškova proizvodnje dva artikla u nekoj tvornici u obliku*

$$\overline{T}(Q_1,Q_2) = 100 + 2Q_1Q_2 + 3Q_1 + \frac{5Q_2}{Q_1+Q_2}.$$

Odrediti granične troškove u odnosu na Q_1 *i* Q_2 *na nivou proizvodnje* $Q_1 = 5$ *i* $Q_2 = 8$ *jedinica. Ekonomski interpretirati dobijene rezultate.*

Rješenje. Odredimo prvo funkciju ukupnih troškova:

$$\begin{aligned} T(Q_1,Q_2) &= \overline{T}(Q_1,Q_2)(Q_1+Q_2) \\ &= \left(100 + 2Q_1Q_2 + 3Q_1 + \frac{5Q_2}{Q_1+Q_2}\right)(Q_1+Q_2) \\ &= (100 + 2Q_1Q_2 + 3Q_1)(Q_1+Q_2) + 5Q_2 \\ &= 2Q_1^2Q_2 + 2Q_1Q_2^2 + 3Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 100Q_1 + 105Q_2. \end{aligned}$$

Granični trošak, općenito na proizvoljnom nivou proizvodnje, u odnosu na varijablu Q_1 je

$$GT_{/Q_1} = \frac{\partial T}{\partial Q_1} = 4Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 6Q_1 + 3Q_2 + 100,$$

odnosno za dati nivo proizvodnje

$$GT_{/Q_1}(5,8) = 442.$$

S druge strane, granični trošak, općenito na proizvoljnom nivou proizvodnje, u odnosu na varijablu Q_2 je

$$GT_{/Q_2} = \frac{\partial T}{\partial Q_2} = 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 3Q_1 + 105,$$

a za dati nivo proizvodnje je

$$GT_{/Q_2}(5,8) = 330.$$

Ekonomska interpretacija dobijenih rezultata: na nivou proizvodnje $Q_1 = 5$ i $Q_2 = 8$ jedinica, za dodatnu proizvodnju jedne jedinice prvog artikla ukupni troškovi se povećavaju za 442 novčane jedinice, a za dodatnu proizvodnju jedne jedinice drugog artikla ukupni troškovi se uvećavaju za 330 novčanih jedinica. ♣

4.8.2 Parcijalna elastičnost

Za funkciju $y = f(x)$ jedne varijable definirali smo koeficijent elastičnosti

$$E_{y,x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

i on nam je bio pokazatelj za koliko procenata se funkcija y promijeni kad se varijabla x poveća za 1%. Analogno i u slučaju funkcije više varijabli $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ možemo razmatrati sličan proces, tj. za koliko se procenata promijeni funkcija f kad se jedna njena varijabla poveća za 1%, a pri tome sve ostale varijable su konstantne. Ako je u pitanju varijabla x_i za neko $i \in \{1, 2, ..., n\}$, onda se veličina odgovarajuće procentualne promjene funkcije f naziva *parcijalnim koeficijentom elastičnosti u odnosu na* x_i i označavamo ga sa

$$E_{f,x_i} = \frac{x_i}{f}\frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{4.28}$$

Primjer 4.25 *Data je funkcija potražnje dobra A*

$$Q_A(p_A, p_B) = 120 - 10p_A^2 + 15p_B$$

kao funkcija cijena dobara A i B. Izračunati koeficijente parcijalne elastičnosti na nivou cijena $p_A = 20$ *i* $p_B = 12$. *Dati ekonomsku interpretaciju dobijenih rezultata.*

Rješenje. Prema (4.28) imamo

$$E_{Q_A,p_A} = \frac{p_A}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial p_A} = \frac{p_A}{120-10p_A^2+15p_B}\left(-20p_A\right) = -\frac{20p_A^2}{120-10p_A^2+15p_B},$$

pa je taj koeficijent elstičnosti na nivou $p_A = 20$ i $p_B = 12$:

$$E_{Q_A,p_A}\left(20,12\right) = -\frac{20\cdot 20^2}{120-10\cdot 20^2+15\cdot 12} \simeq 2.16\ .$$

Analogno, zbog

$$E_{Q_A,p_B} = \frac{p_B}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} = \frac{p_B}{120-10p_A^2+15p_B}\cdot 15 = \frac{15p_B}{120-10p_A^2+15p_B},$$

imamo

$$E_{Q_A,p_B}\left(20,12\right) = -\frac{15\cdot 12}{120-10\cdot 20^2+15\cdot 12} \simeq 0.049\ .$$

Ekonomska interpretacija dobijenih rezultata:

i) ako se cijena dobra A poveća za 1% (na nivou cijena $p_A = 20$ i $p_B = 12$), a cijena dobra B ostane nepromijenjena, tada će se potražnja za dobrom A povećati za 2.16%;

ii) ako se cijena dobra B poveća za 1% (na nivou cijena $p_A = 20$ i $p_B = 12$), a cijena dobra A ostane nepromijenjena, tada će se potražnja za dobrom A povećati za 0.049%. ♣

Homogene funkcije

Homogene funkcije, posebno one ekonomske, imaju interesantne osobine s ekonomskog aspekta i zbog toga ćemo njima posvetiti posebnu pažnju.

Definicija 4.4 *Za funkciju $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ kažemo da je* ***homogena funkcija*** *stepena homogenosti α ako vrijedi*

$$f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) = \lambda^{\alpha} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}.$$

Primjer 4.26 *Pokazati da su sljedeće funkcije homogene i odrediti stepen homogenosti za svaku od njih:*

a) $Q_s\left(p_1,p_2\right) = p_1^2\cdot\frac{2p_1-p_2}{p_1+p_2}+\frac{p_1^3}{p_2},$ *b)* $Q_d(p_1,p_2) = 4p_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p_1^{\frac{1}{3}}-p_1p_2^{-\frac{2}{3}}}{p_1}\right).$

Rješenje. Koristeći definiciju homogene funkcije, imamo:

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad Q_s(\lambda p_1, \lambda p_2) &= (\lambda p_1)^2 \cdot \frac{2(\lambda p_1) - (\lambda p_2)}{\lambda p_1 + \lambda p_2} + \frac{(\lambda p_1)^3}{\lambda p_2} \\
&= \lambda^2 p_1^2 \cdot \frac{\lambda(2p_1 - p_2)}{\lambda(p_1 + p_2)} + \frac{\lambda^3 p_1^3}{\lambda p_2} = \lambda^2 p_1^2 \cdot \frac{2p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{\lambda^2 p_1^3}{p_2} \\
&= \lambda^2 Q_s(\lambda p_1, \lambda p_2),
\end{aligned}
$$

tj. funkcija je homogena stepena homogenosti $\alpha = 2$.

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad Q_d(\lambda p_1, \lambda p_2) &= 4(\lambda p_1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(\lambda p_1)^{\frac{1}{3}} - \lambda p_1 (\lambda p_2)^{-\frac{2}{3}}}{\lambda p_1} \right) \\
&= 4\lambda^{\frac{1}{2}} p_1^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda^{\frac{1}{3}} \left(p_1^{\frac{1}{3}} - p_1 p_2^{-\frac{2}{3}} \right)}{\lambda p_1} = 4\lambda^{-\frac{1}{6}} p_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p_1^{\frac{1}{3}} - p_1 p_2^{-\frac{2}{3}}}{p_1} \right) \\
&= \lambda^{-\frac{1}{6}} Q_d(\lambda p_1, \lambda p_2),
\end{aligned}
$$

te je i ova funkcija homogena stepena homogenosti $\alpha = -\dfrac{1}{6}$. ♣

Primjer 4.27 *Data je homogena funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ stepena homogenosti α. Izračunati za koliko se procenata promijeni vrijednost funkcije f ako se sve njene varijable istovremeno povećaju (ili smanje) za isti procenat $p\%$. Specijalno, uraditi to za funkciju proizvodnje $Q(K, L) = 4L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}}$ u slučaju istovremenog povećanja i uloženog rada i uloženog kapitala za 20%.*

Rješenje. Istovremeno povećanje svih varijabli funkcije f znači da treba izračunati novu vrijednost te funkcije upravo na nivou novih vrijednosti varijabli. Pretpostavimo da se sve varijable funkcije f povećaju za isti procenat $p\%$. Tada je

$$\lambda = 1 + \frac{p}{100},$$

te zbog homogenosti funkcije f imamo da je

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

pa je

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{f} &= \frac{f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{f(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ &= \frac{\lambda^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{f(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ &= \frac{(\lambda^\alpha - 1) f(x_1, x_2, ..., x_n)}{f(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ &= \lambda^\alpha - 1.\end{aligned}$$

Povećanje vrijednosti funkcije u procentima iznosi

$$\frac{\Delta f}{f} \cdot 100\% = 100 (\lambda^\alpha - 1) \%.$$

U slučaju smanjenja svih varijabli istovremeno za $p\%$, imali bismo smanjenje vrijednosti funkcije za $100(\lambda^\alpha - 1)\%$, samo što je sada

$$\lambda = 1 - \frac{p}{100}.$$

Pokažimo da je funkcija $Q(K, L) = 4K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$ homogena. Zaista,

$$Q(\lambda K, \lambda L) = 4(\lambda K)^{\frac{1}{2}} (\lambda L)^{\frac{1}{3}} = 4\lambda^{\frac{5}{6}} K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} = \lambda^{\frac{5}{6}} Q(K, L)$$

i stepen njene homogenosti je $\alpha = \frac{5}{6}$. Osim toga, povećanje obje varijable je za $\lambda = 1.2$ puta, pa prema već dobijenom općenitom rezultatu, imamo da će se vrijednost funkcije proizvodnje u tom slučaju povećati za

$$100\left(1.2^{\frac{5}{6}} - 1\right)\% = 1,16\%. \quad \clubsuit$$

Eulerov teorem

Ako je funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ homogena realna funkcija n realnih varijabli, tada ona ima vrlo ineteresantnu osobinu koja se iskazuje Eulerovim teoremom, a koji je posebno važan kad je iskazan u terminima elastičnosti. Eulerov teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 4.7 ***(Eulerov teorem)***[4] *Pretpostavimo da je funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ homogena funkcija stepena homogenosti α. Tada vrijedi*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{4.29}$$

[4] L. Euler, švicarski matematičar, 1707-1783.

tj. zbir proizvoda svake varijable x_i $(i \in \{1,2,...,n\})$ funkcije f s parcijalnim izvodom funkcije po toj varijabli jednak je proizvodu stepena homogenosti funkcije i same funkcije.

Ako jednakost (4.29) podijelimo s funkcijom $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, dobit ćemo

$$\frac{x_1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2}{f}\frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + \frac{x_n}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha. \tag{4.30}$$

No, kako je

$$E_{f,x_i} = \frac{x_i}{f}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i \in \{1,2,...,n\},$$

jednakost (4.30) možemo napisati u obliku

$$E_{f,x_1} + E_{f,x_2} + ... + E_{f,x_n} = \alpha. \tag{4.31}$$

Na taj način se Eulerov teorem može iskazati i na sljedeći način:

Teorem 4.8 ***(Eulerov teorem u terminima elastičnosti)*** *Ako je funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ homogena stepena homogenosti α, tada vrijedi jednakost (4.31), odnosno tada je zbir svih koeficijenata parcijalne elastičnosti te homogene funkcije jednak stepenu homogenosti funkcije.*

Dakle, kada su ispunjene pretpostavke Eulerovog teorema i treba izračunati zbir svih koeficijenata parcijalne elastičnosti homogene funkcije, ne moraju se računati ti koeficijenti, nego je dovoljno odrediti stepen homogenosti funkcije.

Primjer 4.28 *Zadana je sljedeća funkcija potražnje prvog dobra*

$$Q_{d_1}(p_1, p_2) = 3\sqrt{p_2}\left(\frac{p_2 - p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Izračunati sumu svih koeficijenata parcijalne elastičnosti.

Rješenje. Prvo provjerimo da li je funkcija homogena, jer u tom slučaju možemo primijeniti Eulerov teorem. Imamo

$$\begin{aligned} Q_{d_1}(\lambda p_1, \lambda p_2) &= 3\sqrt{\lambda p_2}\left(\frac{\lambda p_2 - \lambda p_1}{\lambda p_2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\lambda^{\frac{1}{2}}\sqrt{p_2}\left(\frac{\lambda(p_2 - p_1)}{\lambda p_2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} 3\sqrt{p_2}\left(\frac{p_2 - p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{3}} = \lambda^{\frac{1}{2}} Q_{d_1}(\lambda p_1, \lambda p_2), \end{aligned}$$

što znači da je data funkcija potražnje homogena funkcija stepena homogenosti $\alpha = \frac{1}{2}$. Prema Eulerovom teoremu u terminima elastičnosti ovo znači da je zbir oba koeficijenta parcijalne eastičnosti funkcije jednak $\frac{1}{2}$, tj.

$$E_{Q_{d_1},p_1} + E_{Q_{d_1},p_2} = \frac{1}{2}.$$

Preporučujemo čitatelju da ipak izračuna svaki od navedenih koeficijenata, a onda i njihov zbir. ♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti graničnu produktivost kapitala i graničnu produktivnost rada u slučaju funkcije proizvodnje $Q(K,L) = 30K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ na nivou uloženog kapitala od 64 jedinice i uloženog rada od 125 jedinica.

2. Odrediti graničnu produktivost kapitala i graničnu produktivnost rada u slučaju funkcije proizvodnje $Q(K,L) = 50K^{0.25}L^{0.50}$ na nivou uloženog kapitala od 81 jedinice i uloženog rada od 49 jedinica.

3. Poznata je funkcija prosječnih troškova proizvodnje dva artikla u nekoj tvornici u obliku

$$\overline{T}(Q_1,Q_2) = 150 + 2Q_1 + 3Q_1 + \frac{5}{Q_1+Q_2}.$$

Odrediti granične troškove u odnosu na Q_1 i Q_2 na nivou proizvodnje $Q_1 = 10$ i $Q_2 = 15$ jedinica. Ekonomski interpretirati dobijene rezultate.

4. Za funkciju $f(x,y) = \sqrt{x}\ln\frac{y}{z}$ izračunati koeficijente parcijalne elastičnosti u odnosu na varijable x, y, z i interpretirati rezultat za $x = 25, y = 15, z = 15$.

5. Za funkciju ponude dvaju dobara $Q_d(p_1,p_2) = \dfrac{10}{p_1+2} + p_2$, gdje su p_1 i p_2 cijene tih dobara:

a) izračunati granične ponude u odnosu na cijene pojedinih dobara na nivou cijena $p_1 = 5$ i $p_2 = 2$;

b) izračunati i interpretirati oba koeficijenta eastičnosti te funkcije na nivou cijena $p_1 = 5$ i $p_2 = 2$.

6. Data je funkcija $f(x,y) = x(y+1)^{-1}$. Odrediti x tako da njegovo povećanje od 1% uzrokuje povećanje od f za 1%.

7. Izračunati za koliko se procenata promijeni vrijednost funkcije proizvodnje $Q(K,L) = 25K^{0.2}L^{0.7}$ ako se obje njene varijable istovremeno povećaju za 2%.

U zadacima 8-10 pokazati da su sljedeće funkcije homogene i odrediti stepen homogenosti za svaku od njih.

8. $f(x,y) = 3x^2\left(\dfrac{x(x+y)^3}{3x+2y}\right)^{\frac{1}{5}}$

9. $f(x,y) = x^2y^{-1}\ln\dfrac{x(y-x)}{y^2}$.

10. $Q_{s_1}(p_1,p_2,p_3) = 2p_1\sqrt{p_3}\left(\dfrac{p_3+p_2}{p_1^{0.3}}\right)^{0.2}$.

11. Odrediti zbir svih koeficijenata parcijalne elastičnosti funkcije

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^3y^2}\left(\frac{x^2+y^2}{2x+5y}\right)^{-2}.$$

12. Odrediti zbir svih koeficijenata parcijalne elastičnosti funkcije

$$Q_{s_1}(p_1,p_2,p_3) = 10p_1^3\sqrt{p_3}\left(\frac{p_3+p_2}{p_1^{0.6}}\right).$$

Poglavlje 5

Integralni račun

5.1 Neodređeni integral

5.1.1 Pojam neodređenog integrala

U Poglavlju 3 imali smo priliku vidjeti da se, recimo, granični troškovi određuju kao izvod funkcije ukupnih troškova, te smo na taj način mogli doći do informacije o brzini promjene ukupnih troškova. Općenito, kad nam je poznata neka ekonomska funkcija $y(x)$ odgovarajuću graničnu funkciju $Gy(x)$ određujemo kao izvod funkcije $y(x)$ (vidjeti (3.16)). No, ponekad je u praksi važno, polazeći od graničnih troškova, doći do informacije o kretanju ukupnih troškova za određene nivoe proizvodnje. Slično tome, ekonomisti, kada im je poznata brzina inflacije, obično žele procijeniti buduće cijene. U općem slučaju, ponekad želimo kad nam je poznata neka granična funkcija $Gy(x)$ da odredimo odgovarajuću ekonomsku funkciju $y(x)$. Drugim riječima, kad nam je poznat izvod neke funkcije kako odrediti samu funkciju? Treba, dakle, naći neku obrnutu operaciju od izvoda funkcije. U tu svrhu uvedimo prvo pojam *primitivne funkcije.*

Definicija 5.1 *Pretpostavimo da su funkcije f i F definirane na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$ i da je na tom intervalu funkcija F diferencijabilna. Za funkciju F kažemo da je* ***primitivna funkcija*** *funkcije f ako za sve $x \in I$ vrijedi*

$$F'(x) = f(x).$$

Tako je funkcija $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10x - 25$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^2 + 10$ na intervalu $I = \mathbb{R}$, jer je

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - 25\right)' = x^2 + 10 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Također, funkcija $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je primitivna funkcija funkcije

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

na intervalu $I = (-1,1)$. Naime, za sve $x \in (-1,1)$ vrijedi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) \\ &= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = f(x). \end{aligned}$$

Primijetimo da primitivna funkcija date funkcije f nije jedinstvena. Naime, funkcija $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10x + 20$ je također primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^2 + 10$ na intervalu $I = \mathbb{R}$, budući da je

$$G'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x + 20\right)' = x^2 + 10 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Također je i funkcija $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 6$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $I = (-1,1)$, jer je

$$G'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 6\right)' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = f(x)$$

za sve $x \in (-1,1)$. Uočimo da je u prvom slučaju $G(x) = F(x) + 45$, a u drugom $G(x) = F(x) + 6$. U oba slučaja smo dodali neku konstantu na funkciju $F(x)$. Općenito, ako je C neka proizvoljna konstanta, tada je

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Dakle, vrijedi opći zaključak: *Ako je funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tada je i funkcija $G(x) = F(x) + C$, gdje je C proizvoljna konstanta, također primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, što znači da primitivnih funkcija date funkcije ima beskonačno mnogo.*

S druge strane, ako su $F(x)$ i $G(x)$ dvije različite primitivne funkcije funkcije $f(x)$ na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tada je

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x) \quad (x \in I),$$

odakle je

$$0 = G'(x) - F'(x) = [G(x) - F(x)]' \quad (x \in I),$$

odnosno

$$C = G(x) - F(x) \quad (x \in I),$$

gdje je C konstanta, jer je jedino izvod konstantne funkcije definirane na intervalu I jednak nuli. Dakle, dobili smo da vrijedi

$$G(x) = F(x) + C \quad (x \in I). \tag{5.1}$$

Prema tome, ako nam je poznata jedna primitivna funkcija $F(x)$ funkcije $f(x)$ na nekom inetrvalu $I \subset \mathbb{R}$, tada znamo i sve druge primitivne funkcije $f(x)$ na inetrvalu $I \subset \mathbb{R}$ i one su oblika (5.1). Sada smo u mogućnosti uvesti pojam *neodređenog integrala.*

Definicija 5.2 *Neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I, tj. skup*

$$\{F(x) + C \mid x \in I, C \text{ - konstanta}\}$$

nazivamo ***neodređenim integralom*** *funkcije f i označavamo ga sa*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Riječ *neodređeni* u gornjoj definiciji opravdava se činjenicom da je C neodređena (proizvoljna) konstanta, koju obično nazivamo *integralnom konstantom.* Funkciju $f(x)$ nazivamo *podintegralnom funkcijom.* No, posebnu pažnju obratimo na izraz dx pod znakom inegrala. On označava prirast (diferencijal) neovisne varijable funkcije f i ne smije se izostavljati pri pisanju inegrala. Naravno, ako je neovisna varijabla označena drugačije, recimo sa t, tada se neodređeni integral funkcije f zapisuje kao

$$\int f(t)\,dt.$$

Neovisnu varijablu o kojoj ovisi podintegralna funkcija nazivamo *podintegralnom varijablom.* Tako je u integralu

$$\int x^2 t dx$$

podintegralna varijabla x, a t je konstanta, dok je u integralu

$$\int x^2 t dt$$

t podintegralna varijabla, a x konstanta.

Sada je jasno da je neodređeni integral obrnuta operacija izvoda funkcije. Prema tome, vrijedi

$$\int \left(x^2 + 10\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + 10x + C$$

i

$$\int \frac{x}{\left(1 - x^2\right)\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

Uočimo da iz definicije neodređenog integrala slijede njegove osnovne osobine:

1. $\left[\int f(x)\, dx\right]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$,
2. $d\int f(x)\, dx = d[F(x) + C] = dF(x) + 0 = F'(x)\, dx = f(x)\, dx$,
3. $\int dF(x) = \int F'(x)\, dx = \int f(x)\, dx = F(x) + C$,
4. $\int F'(x)\, dx = \int f(x)\, dx = F(x) + C$.

Osim toga, navedimo sljedeća osnovna pravila za neodređeni integral (pravila integriranja).

Pravilo 1. Neka je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. Tada vrijedi

$$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

Pravilo 2. Ako postoje integrali $\int f(x)\, dx$ i $\int g(x)\, dx$, tada vrijedi

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Nažalost, ne postoje pravila za izračunavanje neodređenog integrala proizvoda ili količnika, kao što je to bilo u slučaju izračunavanja izvoda. Zbog toga je izračunavanje neodređenog integrala općenito znatno složenije od izračunavanja izvoda. Čak imamo situacije da neke elementarne funkcije nemaju neodređeni integral izražen pomoću elementarnih funkcija. Takvi su integrali, na primjer,

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Nepostojanje spomenutih pravila integriranja nadomjestit ćemo uvođenjem različitih metoda integriranja za različite klase podintegralnih funkcija. No, prije toga, slično kao i kod izvoda, napišimo tablicu osnovnih integrala (Tabela 5.1).

$\int 0dx = C$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int 1dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \ a > 0$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$

Tabela 5.1

5.1.2 Osnovni metodi integracije

Metod direktne integracije

Metod izračunavanja neodređenog integrala primjenom osnovnih pravila integriranja i korištenjem tablice osnovnih integrala nazivamo *metodom direktne integracije.* Ovim metodom se mogu rješavati samo neki jednostavniji integrali, što ćemo ilustrirati sljedećim primjerima.

Primjer 5.1 *Izračunati integrale:*

$$a) \int \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^2} dx, \qquad b) \int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx, \qquad c) \int \frac{3\sqrt[5]{x^3} - 2x\sqrt{x} + 5}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Rješenje. a) Dati se integral može napisati u obliku zbira tri integrala primjenom Pravila 2, a primjenom Pravila 1 oni se svedu na tablične integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^2} dx &= \int \left(3x - \frac{2}{x} + 5x^{-2}\right) dx \\ &= 3 \int x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int x^{-2} dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \ln \lvert x \rvert + 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{3x^2}{2} - \frac{5}{x} - 2 \ln \lvert x \rvert + C. \end{aligned}$$

b) Podintegralnu funkciju možemo napisati u obliku stepena

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}},$$

pa je

$$\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

c) Sve izraze s korijenima napišimo u obliku stepena, nakon čega se dati integral može napisati kao zbir tri integrala:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\sqrt[5]{x^3} - 2x\sqrt{x} + 5}{\sqrt[3]{x^2}}dx &= \int \frac{3x^{\frac{3}{5}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 5}{x^{\frac{2}{3}}}dx \\
&= 3\int x^{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}dx - 2\int x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}dx + 5\int x^{-\frac{2}{3}}dx \\
&= 3\int x^{-\frac{1}{15}}dx - 2\int x^{\frac{5}{6}}dx + 5 \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C \\
&= 3 \cdot \frac{x^{\frac{14}{15}}}{\frac{14}{15}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C \\
&= \frac{45}{14}x^{\frac{14}{15}} - \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + 15x^{\frac{1}{3}} + C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer 5.2 *Izračunati integrale:*

$$a) \int \operatorname{ctg}^2 x dx, \qquad b) \int \frac{2^{2x+1} - 3^{x+1}}{12^x}dx, \qquad c) \int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

Rješenje. a) Primjenom osnovnog trigonometrijskog identiteta dati se integral može svesti na zbir dva tablična integrala:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{ctg}^2 x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int 1dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.
\end{aligned}$$

b) Primjenom pravila za operacije sa stepenima dati se integral može svesti na dva integrala koje rješavamo koristeći se tablicom osnovnih integrala:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2^{2x+1} - 3^{x+1}}{12^x}dx &= \int \frac{2^{2x+1} - 3^{x+1}}{3^x \cdot 2^{2x}}dx = \int \left(\frac{2^{2x+1}}{3^x \cdot 2^{2x}} - \frac{3^{x+1}}{3^x \cdot 2^{2x}}\right)dx \\
&= \int \left(2 \cdot \frac{1}{3^x} - 3 \cdot \frac{1}{4^x}\right)dx = 2\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx - 3\int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx \\
&= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} - 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\frac{1}{4}} + C = -\frac{2}{3^x \ln 3} + \frac{3}{4^x \ln 4} + C.
\end{aligned}$$

c) Jednostavnom transformacijom brojnika podintegralne funkcije dati se integral svodi na zbir dva tablična integrala:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - \operatorname{arctg} x + C. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer primjene u ekonomiji

Primjena neodređenog integrala u ekonomiji je najčešća u slučaju određivanja nepoznate ekonomske funkcije kada je poznata njena granična funkcija, kao i u nekim slučajevima pri određivanju funkcije čiji je koeficijent elastičnosti poznat. Ovaj drugi slučaj (s koeficijentom elastičnosti) predstavit ćemo u okviru primjene diferencijalnih jednadžbi (u narednom poglavlju).
Kako je neodređeni integral obrnuta operacija od izvoda, onda na osnovu (3.16), u općem slučaju vrijedi

$$\boxed{ekonomska\ funkcija = \int (granična\ funkcija)\,.} \tag{5.2}$$

Specijalno je:

$$T(Q) = \int T'(Q)\,dQ = \int GT(Q)\,dQ, \quad T(p) = \int GT(p)\,dp,$$

$$P(Q) = \int P'(Q)\,dQ = \int GP(Q)\,dQ, \quad P(p) = \int GP(p)\,dp,$$

$$D(Q) = \int D'(Q)\,dQ = \int GD(Q)\,dQ, \quad D(p) = \int GD(p)\,dp.$$

Primjer 5.3 ***(Ukupni troškovi)*** *Proizvođač nekog artikla je ustanovio da su granični troškovi proizvodnje $GT(Q) = 3Q^2 - 60Q + 500$ dolara po jedinici artikla kada se proizvede Q jedinica artikla. Ukupni troškovi proizvodnje prve dvije jedinice artikla iznose 950\$. Koliki su ukupni troškovi proizvodnje prvih 5 jedinica artikla?*

Rješenje. Znamo da je funkcija graničnih troškova ustvari izvod funkcije ukupnih troškova, tj.

$$T'(Q) = 3Q^2 - 60Q + 500,$$

pa je

$$\begin{aligned} T(Q) &= \int T'(Q)\,dQ = \int \left(3Q^2 - 60Q + 500\right) dQ \\ &= 3 \cdot \frac{Q^3}{3} - 60 \cdot \frac{Q^2}{2} + 500Q + C \\ &= Q^3 - 30Q^2 + 500Q + C \end{aligned}$$

za neku konstantu C. Vrijednost konstante C možemo odrediti iz činjenice da je $T(2) = 950$. Naime,

$$950 = 2^3 - 30 \cdot 2^2 + 500 \cdot 2 + C \Rightarrow C = 62.$$

Dakle,

$$T(Q) = Q^3 - 30Q^2 + 500Q + 62,$$

pa ukupni troškovi proizvodnje prvih 5 jedinica artikla iznose

$$T(5) = 5^3 - 30 \cdot 5^2 + 500 \cdot 5 + 62 = 1937 \ \ (\$). \quad \clubsuit$$

Napomena 5.1 *Pri izračunavanju neodređenog integrala obavezno se mora izračunati integralna konstanta C, jer bi se u suprotnom dobilo beskonačno mnogo rezultujućih ekonomskih funkcija. To se postiže pomoću početnih uvjeta koje mora zadovoljiti tražena ekonomska funkcija kako bi ona, dakle, bila jednoznačno određena.*

Metod smjene

Napomenuli smo da se metodom direktne integracije mogu riješiti samo neki jednostavniji integrali. Zbog toga je potrebno poznavati i neke druge metode. Jedan od njih je *metod smjene*. Ovim metodom mi zamjenjujemo dio podintegralne funkcije nekom novom varijablom. Pri tome nema smisla samo staru varijablu zamijeniti novom. Nakon toga se i diferencijal stare varijable mora izraziti pomoću diferencijala nove varijable. U novom integralu smije da se pojavi samo nova varijabla, a stara se ne smije pojaviti ni u kom obliku. Ukoliko je smjena uspješna, dati integral se svede na jedan ili više tabličnih integrala i onda odredimo primitivnu funkciju. Na kraju moramo vratiti staru varijablu koristeći se polaznom smjenom.

Metod smjene može se zorno prikazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \left| \begin{array}{c} S : x = g(t) \Rightarrow t = g^{-1}(x) \\ dx = dg(t) = g'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \\ &= \ldots = h(t) + C = h\left(g^{-1}x\right) + C. \end{aligned}$$

Primjer 5.4 *Izračunati sljedeće integrale:*

$$a) \int \sqrt{2x+1}dx, \qquad b) \int e^{3x-1}dx, \qquad c) \int \frac{1}{x^2+4}dx.$$

Rješenje. a) Potkorjenu funkciju zamijenimo novom varijablom:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+1}dx &= \left| \begin{array}{c} S: 2x+1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{2x+1} \\ d(2x+1) = d\left(t^2\right) \Rightarrow 2dx = 2tdt \Rightarrow dx = tdt \end{array} \right| \\ &= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C. \end{aligned}$$

b) Eksponent podintegralne funkcije zamijenimo novom varijablom:

$$\begin{aligned} \int e^{3x-1}dx &= \left| \begin{array}{c} S: 3x-1 = t \\ d(3x-1) = dt \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| \\ &= \int e^t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C. \end{aligned}$$

c) Dati integral nas podsjeća na tablični $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$, pa treba naći odgovarajuću smjenu da se zaista svede na ovaj tablični:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+4}dx &= \left| \begin{array}{c} S: \left(x^2 = 4t^2 \Rightarrow\right) x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2} \\ dx = d(2t) = 2dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{4t^2+4} \cdot 2dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Primjer 5.5 *Izračunati sljedeće integrale:*

$$a) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \qquad b) \int xe^{-x^2}dx, \qquad c) \int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx.$$

Rješenje. a) Uočimo da se izraz xdx može dobiti pomoću diferencijala izraza x^2+1, što nam nagovještava smjenu koju je potrebno izvršiti pod nintegralom:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \left| \begin{array}{c} S: x^2+1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2+1} \\ d\left(x^2+1\right) = d\left(t^2\right) \Rightarrow 2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = tdt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{tdt}{t} = \int 1dt = t + C = \sqrt{x^2+1} + C. \end{aligned}$$

b) Slično kao u dijelu a):

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2}dx &= \int e^{-x^2}(xdx) = \left| \begin{array}{c} S: -x^2 = t \\ d\left(-x^2\right) = dt \Rightarrow -2xdx = dt \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| \\ &= \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.\end{aligned}$$

c) Dati integral nas podsjeća na tablični integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$, pa treba naći odgovarajuću smjenu da se zaista i svede na ovaj tablični integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx &= \left| \begin{array}{c} S: \left(x^2 = 5t^2 \Rightarrow\right) x = \sqrt{5}t \Rightarrow t = \frac{x}{\sqrt{5}} \\ dx = \sqrt{5}dt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{5-5t^2}}\sqrt{5}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \arcsin t + C = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjeri primjene u ekonomiji

Primjer 5.6 ***(Prihodi od prodaje)*** *Vrijednost neke nove industrijske mašine opada brzinom koja se mijenja s vremenom. Kada je mašina stara t godina, brzina promjene njene vrijednosti je $-720e^{-\frac{t}{5}}$ dolara po godini. Ako je nova mašina kupljena za* 6000\$*, koliko će ona vrijediti* 10 *godina kasnije?*

Rješenje. Kako je brzina opadanja vrijednosti mašine $f'(t) = -720e^{-\frac{t}{5}}$, onda njena vrijednost t godina nakon što je proizvedena iznosi

$$\begin{aligned}f(t) &= \int f'(t)\,dt = -720\int e^{-\frac{t}{5}}dt = \left| \begin{array}{c} S: -\frac{t}{5} = u \\ d\left(-\frac{t}{5}\right) = du \Rightarrow -\frac{dt}{5} = du \Rightarrow dt = -5du \end{array} \right| \\ &= -720\int e^u(-5du) = 3600e^u + C = 3600e^{-\frac{t}{5}} + C.\end{aligned}$$

Budući da vrijednost nove mašine, dakle u vremenu $t = 0$, iznosi $f(0) = 6000$ (\$), to je

$$6000 = 3600e^{-\frac{0}{5}} + C = 3600 + C \Rightarrow C = 2400.$$

Dakle, vrijednost mašine t godina nakon što je proizvedena je $f(t) = 3600e^{-\frac{t}{5}} + 2400$ (\$). Tako će vrijednost mašine kupljene za 6000\$ nakon 10 godina biti

$$f(10) = 3600e^{-\frac{10}{5}} + 2400 = 3600e^{-2} + 2400 = 2887.21 \ (\$). \quad \clubsuit$$

Primjer 5.7 ***(Granični i ukupni prihodi)*** *Zadana je funkcija graničnih prihoda*

$$GP(Q) = \frac{2Q+1}{Q+5}.$$

Ako je ukupni prihod 16 *na nivou proizvodnje* 5, *odrediti funkciju ukupnih prihoda.*

Rješenje. Kako je $GP(Q) = P'(Q)$, to je

$$\begin{aligned} P(Q) &= \int P'(Q)\,dQ = \int GP(Q)dQ = \int \frac{2Q+1}{Q+5}dQ \\ &= \left| \begin{array}{c} S : Q+5 = t \Rightarrow Q = t-5 \\ d(Q+5) = dQ = dt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{2(t-5)+1}{t}dt = \int \left(\frac{2t}{t} - \frac{9}{t}\right)dt = 2\int 1dt - 9\int \frac{1}{t}dt \\ &= 2t - 9\ln|t| + C = 2Q + 10 - 9\ln|Q+5| + C. \end{aligned}$$

Iz činjenice $P(5) = 16$ i dobijenog integrala slijedi

$$16 = 2 \cdot 5 + 10 - 9\ln|5+5| + C,$$

odakle je $C = 9\ln 10 - 4$. Dakle, tražena funkcija ukupnih prihoda je

$$P(Q) = 2Q + 10 - 9\ln|Q+5| + 5\ln 10 - 4. \ \clubsuit$$

Metod parcijalne integracije

Promatrajmo proizvod dvije funkcije

$$u(x)\,v(x),$$

pri čemu su obje funkcije, i $u(x)$ i $v(x)$, diferencijabilne na nekom intervalu I, a njihovi izvodi integrabilne funkcije na I. Prema pravilu diferencijala proizvoda dvije funkcije (v. Napomenu 3.2 c)), imamo

$$d[u(x)\,v(x)] = v(x)\,du(x) + u(x)\,dv(x).$$

Integracijom posljednje jednakosti, dobijamo

$$\int d[u(x)\,v(x)] = \int v(x)\,du(x) + \int u(x)\,dv(x),$$

odnosno, koristeći osobinu 3. neodređenog integrala,

$$u(x)\,v(x) = \int v(x)\,du(x) + \int u(x)\,dv(x)\,.$$

Odavde je

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

ili skraćeno

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{5.3}$$

Na ovaj način se integral na lijevoj strani u (5.3) svodi na riješeni dio (uv) i neriješeni dio $(\int vdu)$, tj. on je samo dijelom (parcijalno) riješen, pa se ovakav metod izračunavanja neodređenog integrala zove *metod parcijalne integracije.*

Napomena 5.2 *Važno je uočiti neke vrlo bitne činjenice vezane za metod parcijalne integracije. Naime, ovaj metod može biti vrlo uspješno primijenjen za izračunavanje većeg broja neodređenih integrala oblika*

$$\int f(x)\,g(x)\,dx,$$

ali to će biti samo ako:

1. neriješeni dio $(\int vdu)$ je jednostavniji integral od polaznog $(\int udv)$,

2. izbor izraza u i dv u okviru proizvoda $f(x)\,g(x)\,dx$ (budući da tih izbora često ima više od jednog) mora biti takav da je relativno jednostavno moguće izračunati funkciju v.

Metod parcijalne integracije se sigurno uspješno primjenjuje u sljedećim tipovima integrala:

$$\int P_n(x)\,e^{\alpha x}dx, \int P_n(x)\ln x dx, \int P_n(x)\sin x dx, \int e^{ax}\sin bx, \tag{5.4}$$

gdje je $P_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, tj. polinom stepena n po varijabli x. Pokažimo kako se to radi u slučaju prva dva integrala.

U slučaju integrala $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}dx$ postupamo ovako (važan je izbor izraza u i dv):

$$\begin{aligned}\int P_n(x)\,e^{\alpha x}dx &= \left| \begin{array}{c} u = P_n(x) \Rightarrow du = P_n'(x)\,dx = Q_{n-1}(x)\,dx \\ dv = e^{\alpha x}dx \Rightarrow v = \int e^{\alpha x}dx = \dfrac{e^{ax}}{a} \end{array} \right| \\ &\overset{(5.3)}{=} \frac{1}{a}P_n(x)\,e^{ax} - \frac{1}{a}\int Q_{n-1}(x)\,e^{ax}dx.\end{aligned}$$

Ovdje je $P_n'(x) = Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$, tako da je neriješeni dio $(\int Q_{n-1}(x)\,e^{ax}dx)$ integral koji je jednostavniji od polaznog i rješava se na isti način, tj. primjenom metoda parcijalne integracije po istom principu. Postupak izvodimo sve dok se polinom u neriješenom dijelu integrala ne svede na konstantu.

Primjer 5.8 *Izračunati integral* $\int x^2e^{-3x}dx$.

Rješenje. Primjenom opisanog postupka, imamo

$$\begin{aligned}
\int x^2e^{-3x}dx &= \left|\begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = \int e^{-3x}dx = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{array}\right| \\
&= -\frac{x^2e^{-3x}}{3} - \int\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)\cdot 2xdx \\
&= -\frac{x^2e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}dx \\
&= \left|\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = \int e^{-3x}dx = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{array}\right| \\
&= -\frac{x^2e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{xe^{-3x}}{3} - \int\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)dx\right) \\
&= -\frac{x^2e^{-3x}}{3} - \frac{2xe^{-3x}}{9} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}dx \\
&= -\frac{x^2e^{-3x}}{3} - \frac{2xe^{-3x}}{9} + \frac{2}{9}\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) + C \\
&= -\frac{1}{27}\left(9x^2 + 6x + 2\right)e^{-3x} + C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Pri rješavanju integrala $\int P_n(x)\ln xdx$ postupamo ovako:

$$\begin{aligned}
\int P_n(x)\ln xdx &= \left|\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = P_n(x)\,dx \Rightarrow v = \int P_n(x)\,dx = Q_{n+1}(x) \end{array}\right| \\
&= Q_{n+1}(x)\ln x - \int Q_{n+1}(x)\cdot\frac{1}{x}dx.
\end{aligned}$$

Ovdje je $Q_{n+1}(x)$ polinom stepena $n+1$ po varijabli x, ali je podintegralna funkcija u neriješenom dijelu $Q_{n+1}(x)\cdot\frac{1}{x}$, dakle, ne sadrži više izraz $\ln x$, pa se integral svodi na zbir tabličnih integrala.

Primjer 5.9 *Izračunati integral* $\int \ln xdx$.

Rješenje. Prema opisanom postupku, budući da imamo samo jednu mogućnost izbora za u i dv, dati integral izračunavamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

U slučaju trećeg i četvrtog ntegrala iz (5.4) postupamo kao i u slučaju prvog integrala iz te skupine.

Primjer 5.10 *Izračunati integral* $\int x \sin x dx$.

Rješenje. Postupajući kao u slučaju integrala u Primjeru 5.8, imamo

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| \\ &= -x \cos x - \int \left(-\cos x\right) dx = -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Primjeri primjene u ekonomiji

Primjer 5.11 ***(Ukupna dobit)*** *Zadana je funkcija graničnih troškova i funkcija potražnje:*

$$GT(Q) = (2Q+1)\, e^{Q} - \frac{1}{Q^2} \quad i \quad Q\,(p) = \frac{1-p}{4},$$

gdje je p cijena, a Q količina proizvodnje. Ako su ukupni troškovi po jedinici proizvodnje 3, *izvesti funkciju dobiti.*

Rješenje. Funkcija ukupne dobiti je $D\,(Q) = P\,(Q) - T\,(Q)$, tj. tazlika ukupnih prihoda i ukupnih troškova. Odredimo prvo funkciju ukupnih troškova. Kako je

$GT(Q) = T'(Q)$, imamo (primjenom metoda parcijalne integracije)

$$\begin{aligned}
T(Q) &= \int T'(Q)\,dQ = \int \left[(2Q+1)\,e^{Q} - \frac{1}{Q^2}\right] dQ \\
&= \int (2Q+1)\,e^{Q} dQ - \int Q^{-2} dQ = \int (2Q+1)\,e^{Q} dQ - \frac{Q^{-1}}{-1} \\
&= \int (2Q+1)\,e^{Q} dQ + \frac{1}{Q} \overset{(5.3)}{=} \left| \begin{array}{c} u = 2Q+1 \Rightarrow du = 2dQ \\ dv = e^{Q} dQ \Rightarrow v = e^{Q} \end{array} \right| \\
&= (2Q+1)\,e^{Q} - 2\int e^{Q} dQ + \frac{1}{Q} \\
&= (2Q+1)\,e^{Q} - 2e^{Q} + \frac{1}{Q} + C.
\end{aligned}$$

Iz početnog uvjeta $T(1) = 3$ slijedi

$$3 = (2 \cdot 1 + 1)\,e^{1} - 2e^{1} + \frac{1}{1} + C,$$

odakle je $C = 2 - e$, pa je funkcija ukupnih troškova

$$T(Q) = (2Q+1)\,e^{Q} - 2e^{Q} + \frac{1}{Q} + 2 - e.$$

Iz funkcije potražnje dobije se da je

$$p = p(Q) = 1 - 4Q,$$

te je funkcija ukupnih prihoda

$$P(Q) = Qp(Q) = Q(1 - 4Q) = Q - 4Q^2.$$

Konačno je funkcija ukupne dobiti

$$\begin{aligned}
D(Q) &= P(Q) - T(Q) = Q - 4Q^2 - \left[(2Q+1)\,e^{Q} - 2e^{Q} + \frac{1}{Q} + 2 - e\right] \\
&= Q - 4Q^2 - (2Q+1)\,e^{Q} + 2e^{Q} - \frac{1}{Q} - 2 + e. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer 5.12 ***(Radna efikasnost)*** *Nakon t sati rada radnik u nekoj tvornici ima brzinu promjene produktivnosti $100te^{-0.5t}$ jedinica nekog artikla po satu. Koliko jedinica artikla može taj radnik proizvesti u prva 4 sata ako u prva 2 sata rada proizvede $50e^{-1}$ jedinica artikla?*

Rješenje. Poznat nam je podatak $Q'(t) = 100te^{-0.5t}$, odakle je

$$Q(t) = \int Q'(t)\,dt = 100\int te^{-0.5t}dt.$$

Primjenom metoda parcijalne integracije, dobijamo

$$\begin{aligned}
Q(t) &= 100\int te^{-0.5t}dt = \left| \begin{array}{c} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-0.5t}dt \Rightarrow v = \frac{e^{-0.5t}}{-0.5} \end{array} \right| \\
&= 100\left(-2te^{-0.5t} - \int \left(\frac{e^{-0.5t}}{-0.5}\right) dt\right) \\
&= 100\left(-2te^{-0.5t} + 2\int e^{-0.5t}dt\right) \\
&= -200te^{-0.5t} + \frac{2}{-0.5}e^{-0.5t} + C \\
&= -200te^{-0.5t} - 4e^{-0.5t} + C.
\end{aligned}$$

Iz podatka $Q(2) = 50e^{-1}$ imamo

$$50e^{-1} = -200 \cdot 2e^{-1} - 4e^{-1} + C,$$

odakle je $C = 454e^{-1}$, pa je $Q(t) = -200te^{-0.5t} - 4e^{-0.5t} + 454e^{-1}$. Tako dobijemo

$$Q(4) = -200 \cdot 4e^{-2} - 4e^{-2} + 454e^{-1} = -804e^{-2} + 454e^{-1},$$

što predstavlja količinu proizvedenih jedinica artikla koji taj radnik proizvede u prva četiri sata rada. ♣

Integracija racionalnih funkcija

Funkciju oblika

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} \tag{5.5}$$

nazivamo *razlomljenom racionalnom funkcijom.* Ako je $n \geq m$, za funkciju (5.5) kažemo da je *neprava* razlomljena funkcija, a ako je $n < m$, za funkciju (5.5) kažemo da je *prava* razlomljena funkcija. Svaka se neprava razlomljena funkcija, dijeljenjem polinoma iz brojnika polinomom iz nazivnika, može svesti na zbir nekog polinoma i prave racionalne funkcije, tj.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{S_k(x)}{Q_n(x)},$$

gdje su $R(x)$ i $S_k(x)$ polinomi i $k < n$. Tako se neprava racionalna funkcija

$$\frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 - x + 1},$$

nakon dijeljenja polinoma $3x^4 - 2x^2 + 5$ polinomom $x^2 - x + 1$, svodi na oblik

$$\frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 - x + 1} = 3x^2 + 3x - 2 + \frac{-5x + 7}{x^2 - x + 1}.$$

Treba li naći neodređeni integral neprave razlomljene racionalne funkcije, onda se on svodi na računanje integrala polinoma (što je zbir tabličnih integrala) i integrala prave razlomljene funkcije. Zbog toga se moramo posebno posvetiti upravo računanju ovog integrala prave razlomljene racionalne funkcije. Njega je moguće svesti na zbir jednostavnijih integrala nakon što pravu razlomljenu funkciju rastavimo na zbir prostih (parcijalnih) razlomaka. Naime, prvo se polinom iz nazivnika, $Q_m(x)$, rastavi na proste faktore oblika

$$(x - a)^{n_1} \quad (n_1 \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}) \quad \text{- linearne,}$$

ili

$$\left(x^2 + px + q\right)^{l_1}, \quad \left(l_1 \in \mathbb{N}, a, p, q \in \mathbb{R}, p^2 - 4q < 0\right) \quad \text{- kvadratne.}$$

Svakom od faktora $(x - a)^{n_1}$ pridružimo funkciju oblika

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x - a)^{n_1}},$$

a svakom od faktora $\left(x^2 + px + q\right)^{l_1}$ pridružimo funkciju oblika

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + ... + \frac{M_{l_1} x + N_{l_1}}{(x^2 + px + q)^{l_1}}.$$

Pri tome su $A_1, A_2, ..., A_{n_1}, M_1, N_1, ..., M_{l_1}, N_{l_1}$ koeficijenti koje treba odrediti. Postoje različiti pristupi u izračunavanju ovih koeficijenata. Jedan je da uvrstimo onoliko različitih vrijednosti varijable x koliko imamo i koeficijenata, te onda riješimo odgovarajući sistem linearnih algebarskih jednadžbi. Dobro je koristiti i neke olakšice u tom izračunavanju kako bi se proces što više pojednostavio i ubrzao. Ilustrirat ćemo to sljedećim primjerom.

Primjer 5.13 *Funkciju* $\dfrac{3x^2 - 2x + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)}$ *rastaviti na zbir prostih (parcijalnih) razlomaka.*

Rješenje. Uočimo da je nazivnik date prave razlomljene funkcije rastavljen na proste faktore. Zbog toga imamo sljedeći razvoj

$$\frac{3x^2-2x+5}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}.$$

Nakon množenja s $(x+1)^2$, dobijamo

$$\frac{3x^2-2x+5}{x^2+1}=A_1(x+1)+A_2+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}(x+1)^2. \tag{5.6}$$

Za $x=-1$, imamo $A_2=5$. Ako uzmemo $x=0$, iz jednakosti (5.6) dobijamo

$$5=A_1+5+N_1,$$

odnosno

$$A_1=-N_1. \tag{5.7}$$

Uvrštavanjem vrijednosti $x=1$ u (5.6), imamo

$$3=2A_1+5+\frac{M_1+N_1}{2}\cdot 4,$$

a zbog (5.7) dobije se $M_1=-1$. Konačno, uvrštavanjem $x=2$ u (5.6), dobijamo

$$\frac{13}{5}=3A_1+5+\frac{-2+N_1}{5}\cdot 9,$$

odnosno

$$6=15A_1+9N_1,$$

što zajedno sa (5.7) daje

$$A_1=1, N_1=-1.$$

Prema tome, vrijedi

$$\frac{3x^2-2x+5}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{x+1}{x^2+1}. \qquad \clubsuit$$

Kako se, dakle, svaka prava razlomljena racionalna funkcija može izraziti kao zbir parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (k=1,2,...),$$

gdje su A, M, N konstante, a $p, q \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $p^2 - 4q < 0$, onda se i integral te funkcije može izraziti kao zbir integrala s podintegralnim funkcijama oblika gornjih parcijalnih razlomaka. Pokažimo sada kako se računaju ti integrali. Prvi od njih se računa posebno za $k = 1$, a posebno za $k > 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{x-a}dx &= |S: x-a=t \Rightarrow dx = dt| = A\int \frac{1}{t}dt \\ &= A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^k}dx &= |S: x-a=t \Rightarrow dx = dt| = A\int \frac{1}{t^k}dt = A\int t^{-k}dt \\ &= \frac{At^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Za drugi od njih pokazat ćemo samo kako se računa integral u slučaju $k = 1$. Za $k > 1$ računanje se izvodi analogno. Kao prvo, napišimo kvadratni trinom $x^2 + px + q$ u tzv. kanonskom obliku:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Budući da je $4q - p^2 > 0$, možemo smatrati da je $\dfrac{4q-p^2}{4} = a^2$, za neko $a > 0$.

Sada je

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}dx = \left| \begin{array}{c} S: x + \frac{p}{2} = at \Rightarrow t = \frac{2x+p}{2a} \\ d\left(x+\frac{p}{2}\right) = d(at) \Rightarrow dx = adt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{M\left(at - \frac{p}{2}\right) + N}{a^2t^2 + a^2}dt = \frac{M}{2a}\int \frac{2tdt}{t^2+1} + \frac{N - M\frac{p}{2}}{a^2}\int \frac{1}{t^2+1} \\ &= \frac{M}{2a}\int \frac{\left(t^2+1\right)'}{t^2+1}dt + \frac{N - M\frac{p}{2}}{a^2}\operatorname{arctg} t \\ &= \frac{M}{2a}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{N - M\frac{p}{2}}{a^2}\operatorname{arctg} t + C, \end{aligned}$$

te preostaje samo vratiti varijablu x.

Primjer 5.14 *Izračunati* $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 2x + 5}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx.$

Rješenje. Na osnovu Primjera 5.13 te (5.8) i (5.9), imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-2x+5}{(x+1)^2(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x+1}dx + 5\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{5}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{5}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx - \operatorname{arctg} x \\ &= \ln|x+1| - \frac{5}{x+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arctg} x + C. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

Integracija nekih iracionalnih funkcija

Iako su integrali s iracionalnim funkcijama znatno rjeđi u primjenama na ekonomskim funkcijama, ipak ćemo se nakratko osvrnuti na neke tipove takvih integrala.

I) Integral oblika $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \ (a \neq 0)$

Ovakav integral rješava se na sličan način kao i integrali oblika

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx \left(a \neq 0, b^2-4ac<0\right),$$

a koji smo razmatrali u prethodnoj podsekciji (predstavljanjem kvadratnog trinoma u tzv. kanonskom obliku). U slučaju $a>0$ svodi se na tablični integral oblika $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$, a u slučaju $a<0$ svodi se na tablični integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Primjer 5.15 *Izračunati integrale: a)* $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$, *b)* $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

Rješenje. a) Kvadratni trinom x^2+2x+5 predstavimo u kanonskom obliku:

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4,$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx &= \int \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx = |S: x+1=t \Rightarrow dx=dt| \\
&= \int \frac{2(t-1)+1}{\sqrt{t^2+4}} \cdot dt = \int \frac{2t-1}{\sqrt{t^2+4}}dt \\
&= \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+4}}dt - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt \\
&= 2\int \frac{\left(t^2+4\right)'}{2\sqrt{t^2+4}}dt - \ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right) \\
&= 2\int d\left(\sqrt{t^2+4}\right) - \ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right) \\
&= 2\sqrt{t^2+4} - \ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right) + C. \\
&= 2\sqrt{x^2+2x+5} - \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right) + C.
\end{aligned}$$

b) Analogno prethodnom slučaju imamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} &= \int \frac{2x-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}dx = \left| \begin{array}{c} S: x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}t \Rightarrow t = \frac{2x+1}{\sqrt{5}} \\ dx = \frac{\sqrt{5}}{2}dt \end{array} \right| \\
&= \int \frac{2\cdot\frac{\sqrt{5}t-1}{2}-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{4}t^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}dt \\
&= \int \frac{\sqrt{5}t}{\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}dt - \int \frac{9}{\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}dt \\
&= -\sqrt{5}\int \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}dt - 9\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= -\sqrt{5}\int \frac{\left(1-t^2\right)'}{2\sqrt{1-t^2}}dt - 9\arcsin t \\
&= -\sqrt{5}\int d\left(\sqrt{1-t^2}\right) - 9\arcsin t \\
&= -\sqrt{5}\sqrt{1-t^2} - 9\arcsin t + C \\
&= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

II) Integrali oblika $\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(m \neq 0\ ,\ a \neq 0)$

Integral se rješava uvođenjem smjene $mx+n=\dfrac{1}{t}$ i svodi na integral oblika I).

Primjer 5.16 *Izračunati integral:* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

Rješenje. Prema navedenoj uputi, imamo

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} \left| \begin{array}{c} x+1=\frac{1}{t} \Longrightarrow x=\frac{1-t}{t}, t=\frac{1}{x+1} \\ dx=d\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right| \\
= \; & -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
= \; & -\arcsin t + C = -\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) + C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

III) Integral oblika $\displaystyle\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, x, \sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, ..., \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$

Ovdje $\mathcal{R}$ označava podintegralnu funkciju koja je razlomljena racionalna u odnosu na izraze koji se pojavljuju u zagradi. Integral se rješava uvođenjem smjene

$$t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},$$

gdje je n najmanji zajednički sadržalac brojeva $n_1, n_2, ..., n_k$. Na taj način integral se svede na integral racionalne funkcije.

Primjer 5.17 *Izračunati integral:* $I=\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx.$

Rješenje. Pošto je $NZS\,(2,3)=6$, onda treba uvesti smjenu $t=\sqrt[6]{x}$:

$$\begin{aligned}
I \; &= \left| \begin{array}{c} S: t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x=t^6 \\ dx=d\left(t^6\right)=6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3-t^2}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt \\
&= 6\int \frac{t^7(t-1)}{t^2(t+1)}dt = 6\int \frac{t^6-t^5}{t+1}dt \\
&= 6\int \left(t^5-2t^4+2t^3-2t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt \\
&= 6\cdot\frac{t^6}{6}-\frac{12}{5}t^5+\frac{12}{4}t^4-\frac{12}{3}t^3+\frac{12}{2}t^2-12t+12\ln|t+1|+C \\
&= x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x}+12\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer primjene u ekonomiji

Primjer 5.18 ***(Ukupni troškovi)*** *Poznato je da su granični troškovi proizvodnje neke robe* $GT(Q) = \frac{Q}{Q^2+3Q+2}$ *dolara po jedinici robe kada se proizvede* Q *jedinica te robe. Ako su ukupni troškovi na nivou proizvodnje* 2 *jedinice robe* $\ln 16$ *dolara, koliki su ukupni troškovi proizvodnje prvih* 8 *jedinica robe?*

Rješenje. Prema (5.2) imamo

$$T(Q) = \int GT(Q)\,dQ = \int \frac{Q}{Q^2+3Q+2}dQ = \int \frac{Q}{(Q+1)(Q+2)}dQ.$$

Razlomljenu racionalnu funkciju $\frac{Q}{(Q+1)(Q+2)}$ razvijmo u zbir prostih (parcijalnih) razlomaka:

$$\frac{Q}{(Q+1)(Q+2)} = \frac{A}{(Q+1)} + \frac{B}{(Q+2)},$$

odakle je

$$Q = A(Q+2) + B(Q+1).$$

Odavde imamo

$$Q = -1 \Rightarrow -1 = A$$

i

$$Q = -2 \Rightarrow -2 = -B \Rightarrow B = 2,$$

pa je

$$\frac{Q}{(Q+1)(Q+2)} = \frac{-1}{Q+1} + \frac{2}{Q+2}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} T(Q) &= \int \frac{Q}{(Q+1)(Q+2)}dQ = \int \frac{-1}{(Q+1)}dQ + \int \frac{2}{(Q+2)}dQ \\ &= -\ln(Q+1) + 2\ln(Q+2) + C. \end{aligned}$$

Koristeći uvjet zadatka prema kojem je $T(2) = \ln 16$, dobijamo

$$\ln 16 = -\ln 3 + 2\ln 4 + C,$$

odnosno $C = \ln 3$. Funkcija ukupnih troškova proizvodnje robe je oblika

$$T(Q) = -\ln(Q+1) + 2\ln(Q+2) + \ln 3,$$

te je

$$\begin{aligned} T(8) &= -\ln 9 + 2\ln 10 + \ln 3 = -2\ln 3 + \ln 100 + \ln 3 \\ &= \ln 100 - \ln 3 \ (\$). \quad \clubsuit \end{aligned}$$

$\circ \quad \circ \quad \circ$

Zadaci za samostalan rad

Izračunati sljedeće integrale (1-9):

1. a) $\int \sqrt{x}\left(x^2-2\right)dx$, b) $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2}-5x+7}{\sqrt{x}}dx$, c) $\int \frac{3^{x-1}+2^{2x}}{12^x}dx$.

2. a) $\int x\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x}}dx$, b) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$, c) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

3. a) $\int e^{-2x+5}dx$, b) $\int \frac{6x-7}{\sqrt{3x^2-7x+5}}dx$, c) $\int \frac{1}{2x^2+3}dx$.

4. a) $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$, b) $\int x^3\left(x^2+1\right)^{37}dx$, c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$.

5. a) $\int xe^{-x}dx$, b) $\int (3-4x)\,e^{2x}dx$, c) $\int x\ln x$.

6. a) $\int x^2\ln x dx$, b) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$, c) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

7. a) $\int \frac{xdx}{x^2-3x+2}$, b) $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^3+2x^2-3x}$, c) $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-4\right)}$.

8. a) $\int \frac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$, b) $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{-3-x^2-4x}}$.

9. a) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}$, b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

10. Zadana je funkcija graničnih troškova $GT(Q) = 5Qe^{Q-1}$ i funkcija potražnje $Q(p) = 5e^{-2p} - 20$, gdje je Q količina proizvodnje, a p cijena. Ako su fiksni troškovi $FT = 15$, izvesti funkciju ukupne dobiti.

11. Zadana je funkcija graničnih prihoda

$$GP(Q) = \frac{2Q-1}{Q+2}.$$

Ako je ukupni prihod 20 na nivou proizvodnje 8 jedinica artikla, odrediti funkciju ukupnih prihoda.

12. Zadane su funkcije graničnih troškova $GT(Q) = 5Q^4 + 2 + \dfrac{1}{1-Q}$ i prihoda $P(Q) = 3Q + 1$. Izvesti funkciju dobiti $D(Q)$ ako je $T(0) = 2$.

13. Zadana je funkcija graničnih prihoda $GP\,(Q) = Q\ln\,(Q+1)$, kao funkcija proizvodnje Q. Ako su troškovi po jedinici proizvodnje 10, a fiksni troškovi 2, izvesti funkciju ukupne dobiti.

5.2 Određeni integral

5.2.1 Pojam određenog integrala

Pretpostavimo da znamo brzinu $f\,(x) = \dfrac{dF}{dx}$ kojom se određena veličina F mijenja i da želimo pronaći iznos za koji će se veličina F promijeniti između $x = a$ i $x = b$. Prvo bismo, naravno, pronašli F integracijom i onda izračunali razliku

$$F\,(b) - F\,(a)\,.$$

Dobijeni numerički rezultat se naziva *određenim integralom* funkcije f i označava se simbolički kao $\int\limits_a^b f\,(x)\,dx$. Tako pojam određenog integrala možemo iskazati sljedećom definicijom.

Definicija 5.3 ***Određeni integral*** *funkcije f od a do b je razlika*

$$\int\limits_a^b f\,(x)\,dx = F\,(b) - F\,(a)\,,$$

gdje je F primitivna funkcija funkcije f. Drugim riječima, određeni integral je neto promjena u primitivnoj funkciji između $x = a$ i $x = b$.

Simbol $\int_a^b f(x)\,dx$ čitamo kao "integral funkcije f od a do b". Brojeve a i b nazivamo *granicama integracije* (a je donja, a b gornja granica integracije).

Dio matematičke analize koji se bavi izračunavanjem neodređenih i određenih integrala naziva se integralnim računom.

Uobičajeno je da se pri izračunavanju određenih integrala koristi simbol $F(x)|_a^b$ koji označava razliku $F(b) - F(a)$, te se piše

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)\,. \tag{5.10}$$

Formula (5.10) se naziva *Newton*[1]*-Leibnitzovom*[2] *formulom* ili *osnovnom formulom integralnog računa*.

Navedimo neke praktične probleme koji uključuju neto promjenu čija su rješenja određeni integrali.

Primjer 5.19 ***(Od graničnih do ukupnih troškova)*** *U određenoj tvornici granični troškovi su* $3(Q-4)^2$ *dolara po jedinici proizvodnje na nivou proizvodnje* Q *jedinica. Za koliko će se povećati ukupni troškovi ako se nivo proizvodnje podigne sa* 6 *jedinica na* 10 *jedinica?*

Rješenje. Očito je da će, prema definiciji određenog integrala, tražena promjena (porast) ukupnih troškova kad se nivo proizvodnje podigne sa 6 jedinica na 10 jedinica biti

$$\begin{aligned} T(10) - T(6) &= \int_6^{10} GT(Q)\,dQ = \int_6^{10} 3(Q-4)^2\,dQ \\ &= \left[(Q-4)^3 + C\right]\Big|_6^{10} = \left[(10-4)^3 + C\right] - \left[(10-6)^3 + C\right] \\ &= (216 + C) - (8 + C) = 208 \end{aligned}$$

dolara. ♣

Napomena 5.3 *Uočimo da se konstanta* C *pojavila u oba izraza,* $F(b)$ *i* $F(a)$*, te da je bila eliminirana pri oduzimanju. To će se uvijek događati kod određenog integrala, tako da se konstanta* C *jednostavno izostavlja pri pisanju primitivne funkcije* F*.*

[1] Isaac Newton, engleski matematičar, 1642-1727.

[2] G. Leibnitz, njemački matematičar, 1646-1716.

Primjer 5.20 ***(Investicije i akumuliranje kapitala)*** *Pretpostavimo da je tok neto investicija dat sa $I(t) = 2\sqrt[3]{t}$ (hiljada dolara za godinu). Koliko će biti akumuliranje kapitala u vremenskom razdoblju između kraja prve i kraja osme godine?*

Rješenje. Podsjetimo se da je akumuliranje kapitala ustvari proces uvećavanja datog kapitala u datom vremenskom periodu, pa je on funkcija vremena t, u oznaci $K(t)$. Stopa (odnosno brzina) akumulacije kapitala je, naravno, data kao izvod funkcije $K(t)$, tj. $\dfrac{dK}{dt}$. No, stopa akumulacije kapitala u nekom vremenu t identički je jednaka *stopi (brzini) neto investicija* $I(t)$, tj.

$$\frac{dK}{dt} \equiv I(t),$$

odakle je

$$K(t) = \int I(t)\,dt.$$

Zbog toga je traženo akumuliranje kapitala

$$\begin{aligned} K(8) - K(1) &= \int_1^8 I(t)\,dt = \int_1^8 2\sqrt[3]{t}dt = 2\int_1^8 t^{\frac{1}{3}}dt = 2\cdot \left.\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_1^8 = \left.\frac{3}{2}t^{\frac{4}{3}}\right|_1^8 \\ &= \left(\frac{3}{2}\cdot 8^{\frac{4}{3}}\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 1^{\frac{4}{3}}\right) = 24 - \frac{3}{2} = 22.5 \end{aligned}$$

hiljada dolara. ♣

Napomena 5.4 *Na osnovu prethodnog primjera lahko je zaključiti da se količina akumuliranog kapitala u vremenu t, mjereno od prvog dana, za bilo koju neto investiciju $I(t)$, može izraziti pomoću određenog integrala na sljedeći način:*

$$\int_0^t I(t)\,dt = K(t)\big|_0^t = K(t) - K(0).$$

Odavde je

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)\,dt,$$

tj. količina kapitala u bilo kojem vremenu t jednaka je zbiru početnog kapitala i ukupno akumuliranog kapitala do tog vremena.

Napomena 5.5 *Istaknimo da se u modeliranju često spominje i pojam* ***bruto investicija****, koju obično označavamo sa* $I_g = I_g(t)$. *Veza između bruto i neto investicija data je jednadžbom*

$$I_g = I_k + \delta K,$$

gdje δ *označava stopu deprecijacije kapitala, a* δK *stopu* ***zamjene investicija****.*

Navedimo sada osnovne osobine određenog integrala.

1. Multiplikativna konstanta k se može izvući ispred određenog integrala:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Određeni integral zbira (razlike) dviju realnih funkcija jednak je zbiru (razlici) određenih integrala tih funkcija:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. Ako se donja i gornja granica integrala podudaraju, određeni integral je jednak nuli,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4. Ako granice integracije zamijene mjesta, određeni integral mijenja predznak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

5. Za bilo koja tri broja a, b i c iz definicionog područja podintegralne funkcije f vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5.2.2 Metodi izračunavanja određenog integrala

Ovdje ćemo pokazati kako se izvode dva metoda koja se najčešće koriste pri izračunavanju određenog integrala, metod smjene i metod parcijalne integracije. Oni se izvode po istim principima kao i kod neodređenog integrala, samo što kod određenog integrala pri tome moramo voditi računa i o granicama novih integrala.

Metod smjene

Pretpostavimo da u integralu $\int_a^b f(x)\,dx$ želimo varijablu x zamijeniti sa $x = g(t)$. Naravno, pri tome smatramo da je funkcija f neprekidna na inetrvalu $[a,b]$ i da je funkcija g, kao i njen izvod g', te funkcija $f(g(t))$ neprekidne na intervalu $[\alpha,\beta]$, gdje je $a = g(\alpha), b = g(\beta)$. Tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Dakle, metod smjene kod određenog integrala izvodi se po istom principu kao i kod neodređenog integrala, uz razliku što se ovdje preračunavaju i granice integriranja za novu varijablu.

Primjer 5.21 *Izračunati integrale: a)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{1+x^4}dx,$ *b)* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx.$

Rješenje. Upotrijebimo metod smjene u oba integrala.
a) Ovdje se prirodno nameće smjena $x^2 = t$, jer je $d\left(x^2\right) = 2xdx$:

$$\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{1+x^4}dx = \left| \begin{array}{c} S: x^2 = t \Rightarrow d\left(x^2\right) = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt \\ \text{Preračunavanje granica:} \\ \left.\begin{array}{c} x = 0 \overset{S:}{\Rightarrow} 0^2 = t \Rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt[4]{3} \overset{S:}{\Rightarrow} \left(\sqrt[4]{3}\right)^2 = t \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{\sqrt[4]{3}} (dx) \to \int_0^{\sqrt{3}} (dt) \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

b) Smjena u ovom integralu je $\ln x = t$, jer je $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx &= \int_1^e \ln x\left(\frac{1}{x}dx\right) \\
&= \left|\begin{array}{c} S: \ln x = t \Rightarrow d(\ln x) = dt \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \\ \text{Preračunavanje granica:} \\ \left.\begin{array}{l} x = 1 \overset{S:}{\Rightarrow} \ln 1 = t \Rightarrow t = 0 \\ x = e \overset{S:}{\Rightarrow} \ln e = t \Rightarrow t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^e (dx) \to \int_0^1 (dt) \end{array}\right| \\
&= \int_0^1 tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Napomena 5.6 *Izračunavanje određenog integrala pomoću smjene može se izvesti i tako da u potpunosti izračunamo neodređeni integral (dakle, nakon vraćanja smjene na početnu varijablu), a onda primijenimo osnovnu fomulu integralnog računa (5.10). Međutim, to je u najvećem broju slučajeva duži put nego što smo to radili u prethodnom primjeru koristeći preračunavanje granica za novu varijablu.*

Metod parcijalne integracije

Kao i kod neodređenog integrala i ovdje je metod parcijalne integracije zasnovan na jednakosti

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Naime, ako pretpostavimo da su u i v diferencijabilne funkcije na intervalu $[a, b]$ i da su natom intervalu izvodi u' i v' neprekidne funkcije, tada imamo da je funkcija uv primitivna funkcija funkcije $u'v + uv'$. Primjenom osnovne formule integralnog računa (5.10), imamo

$$\int_a^b (u'v + uv')\, dx = (uv)\Big|_a^b,$$

odnosno

$$\int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx = (uv)\Big|_a^b,$$

tj.

$$\int_a^b u dv = \left.(uv)\right|_a^b - \int_a^b v du. \tag{5.11}$$

Formula (5.11) je poznata kao formula parcijalne integracije određenog integrala. Razlika u odnosu na istu formulu kod neodređenog integrala je u tome što je neodređeni integral zamijenjen određenim i što je izračunati dio integrala numerička vrijednost

$$\left.uv\right|_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)\,.$$

Primjer 5.22 *Izračunati integrale: a)* $\int_{-2}^{2} xe^{-x}dx$, *b)* $\int_{1}^{2} x\ln(x+1)\,dx$.

Rješenje. U oba slučaja (kako smo to vidjeli kod neodređenog integrala) može se primijeniti metod parcijalne integracije.

$$\text{a)}\ \int_{-2}^{2} xe^{-x}dx = \left|\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right| = \left.\left(-xe^{-x}\right)\right|_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2} e^{-x}dx$$

$$= -2e^{-2} + (-2)\,e^{2} - \left.\left(e^{-x}\right)\right|_{-2}^{2} = -2e^{-2} - 2e^{2} - \left(e^{-2} - e^{2}\right)$$

$$= -3e^{-2} - e^{2}.$$

$$\text{b)}\ \int_{1}^{2} x\ln(x+1)\,dx = \left|\begin{array}{c} u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}dx$$

$$= \frac{4}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1}dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx\right)$$

$$= 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\int_1^2 (x-1)\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx\right)$$

$$= 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\right|_1^2$$

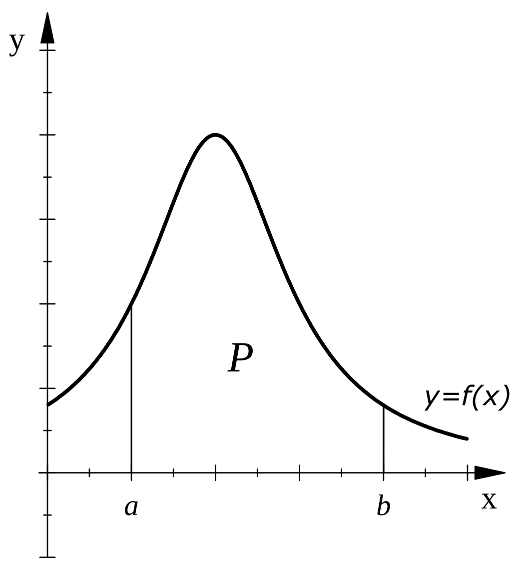
$$= 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2^2}{2} - 2 + \ln(2+1)\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1)\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{4}. \quad \clubsuit$$

5.2.3 Primjena određenog integrala u izračunavanju površine lika u ravni

Postoji iznenađujuća veza između određenog integrala i geometrijskog koncepta površine lika u ravni. Naime, ako je funkcija $y = f(x)$ nenegativna i integrabilna na $[a, b]$, tj. $f(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$ i postoji određeni integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, tada je površina krivolinijskog trapeza ograničenog: lukom krive $y = f(x)$, pravima $x = a, x = b$ i intervalom $[a, b]$ ose Ox, data sa

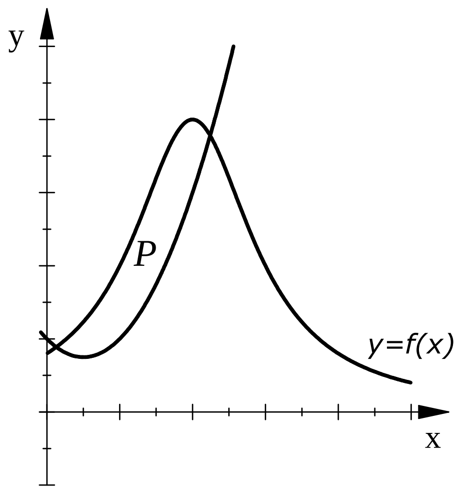
$$P = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$



Slika I1

U slučaju kada treba odrediti površinu ravnog lika između lukova krivih $y = f(x)$ i $y = g(x)$, onda je (v. Sliku I2)

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$



Slika I2

Primjer 5.23 *Izračunati površinu ravnog lika ograničenog linijama*

$$y = x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

Rješenje. Budući da krivolinijski trapez čija se površina traži (v. Sliku I3) nije ograničen odozgo istom krivom, onda je neophodno razdvojiti ga na uniju dva trapeza od kojih je svaki ponaosob ograničen odozgo odgovarajućom krivom. Zbog toga je neophodno prvo odrediti apcisu presječne tačke krivih $y = x$ i $y = \dfrac{1}{x}$, rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} y &= x, \\ y &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

odnosno jednadžbe

$$x = \frac{1}{x},$$

odakle je $x = \pm 1$. Iz uvjeta zadatka vidimo da u obzir dolazi samo $x = 1$. Prema Slici I3, imamo, dakle, da je $P = P_1 + P_2$, gdje je

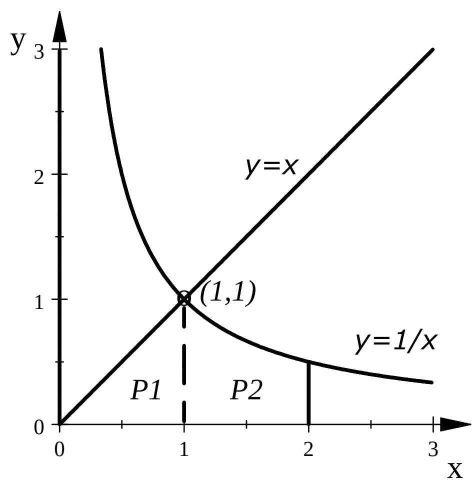
$$P_1 = \int_0^1 x dx \quad \text{i} \quad P_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

Imamo

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}, \\ P_2 &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \,|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2, \end{aligned}$$

pa je

$$P = \frac{1}{2} + \ln 2. \quad \clubsuit$$



Slika I3

Primjer 5.24 *Izračunati površinu ravnog lika ograničenog linijama*

$$y = x^3 \quad i \quad y = x^2.$$

Rješenje. Odredimo tačke presjeka datih krivih (v. Sliku I4) rješavanjem jednadžbe

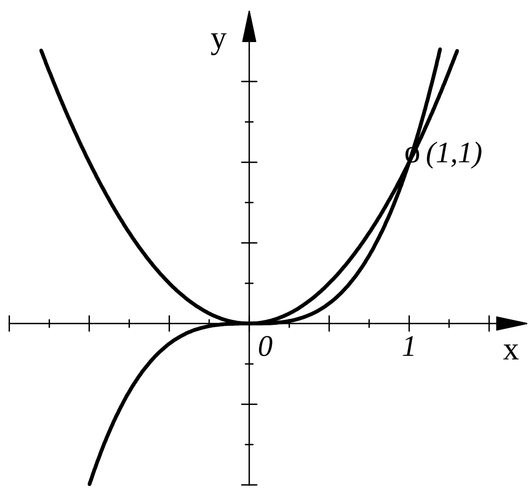
$$x^3 = x^2,$$

odnosno

$$x^2(x-1) = 0.$$

Odavde je $x = 0$ ili $x = 1$. Odgovarajuće presječne tačke datih krivih su $(0,0)$ i $(1,1)$. Primijetimo da, za $0 \leq x \leq 1$, graf funkcije $y = x^3$ leži ispod grafa funkcije $y = x^2$. Zbog toga je tražena površina

$$P = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}. \quad \clubsuit$$



Slika I4

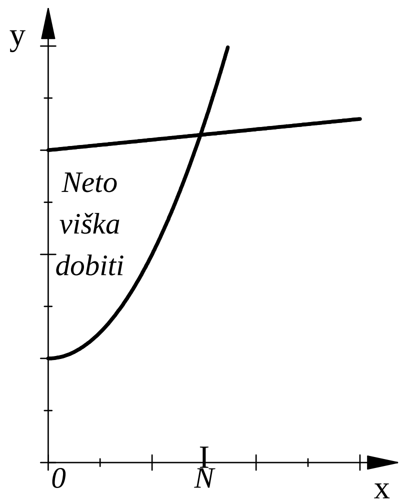
5.2.4 Primjene određenog integrala u ekonomiji

Već smo vidjeli kako se određeni integral može primijeniti u slučaju izračunavanja promjene ukupnih troškova kada su poznati granični troškovi, kao i u slučaju investicija i akumulacije kapitala. Sada ćemo razmotriti još neke aspekte primjene određenog integrala u biznisu i ekonomiji.

1. Neto viška dobiti

Pretpostavimo da će nakon x godina od danas dva investicijska plana generirati dobit brzinama $GD_1(x)$ i $GD_2(x)$ dolara po godini, respektivno, i da će u sljedećih

N godina brzina $GD_2(x)$ biti veća od brzine $GD_1(x)$, kako je to ilustrirano na Slici I5.



Slika I5

Razlika $GD_2(x) - GD_1(x)$ predstavlja brzinu kojom dobit generirana drugim planom prekoračuje dobit generiranu prvim planom, a neto višak dobiti generiran drugim planom u toku sljedećih N godina je određeni integral ove stope promjene od $x = 0$ do $x = N$, tj.

$$\text{Neto viška dobiti} = \int_0^N [GD_2(x) - GD_1(x)]\, dx.$$

Ovo se geometrijski interpretira kao površina lika između krivih $GD_2(x)$ i $GD_1(x)$ od $x = 0$ do $x = N$.

Primjer 5.25 *Pretpostavimo da će u sljedećih x godina jedan investicijski plan generirati dobit brzinom $GD_1(x) = 30 + x^2$ dolara godišnje, dok će drugi plan generirati dobit brzinom $GD_2(x) = 170 + 4x$ dolara godišnje.*

a) Koliko će godina drugi plan biti profitabilniji od prvog?

b) Izračunati neto viška dobiti ako se investira u drugi plan umjesto u prvi za vremenski period dobijen u dijelu a).

Rješenje. Imamo situaciju analognu situaciji na Slici I5, prema kojoj je i ovdje brzina $GD_2(x)$ kojom drugi plan generira dobit inicijalno veća od brzine $GD_1(x)$ kojom prvi plan generira dobit.

a) Drugi plan će biti profitabilniji sve dok ne bude $GD_1(x) = GD_2(x)$, tj.

$$30 + x^2 = 170 + 4x,$$

odnosno

$$x^2 - 4x - 140 = 0,$$

odakle je $x = 14$ ($x = -10$ ne dolazi u obzir, jer nema ekonomskog smisla). Dakle, u prvih 14 godina će drugi plan biti profitabilniji od prvog.

b) Za $0 \leq x \leq 14$ brzina kojom dobit generirana drugim planom prekoračuje prvi plan je $GD_2(x) - GD_1(x)$ dolara po godini. Dakle, neto viška dobiti u toku četrnaestogodišnjeg perioda ako se investira u drugi plan je određeni integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{14} [GD_2(x) - GD_1(x)]\,dx &= \int_0^{14} \left[(170 + 4x) - \left(30 + x^2\right)\right] dx \\
&= \int_0^{14} \left(140 + 4x - x^2\right) dx \\
&= \left(140x + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{14} = 1437.33 \ (\$)\,. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

2. Neto dobit od industrijske opreme

Neto dobit koju stvara industrijska mašina u toku nekog vremenskog perioda je razlika između brzine ukupnog prihoda koji ta mašina ostvari i brzine ukupnih troškova poslovanja i servisiranja mašine. U primjeru koji slijedu vidjet ćemo da se neto dobit mašine izračunava kao određeni integral i interpretira se kao površina lika između dvije krive.

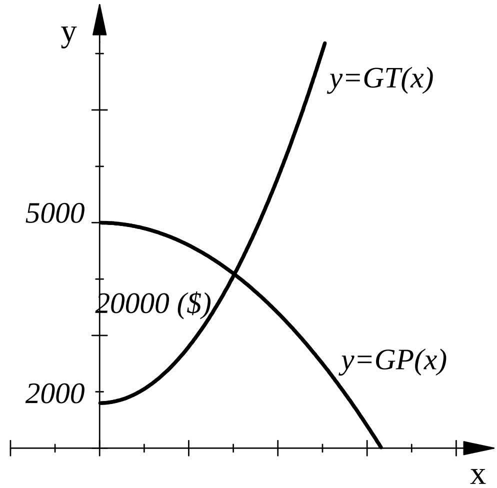
Primjer 5.26 *Pretpostavimo da, kad je x godina stara, industrijska mašina generira prihod brzinom $GP(x) = 5000 - 20x^2$ dolara godišnje i stvara troškove koji se akumuliraju brzinom $GT(x) = 2000 + 10x^2$ dolara godišnje.*

a) Koliko je godina korištenje mašine profitabilno?

b) Kolika je neto dobit koju stvara mašina u vremenskom periodu dobijenom u dijelu a)?

c) Interpretirati neto dobit u dijelu b) kao površinu područja između dvije krive.

Rješenje. Promatrajmo Sliku I6 na kojoj su predstavljene krive $y = GP(x)$ i $GT(x)$.



Slika I6

a) Korištenje mašine je profitabilno sve dok je brzina kojom se stvara ukupni prihod veća od brzine akumulacije ukupnih troškova koje stvara ta mašina, tj. sve dok ne bude $GP(x) = GT(x)$, odnosno

$$5000 - 20x^2 = 2000 + 10x^2,$$

odakle je $x = 10$ godina.

b) Razlika $GP(x) - GT(x)$ predstavlja brzinu promjene neto dobiti u toku prvih deset godina koju stvara mašina. To implicira da je neto dobit u prvih deset godina predstavljena određenim integralom

$$\begin{aligned}\int_0^{10} [GP(x) - GT(x)]\,dx &= \int_0^{10} \left[\left(5000 - 20x^2\right) - \left(2000 + 10x^2\right)\right] dx \\ &= \int_0^{10} \left(3000 - 30x^2\right) dx = \left(3000x - 10x^3\right)\Big|_0^{10} \\ &= 20000 \ (\$)\,.\end{aligned}$$

c) U geometrijskom smislu, neto dobit industrijske mašine je jednaka površini lika između krivih $y = GP(x)$ i $y = GT(x)$ od $x = 0$ do $x = 10$. ♣

3. Prosječna vrijednost ekonomske funkcije

Općenito, za proizvoljnu neprekidnu funkciju $f(x)$ na nekom intervalu $[a, b]$, definiramo njenu srednju (prosječnu) vrijednost na tom intervalu formulom

$$\text{Srednja vrijednost funkcije} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ilustrirajmo primjenu formule prosječne vrijednosti na određenoj ekonomskoj funkciji.

Primjer 5.27 ***(Prosječna akumulacija dobiti)*** *Pretpostavimo da nam je ukupna dobit data kao funkcija vremena t, koje se mjeri od sadašnjeg trenutka, u obliku*

$$D(t) = (t+1)\sqrt{t}$$

u hiljadama dolara. Prognozirati prosječnu godišnju dobit u naredne 4 godine.

Rješenje. Prosječna godišnja dobit u naredne 4 godine je srednja vrijednost date funkcije ukupne dobiti na intervalu $[0, 4]$, tj.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\int_0^4 (t+1)\sqrt{t}dt &= \frac{1}{4}\int_0^4 (t+1)\,t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\int_0^4 \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4 \\ &= \frac{1}{10}\cdot 2^5 + \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{68}{15} \simeq 4.533 \end{aligned}$$

hiljade dolara. ♣

5.2.5 Nesvojstveni integrali

U tzv. nesvojstvene ili neprave integrale spadaju integrali s beskonačnim granicama i integrali kod kojih je neograničena podintegralna funkcija. Razmotrimo svaki od tih slučajeva posebno.

Integrali s beskonačnim granicama

U ovu kategoriju spadaju sljedeći integrali: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

1. $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$

U slučaju ovog integrala pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $[a, +\infty)$ i da postoji integral $\int\limits_{a}^{\alpha} f(x)\,dx$ za svako $\alpha \geq a$. Dati integral definiramo kao graničnu vrijednost

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \int\limits_{a}^{\alpha} f(x)\,dx$$

ukoliko postoji ta granična vrijednost i tada za nesvojstveni integral kažemo da je *konvergentan* (ili da *konvergira*). Ako ta granična vrijednost ne postoji, onda je ovaj nesvojstveni integral *divergentan* i u suštini je besmislen.

Primjer 5.28 *Izračunati integral* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$.

Rješenje. Prema navedenom, vrijedi

$$\begin{aligned}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx &= \lim_{\alpha \to +\infty} \int\limits_{1}^{\alpha} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{1}^{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

2. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

Slično kao i u prethodnom slučaju, ovaj integral definiramo kao

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to -\infty} \int\limits_{\beta}^{b} f(x)\,dx$$

ukoliko postoji ta granična vrijednost.

Primjer 5.29 *Izračunati integral* $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}dx$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\beta \to -\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_{\beta}^{-1} \\ &= \lim_{\beta \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta^2} \right) = -\frac{1}{2}. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$

Ovaj se integral može svesti na izračunavanje integrala tipa 1. i 2. Naime,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{5.12}$$

Primjer 5.30 *Izračunati integral* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2} dx.$

Rješenje. Na osnovu (5.12) imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2} dx.$$

Izračunajmo pojedinačno ove integrale.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2} dx &= \left| \begin{array}{c} S : x = \sqrt{2}t \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty \end{array} \right| \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{2}dt}{2t^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \lim_{\beta \to -\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\beta}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{\beta \to -\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} t \Bigg|_{\beta}^{0} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\beta \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.\end{aligned}$$

Analogno se dobije $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$, pa je $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$. ♣

Integrali neograničene funkcije

U ovu kategoriju spadaju integrali čija je podintegralna funkcija neograničena na intervalu integracije $[a,b]$. Razmotrit ćemo nekoliko slučajeva koji se svode na situaciju kada je podintegralna funkcija neograničena u okolini jedne od krajnjih tačaka intervala integracije ili je neograničena u okolini neke unutarnje tačke intervala integracije.

4. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, pri čemu je funkcija f neograničena u okolini tačke a, ali je ona integrabilna na $[a+\varepsilon, b]$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$

Ukoliko postoji granična vrijednost $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, onda definiramo

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

i kažemo da integral $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *konvergira.* U suprotnom kažemo da taj integral *divergira.*

Primjer 5.31 *Izračunati integral* $\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Rješenje. Podintegralna funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ nije definirana u lijevoj krajnjoj tački $x=-2$ intervala integracije $[-2,0]$ i u okolini te tačke je neograničena, tj. vrijedi $\lim\limits_{x\downarrow -2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$. Dakle, integral je nesvojstveni i prvo ispitajmo da li on konvergira:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{-2+\epsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \left|\ S: x=2t \Rightarrow dx=2dt\ \right| \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{(-2+\epsilon)}^{(0)}\frac{2dt}{\sqrt{4-4t^2}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{(-2+\epsilon)}^{(0)}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ (\arcsin t)\ \Big|_{(-2+\varepsilon)}^{(0)} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2+\varepsilon}^{0} \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\arcsin\frac{0}{2}-\arcsin\frac{-2+\varepsilon}{2}\right) = 0-\arcsin(-1) \\
&= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Pošto postoji granična vrijednost $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{-2+\epsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$, imamo da je ona jednaka promatranom integralu, tj. vrijedi

$$\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{-2+\epsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}. \quad \clubsuit$$

5. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, pri čemu je funkcija f neograničena u okolini tačke b, ali je ona integrabilna na $[a, b-\varepsilon]$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$

Analogno prethodnom slučaju, ukoliko postoji granična vrijednost $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, onda definiramo

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

i kažemo da integral $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *konvergira.* U suprotnom kažemo da taj integral *divergira.*

Primjer 5.32 *Izračunati integral* $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

Rješenje. Podintegralna funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ nije definirana u desnoj krajnjoj tački $x = 2$ intervala integracije $[0,2]$ i u okolini te tačke je neograničena, tj. vrijedi $\lim\limits_{x\uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$. Prema tome, dati integral je nesvojstveni i prvo ispitajmo da li on konvergira:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin 0\right) \\
&= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}. \quad \clubsuit$$

6. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, pri čemu je funkcija f neograničena i u okolini tačke a i u okolini tačke b, ali je ona integrabilna na $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ za sve dovoljno male i pozitivne ε_1 i ε_2

U ovom se slučaju, za $a < c < b$, promatrani integral može svesti na zbir dva nesvojstvena integrala

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

od kojih je prvi integral slučaja 4, a drugi integral slučaja 5.

Primjer 5.33 *Izračunati integral* $\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

Rješenje. Ovdje je podintegralna funkcija neograničena samo u krajnjim tačkama intervala integracije, pa je (uzmemo li $c=0$), na osnovu prethodna dva primjera,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int_{-2}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

7. $\int_a^b f(x)\,dx$, pri čemu je funkcija f neograničena u okolini tačke $c\in(a,b)$

U ovom slučaju integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako i samo ako konvergiraju oba integrala, $\int_a^c f(x)\,dx$ i $\int_c^b f(x)\,dx$, od kojih je prvi integral slučaja 5, a drugi je integral slučaja 4.

Primjer 5.34 *Izračunati integral* $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx.$

Rješenje. Podintegralna funkcija je neograničena u okolini tačke $x=0$, pa je dati integral nesvojstveni i može se napisati u obliku zbira

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}= \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}= \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty,\end{aligned}$$

vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = +\infty. \qquad \clubsuit$$

Napomena 5.7 *Posljednji primjer je vrlo poučan. Naime, ako se ne uoči da je podintegralna funkcija neograničena u okolini tačke $x = 0$, onda se pogrešnom primjenom osnovne formule integralnog računa, može doći do netačnog zaključka:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2. \qquad !!!!!$$

To nam sugerira da ***kod svakog određenog integrala prvo treba ustanoviti da li je on nesvojstveni integral ili nije i tek onda pristupiti njegovom rješavanju u skladu s dobijenim zaključkom****.*

Napomena 5.8 *Uočimo da se sve druge situacije neograničenosti podintegralne funkcije mogu svesti na neki od promatranih slučajeva.*

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Izračunati sljedeće integrale (1-12):

1. a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\left(x^3 - 2x + 5\right) dx$, b) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}+2} dx$, c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3^{x-1} + 4^x}{12^x} dx$.

2. a) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x+5} dx$, b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx$, c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{e^{2x+1}} dx$.

3. a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^6+1} dx$, b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$, c) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x dx$.

4. a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x+1} dx$, b) $\displaystyle\int_1^{\ln 3} x^2 e^{-x} dx$, c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$.

5. a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$, b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x-1}{x^3-1}dx$, c) $\displaystyle\int_1^e \ln\frac{e}{x}dx$.

6. a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6t+1}}dt$, b) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$, c) $\displaystyle\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}dx$.

7. a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{xdx}{x^2-3x+2}$, b) $\displaystyle\int_0^1 \left(t^3+t\right)\sqrt{t^4+2t^2+1}dt$.

8. a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^x}{e^x+2}dt$, b) $\displaystyle\int_1^{\ln 5} \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x-1}}dx$, c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

9. a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$, c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

10. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x dx$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-2x}dx$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

11. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\ln x}dx$.

12. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3-2x}$, b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$, c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x}$.

13. Odrediti površinu ravnog lika ograničenog grafovima funkcija

$$f(x) = x^2 + 2x \quad \text{i} \quad g(x) = x.$$

14. Odrediti površinu lika ograničenog grafom funkcije $y(x) = x^2 - 2x - 8$, Ox osom i pravima $x = 4$ i $x = 5$.

15. Odrediti površinu lika između krivih $y = x^2 - 2x$ i $y = -x^2 + 4$.

16. U određenoj tvornici granični troškovi su $(2Q+1)e^{2Q}$ dolara po jedinici proizvodnje na nivou proizvodnje Q jedinica. Za koliko će se povećati ukupni troškovi ako se nivo proizvodnje podigne sa 5 jedinica na 12 jedinica?

17. Pretpostavimo da je tok neto investicija dat sa $I(t) = 2t\sqrt{t+1}$ (hiljada dolara za godinu). Koliko će biti akumuliranje kapitala u vremenskom razdoblju između kraja prve i kraja pete godine?

18. Pretpostavimo da će u sljedećih x godina jedan investicijski plan generirati dobit brzinom $GD_1(x) = 100 + x^2$ dolara godišnje, dok će drugi plan generirati dobit brzinom $GD_2(x) = 220 + 2x$ dolara godišnje.

a) Koliko će godina drugi plan biti profitabilniji od prvog?

b) Izračunati neto viška dobiti ako se investira u drugi plan umjesto u prvi za vremenski period dobijen u dijelu a).

19. Pretpostavimo da će u sljedećih x godina jedan investicijski plan generirati dobit brzinom $GD_1(x) = 60e^{0.12x}$ dolara godišnje, dok će drugi plan generirati dobit brzinom $GD_2(x) = 160e^{0.08x}$ dolara godišnje.

a) Koliko će godina drugi plan biti profitabilniji od prvog?

b) Izračunati neto viška dobiti ako se investira u drugi plan umjesto u prvi za vremenski period dobijen u dijelu a).

20. Pretpostavimo da, kad je x godina stara, industrijska mašina generira prihod brzinom $GP(x) = 6025 - 8x^2$ dolara godišnje i stvara troškove koji se akumuliraju brzinom $GT(x) = 4681 + 13x^2$ dolara godišnje.

a) Koliko je godina korištenje mašine profitabilno?

b) Kolika je neto dobit koju stvara mašina u vremenskom periodu dobijenom u dijelu a)?

Poglavlje 6

Diferencijalne jednadžbe

6.1 Osnovni pojmovi

Očigledno za funkciju $y = e^{x^2}$ vrijedi da je njen izvod $y' = 2xe^{x^2}$, zbog čega je

$$y' - 2xy = 0. \tag{6.1}$$

Jednakost (6.1) vrijedi za sve $x \in (-\infty, +\infty)$ i ona predstavlja jednu relaciju oblika $F(x, y, y') = 0$, tj. relaciju između neovisne varijable x, funkcije y i njenog izvoda y'. Naravno, možemo razmatrati i obrnuti problem, tj. odrediti one funkcije $y = y(x)$ koje, zajedno sa svojim izvodom, zadovoljavaju relaciju (6.1) za sve vrijednosti neovisne varijable x iz određenog (datog) intervala. Samim tim relaciju (6.1) smatramo jednadžbom, koju ćemo zvati *diferencijalnom jednadžbom*, s nepoznatom funkcijom y koju treba odrediti. No, u jednadžbi takvog tipa mogu se pojaviti i izvodi (ili diferencijali) višeg reda. Zbog toga ćemo navesti opću definiciju diferencijalne jednadžbe.

Definicija 6.1 *Jednadžba oblika*

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{6.2}$$

gdje je F realna funkcija sa $n+2$ varijable (tj. $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$) i gdje je y nepoznata funkcija koja se traži, naziva se ***običnom diferencijalnom jednadžbom n-tog reda****.*

Termin "obična" je zbog činjenice da postoje i tzv. parcijalne diferencijalne jednadžbe, odnosno jednadžbe s nepoznatom funkcijom više od jedne varijable i s njenim parcijalnim izvodima. Ovdje će biti razmatrane samo obične diferencijalne jednadžbe i ubuduće ćemo riječ "obična" izostavljati.

Također, uočimo da je red diferencijalne jednadžbe jednak redu najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji figurira u jednadžbi. Tako je

$$y''' - 2xy'' + (\sin x + 1)\, y = \cos x$$

diferencijalna jednadžba trećeg reda, dok je

$$\left(x^2 - 1\right) y'' - 2xy = xe^x$$

diferencijalna jednadžba drugog reda.

Definicija 6.2 *Svaka funkcija $y = y\,(x)$ koja zadovoljava jednadžbu (6.2), tj. da je*

$$F\left(x, y\,(x)\,, y'\,(x)\,, ..., y^{(n)}\,(x)\right) = 0,$$

naziva se ***rješenjem*** *ili* ***integralom*** *te diferencijalne jednadžbe.*

Vrlo često se pri rješavanju neke diferencijalne jednadžbe ne dobije eksplicitni oblik nepoznate funkcije, nego implicitni, npr. $G\,(x, y) = 0$. Obično se i takvo rješenje naziva *integralom* ili *integralnom krivom diferencijalne jednadžbe.*

Budući da u diferencijalnoj jednadžbi n-tog reda treba izvršiti n puta integriranje, dobijeno rješenje će ovisiti ne samo o neovisnoj verijabli, nego i o n konstanti, $C_1, ..., C_n$, tj. bit će funkcija oblika $y = \varphi\,(x, C_1, ..., C_n)$. Takvo ćemo rješenje zvati *općim rješenjem* diferencijalne jednadžbe. Dodijelimo li svim tim konstantama određene vrijednosti, dobit ćemo jedno posebno rješenje diferencijalne jednadžbe, koje nazivamo *partikularnim rješenjem* ili *partikularnim integralom* te jednadžbe. Ako iz dobijenog općeg rješenja želimo odrediti partikularno rješenje, neophodno je jednadžbi pridodati uvjete:

$$y\,(x_0) = y_0, y'\,(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}\,(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

pri čemu brojeve $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ nazivamo *početnim uvjetima.*
U slučaju diferencijalne jednadžbe prvog reda opće rješenje je oblika $y = \varphi\,(x, C)$, što predstavlja jednoparametarsku familiju funkcija (krivih), dok za $C = a$ se dobije jedna funkcija (partikularni integral), odnosno jedna kriva (partikularna kriva) iz te familije.

Ovdje će biti predstavljena samo tri tipa diferencijalne jednadžbe prvog reda: diferencijalna jednadžba u kojoj je moguće izvršiti razdvajanje varijabli, linearna diferencijalna jednadžba i Bernoullijeva diferencijalna jednadžba.

6.1.1 Metod razdvajanja varijabli

Ovaj metod podrazumijeva da se u datoj diferencijalnoj jednadžbi, ako je to uopće moguće izvesti, varijable x i y i njihovi diferencijali odvoje i to tako, što je najlakše, da jedna varijabla i njen diferencijal egzistiraju (recimo) samo na lijevoj strani znaka jednakosti, a druga varijabla i njen diferencijal samo na desnoj strani.

Pretpostavimo da datu diferencijalnu jednadžbu prvog reda možemo svesti na oblik

$$F(x)\,G(y)\,dx + H(x)\,K(y)\,dy = 0. \tag{6.3}$$

Odavde je (prvo napravimo razdvajanje diferencijala dx i dy)

$$F(x)\,G(y)\,dx = -H(x)\,K(y)\,dy,$$

a nakon dijeljenja s $H(x)$ i $G(y)$ (uz uvjete $H(x) \neq 0$ i $G(y) \neq 0$) imamo

$$\frac{F(x)}{H(x)}dx = -\frac{K(y)}{G(y)}dy.$$

Sada smo izvršili potpuno razdvajanje varijabli i možemo pristupiti integriranju obje strane ove jednakosti, nakon čega dobijamo opći integral date jednadžbe:

$$\int \frac{F(x)}{H(x)}dx = -\int \frac{K(y)}{G(y)}dy + C,$$

odnosno, ako je $f(x) = \int \frac{F(x)}{H(x)}dx$ i $g(x) = \int \frac{K(y)}{G(y)}dy$,

$$f(x) + g(y) = C.$$

Primjer 6.1 *Data je diferencijalna jednadžba*

$$(x-2)\,ydx - 3x^2(y+2)\,dy = 0.$$

a) Odrediti opće rješenje ove jednadžbe.
b) Naći ono rješenje date jednadžbe za koje je $y(1) = 1$.

Rješenje. a) Data jednadžba je oblika (6.3), pa se može izvršiti razdvajanje varijabli. Naime, imamo

$$(x-2)\,ydx = 3x^2(y+2)\,dy,$$

odnosno

$$\frac{x-2}{x^2}dx = 3\frac{y+2}{y}dy \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Integrirajmo obje strane posljednje jednadžbe

$$\int \frac{x-2}{x^2}dx = 3\int \frac{y+2}{y}dy.$$

Izračunavanjem integrala, imamo

$$\ln|x| + \frac{2}{x} = 3y + 6\ln|y| + C,$$

odnosno

$$\ln\frac{|x|}{y^6} = 3y - \frac{2}{x} + C,$$

ili, drugačije zapisano,

$$x = C_1 y^6 e^{3y-\frac{2}{x}}, \tag{6.4}$$

gdje je $C_1 = e^C$. Sa (6.4) dato je opće rješenje date diferencijalne jednadžbe.

b) Zamjenom $x = 1$ i $y = 1$ u općem rješenju, dobije se $C_1 = e^{-1}$, te je traženo partikularno rješenje

$$x = y^6 e^{3y-\frac{2}{x}-1}. \quad \clubsuit$$

Primjer 6.2 *Naći ono rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$\left(1-x^2\right)y' + y\sqrt{1-x^2} - xy = 0$$

za koje je $y\left(0\right) = 1$.

Rješenje. Data se jednadžba može napisati u obliku

$$\left(1-x^2\right)dy = y\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)dx,$$

odnosno

$$\frac{dy}{y} = \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx.$$

Odavde je

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx,$$

a nakon izračunavanja integrala imamo

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| - \arcsin x + C,$$

odnosno

$$y\sqrt{1-x^2} = Ce^{-\arcsin x}$$

je opće rješenje date jednadžbe za $x \in (-1,1)$. Zamjenom $x=0$ i $y=1$ u općem rješenju, dobije se $C=1$, pa je traženo partikularno rješenj

$$y = \frac{1}{e^{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}. \quad \clubsuit$$

6.1.2 Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda

Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda je jednadžba oblika

$$y' + f(x)\,y = g(x). \tag{6.5}$$

Može se riješiti na nekoliko načina. Jedan od njih je da datu jednadžbu pomnožimo s $e^{\int f(x)dx}$. Nakon toga dobije se jednadžba

$$y'e^{\int f(x)dx} + f(x)\,e^{\int f(x)dx}y = g(x)\,e^{\int f(x)dx},$$

odnosno

$$\left(ye^{\int f(x)dx}\right)' = g(x)\,e^{\int f(x)dx},$$

odakle je

$$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)\,e^{\int f(x)dx}dx + C.$$

Konačno, imamo opće rješenje jednadžbe (6.5) u eksplicitnom obliku

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)\,e^{\int f(x)dx}dx + C\right]. \tag{6.6}$$

Primjer 6.3 *Naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' - \frac{x}{x^2+1}y = x+1.$$

Rješenje. Ovo je linearna diferencijalna jednadžba. Da bismo iskoristili formulu (6.6), izračunajmo odgovarajuće integrale.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= -\int \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int d\left[\ln\left(x^2+1\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \\ &= \ln\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Odavde je

$$e^{\int f(x)dx} = e^{\ln\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}} = \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

i

$$e^{-\int f(x)dx} = e^{\ln\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\int g(x)\, e^{\int f(x)dx} dx &= \int (x+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\
&= \int d\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),
\end{aligned}$$

pa je opće rješenje date jednadžbe

$$y = \sqrt{x^2+1}\left[\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C\right]. \quad \clubsuit$$

6.1.3 Bernoullijeva jednadžba

Jednadžba oblika

$$y' + f(x)\, y = g(x)\, y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \tag{6.7}$$

se naziva *Bernoullijevom diferencijalnom jednadžnom.* Budući da ova jednadžba dosta liči na linearnu diferencijalnu jednadžbu, za očekivati je da se ona na neki način može svesti na linearnu. To se zaista može i postići, nakon što se data jednadžba prvo podijeli sa y^{α}:

$$y^{-\alpha} y' + f(x)\, y^{1-\alpha} = g(x), \tag{6.8}$$

a potom uvede smjena

$$y^{1-\alpha} = z, \tag{6.9}$$

gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Diferenciranjem jednakosti (6.9), imamo

$$(1-\alpha)\, y^{-\alpha} y' = z',$$

odnosno

$$y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'. \tag{6.10}$$

Zamjenom (6.10) u (6.8), dobijamo

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + f(x)\,z = g(x)\,,$$

tj.

$$z' + (1-\alpha)\,f(x)\,z = (1-\alpha)\,g(x)\,,$$

a ovo je linearna diferencijalna jednadžba.

Primjer 6.4 *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$$

Rješenje. U pitanju je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba jer se može napisati u obliku

$$y' - \frac{4}{x}y = xy^{\frac{1}{2}}.$$

Podijelimo posljednju jednadžbu sa $y^{\frac{1}{2}}$:

$$y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = x. \tag{6.11}$$

Uvedimo smjenu $y^{\frac{1}{2}} = z$, gdje je $z = z(x)$ nova nepoznata funkcija. Nakon diferenciranja imamo

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = z',$$

odnosno

$$y^{-\frac{1}{2}}y' = 2z'.$$

Zamjenom u jednadžbi (6.11), dobijamo linearnu jednadžbu

$$2z' - \frac{4}{x}z = x,$$

odnosno

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Nađimo njeno opće rješenje. Kako je

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| = \ln x^2,$$

to je

$$\begin{aligned} z &= e^{\ln x^2}\left(\int \frac{x}{2} e^{-\ln x^2} dx + C\right) = x^2\left(\int \frac{x}{2}\cdot x^{-2} dx + C\right) \\ &= x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right). \end{aligned}$$

Sada je, zbog $y = z^2$,

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

opće rješenje date jednadžbe. ♣

6.2 Primjena diferencijalnih jednadžbi u ekonomiji

Pokažimo prvo kako se metod razdvajanja varijabli u diferencijalnoj jednadžbi prvog reda može primijeniti u ekonomiji. Ranije smo vidjeli da je mjera sposobnosti ekonomske veličine y da reagira na promjenu druge ekonomske veličine x iskazana koeficijentom elastičnosti $E_{y,x}$. No, često nam je potrebno riješiti obrnut problem, tj. kad je poznat koeficijent elastičnosti $E_{y,x}(x) = f(x)$ neke funkcije $y = y(x)$, treba odrediti tu funkciju. Koristeći Marshallovu formulu (3.20), tj.

$$E_{y,x} = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

imamo

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = f(x),$$

što je diferencijalna jednadžba prvog reda u kojoj je moguće razdvojiti varijable na sljedeći način

$$\frac{dy}{y} = \frac{f(x)}{x}dx.$$

Primjenom integrala na obje strane posljednje jednakosti, dobijemo

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{f(x)}{x}dx,$$

odakle je

$$\ln|y| = \int \frac{f(x)}{x}dx + \ln|C|.$$

Odavde je

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \int \frac{f(x)}{x}dx,$$

odnosno
$$y = Ce^{\int \frac{f(x)}{x} dx}.$$

Tako smo dobili eksplicitni oblik tražene funkcije y.

Primjer 6.5 *Odrediti funkciju potražnje $Q = Q(p)$ ako je uz jediničnu cijenu potražnja jednaka* 28 *i vrijedi*
$$E_{Q,p} = \frac{2p^2 + p}{p^2 + p - 30}.$$

Rješenje. Prema Marshallovoj formuli (3.20), u ovom slučaju imamo
$$\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{2p^2 + p}{p^2 + p - 30},$$

odnosno (nakon skraćivanja sa p obje strane posljednje jednakosti)
$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{2p + 1}{p^2 + p - 30},$$

što je diferencijalna jednadžba prvog reda. Nakon razdvajanja varijabli, dobije se
$$\frac{dQ}{Q} = \frac{2p + 1}{p^2 + p - 30} dp,$$

pa imamo
$$\int \frac{dQ}{Q} = \int \frac{2p + 1}{p^2 + p - 30} dp.$$

Kako je $(2p + 1)\,dp = d\left(p^2 + p - 30\right)$, vrijedi
$$\begin{aligned} \int \frac{2p + 1}{p^2 - 9p - 10} dp &= \int \frac{d\left(p^2 + p - 30\right)}{p^2 + p - 30} \\ &= \ln\left|p^2 + p - 30\right| + \ln|C|, \end{aligned}$$

pa je
$$\ln|Q| = \ln\left|\left(p^2 + p - 30\right) C\right|,$$

tj. opće rješenje dobijene diferencijalne jednadžbe je
$$Q = \left(p^2 + p - 30\right) C.$$

Iz uvjeta zadatka je $Q(1) = 28$, na osnovu čega iz općeg rješenja (za $p = 1$ i $Q = 28$), dobijamo
$$28 = -28C,$$

odnosno $C = -1$, pa je tražena funkcija potražnje

$$Q(p) = -p^2 - p + 30. \quad \clubsuit$$

Primjer 6.6 *Odredite funkciju ukupnih troškova kao funkciju proizvodnje* Q *ako je*

$$E_{\overline{T},Q} = \frac{Q}{2(Q+8)},$$

gdje je $\overline{T}$ *prosječni trošak, a uz jediničnu proizvodnju ukupni troškovi iznose* 3.

Rješenje. Prema datim podacima, koristeći Marshallovu formulu, imamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{Q}{\overline{T}}\frac{d\overline{T}}{dQ} = \frac{Q}{2(Q+8)},$$

iz koje, nakon razdvajanja varijabli, dobijamo

$$\frac{d\overline{T}}{\overline{T}} = \frac{1}{2(Q+8)}dQ,$$

pa je

$$\int \frac{d\overline{T}}{\overline{T}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(Q+8)}dQ,$$

odnosno

$$\ln \overline{T} = \frac{1}{2}\ln(Q+8) + \ln C,$$

tj.

$$\overline{T} = C\sqrt{Q+8}.$$

Ukupni troškovi su dati sa

$$T(Q) = Q\overline{T}(Q) = CQ\sqrt{Q+8},$$

odakle se, zamjenom $Q = 1$ i $T(1) = 3$, dobije

$$3 = C\sqrt{9},$$

tj. $C = 1$, pa je tražena funkcija ukupnih troškova

$$T(Q) = Q\sqrt{Q+8}. \quad \clubsuit$$

Diferencijalnim jednadžbama se matematički opisuju razni procesi u prirodi i društvu, pa tako i u ekonomiji. Takvi matematički zapisi se nazivaju matematičkim modelima, a budući da se kod diferencijalnih jednadžbi razmatra neovisna varijabla (koja je najčešće vrijeme t) u neprekidnom (kontinuiranom) smislu (tj. ona uzima sve vrijednosti iz nekog intervala realnih brojeva), onda se modeli predstavljeni diferencijalnom jednadžbom nazivaju *kontinuirani modeli*. Osim ovih modela postoje i *diskretni modeli*, gdje se neka pojava ili proces razmatra preko diskretne neovisne varijable (najčešće diskretnog vremena), o čemu će biti riječi u narednom poglavlju.

Razmotrimo sada jedan kontinuirani model u ekonomiji predstavljen linearnom diferencijalnom jednadžom prvog reda. Riječ je o **modelu tržišne ravnoteže**. Naime, u prvom poglavlju smo razmatrali ovaj model u slučaju jednog proizvoda, ali neovisno o vremenu, tj. zahtijevali smo da je u svakom trenutku ponuda Q_s tog proizvoda jednaka njegovoj potražnji Q_d. Uzimajući najjednostavniju situaciju kada su potražnja i ponuda predstavljene, redom, linearnim funkcijama:

$$Q_d = a - bp \text{ i } Q_s = -c + dp \quad (a, b, c, d \text{ su pozitivni parametri}),$$

ravnotežna cijena je bila $\overline{p} = \dfrac{a+c}{b+d}$, kao rješenje jednadžbe $Q_d = Q_s$, kada tržište i jeste u ravnoteži (v. Sekciju 1.3.1). Međutim, u stvarnosti je situacija obično drugačija. Naime, teško da će se desiti da se na tržište iznese proizvod koji u startu ima ravnotežnu cijenu, nego će se ta cijena vremenom prilagođavati uvjetima tržišta i postat će jednaka ravnotežnoj cijeni nakon određenog vremena t. Tako ovaj problem razmatramo u dinamičkom smislu, dakle, da nam cijena proizvoda na tržištu ovisi o proteklom vremenu od momenta izlaska proizvoda na tržište, tj. cijena je funkcija vremena: $p = p(t)$. Samim tim su i funkcije ponude i potražnje također funkcije vremena t. Kako onda postaviti odgovarajući matematički model? Pretpostavit ćemo da je početna cijena (u vremenu $t = 0$) bila $p(0) = p_0$. Također, jednostavnosti radi, možemo pretpostaviti da je brzina promjene cijene u odnosu na vrijeme u svakom trenutku direktno proporcionalna višku potražnje $Q_d - Q_s$ aktuelnom u promatranom vremenu. Brzina promjene cijene u odnosu na vrijeme se izražava kao izvod funkcije cijene, pa na osnovu navedenih pretpostavki dobijamo sljedeću relaciju

$$\frac{dp}{dt} = \alpha (Q_d - Q_s) \quad (\alpha > 0). \tag{6.12}$$

Naš cilj je odrediti funkciju cijene $p(t)$ koja zadovoljava prethodnu relaciju. Jasno je da će brzina promjene cijene biti jednaka nuli u momentu dostizanja tržišne ravnoteže, tj. kada je $Q_d = Q_s$. Pretpostavljat ćemo i da funkcija $p(t)$ nije konstantna u vremenu, jer bi taj uvjet automatski bio zadovoljen.

Uzimajući najjednostavniji slučaj kada su funkcije ponude i potražnje linearne funkcije cijene, relacija (6.12) postaje

$$\frac{dp}{dt} = \alpha \left(a - bp + c - dp \right),$$

odakle se dobija linearna diferencijalna jednadžba

$$\frac{dp}{dt} + \alpha \left(b + d \right) p = \alpha \left(a + c \right),$$

kojom je predstavljen model kretanja cijene na tržištu jednog proizvoda ovisno o vremenu. Rješavanjem ove jednadžbe dobije se njeno opće rješenje

$$p\left(t\right) = e^{-\alpha(b+d)t} \left[\int \alpha \left(a + c \right) e^{\alpha(b+d)t} dt + C \right],$$

odnosno

$$p\left(t\right) = \frac{a+c}{b+d} + Ce^{-\alpha(b+d)t}.$$

Kako je $p\left(0\right) = p_0$, tj.

$$p_0 = \frac{a+c}{b+d} + C = \overline{p} + C,$$

dobije se

$$C = p_0 - \overline{p},$$

pa je tražena funkcija cijene

$$p\left(t\right) = \left(p_0 - \overline{p} \right) e^{-\alpha(b+d)t} + \overline{p}.$$

No, prirodno se nameće pitanje: da li će se cijena vremenom primicati ravnotežnoj vrijednosti $\overline{p}$? Kako je $\alpha > 0$, vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha(b+d)t} = 0,$$

pa je

$$\lim_{t \to \infty} p\left(t\right) = \overline{p},$$

tako da je odgovor na postavljeno pitanje potvrdan.

Razmotrimo još jedan primjer primjene linearnih diferencijalnih jednadžbi u opisivanju kretanja cijene.

Primjer 6.7 ***(Nekretnine)*** *Cijena određene kuće trenutno je* 200000 (\$). *Pretpostavimo da je procijenjeno da će poslije t mjeseci cijena $p\left(t\right)$ rasti brzinom $0.01p\left(t\right) + 1000t$ dolara mjesečno. Koja će cijena kuće biti nakon* 9 *mjeseci od sada?*

Rješenje. Prema datim pretpostavkama model kretanja cijene kuće u vremenu t dat je sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dp}{dt} = 0.01p(t) + 1000t,$$

odnosno

$$\frac{dp}{dt} - 0.01p(t) = 1000t.$$

Opće rješenje ove jednadžbe je

$$\begin{aligned}
p(t) &= e^{\int 0.01dt}\left[\int 1000te^{-\int 0.01dt}dt + C\right] \\
&= e^{0.01t}\left[1000\int te^{-0.01t}dt + C\right] \\
&= \left|\begin{array}{c} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-0.01t} \Rightarrow v = -100e^{-0.01t} \end{array}\right| \\
&= e^{0.01t}\left[1000\left(-100te^{-0.01t} + 100\int e^{-0.01t}dt\right) + C\right] \\
&= -100000(t+100) + Ce^{0.01t}.
\end{aligned}$$

Za $t = 0$ i $p(0) = 200000$, odavde dobijemo da je $C = 10200000$, pa je funkcija cijene data sa

$$p(t) = -100000(t+100) + 10200000e^{0.01t}.$$

Nakon 9 mjeseci cijena kuće će iznositi

$$p(9) = -10900000 + 10200000e^{0.09} \simeq 260577.69 \ (\$). \quad \clubsuit$$

$\circ \quad \circ \quad \circ$

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće diferencijalne jednadžbe (1-5):

1. a) $2y'\left(x^2 - 1\right) - 3xy = 0$, b) $y' = \dfrac{2+y^2}{3+x^2}$.

2. a) $\dfrac{y}{y+x}dy + \dfrac{2x}{y+x}dx = 0$, b) $2\left(x^3+1\right)dy + 3x^2ydx = 0$.

3. a) $y' + \dfrac{1}{1+x}y + x^2 = 0$, b) $y' - \dfrac{1}{x}y - x = 0$.

4. a) $y' + \frac{2y}{x} = \sqrt{x} + 1$, b) $y' + \frac{y}{2x} = \sqrt{x}e^{x}$.

5. a) $y' + 2xy - 2x^3y^3 = 0$, b) $xy' + y - xy^2 \ln x = 0$.

Odrediti partikularno rješenje date jednadžbe uz dati početni uvjet (6-7):

6. $y' = y\,(y-1)$; $y = \frac{1}{3}$ za $x = 0$.

7. $y' - xy - e^{\frac{x^2}{2}} = 0$; $y = 4$ za $x = 0$.

8. Odrediti funkciju potražnje $Q = Q(p)$ ako je uz jediničnu cijenu potražnja jednaka 121 i vrijedi

$$E_{Q,p} = \frac{2}{p^{-1}\,(p+10)}.$$

9. Odrediti funkciju potražnje $Q = Q(p)$ kao funkciju cijene p, ako je

$$E_{Q,p} = -\frac{p}{2+p},$$

a uz jediničnu cijenu potražnja Q jednaka 10.

10. Odrediti funkciju potražnje $Q = Q(p)$ kao funkciju cijene p ako je

$$E_{p,Q} = \frac{Q}{Q-12},$$

a uz jediničnu cijenu potražnja Q jednaka 10.

11. Odredite funkciju ukupnih troškova kao funkciju proizvodnje Q ako je

$$E_{\overline{T},Q} = \frac{2Q}{Q+8},$$

gdje je $\overline{T}$ prosječni trošak, a uz jediničnu proizvodnju ukupni troškovi iznose 27.

12. Cijena određene robe trenutno je 3$ po jedinici. Procijenjeno je da će poslije t sedmica cijena $p\,(t)$ rasti brzinom $0.02p\,(t) + e^{0.1t}$ centi sedmično. Koja će cijena te robe biti nakon 10 sedmica od sada?

Poglavlje 7

Diskretni dinamički modeli

Kako smo napomenuli u prethodnom poglavlju, diskretni dinamički modeli opisuju pojave ili procese preko diskretne neovisne varijable, recimo vremenske varijable t, koja prolazi nekim podskupom cijelih brojeva. Ove su situacije mnogo češće u stvarnosti, jer nas obično zanima stanje neke veličine u određenim vremenskim intervalima (danima, sedmicama, mjesecima, kvartalima, godinama i sl.). Ako je, dakle, neovisna diskretna varijabla vrijeme t, onda se odgovarajuća funkcija koja ovisi o t, označava sa $x(t)$ ili x_t, mada je najviše u upotrebi oznaka x_n, gdje n označava redni broj vremenskog intervala. Na taj način diskretni dinamički model biva predstavljen nekom relacijom (jednadžbom) u kojoj se kao nepoznanica javlja niz x_n. Te jednadžbe se nazivaju *diferentnim jednadžbama.* Zbog toga je prvo neophodno upoznati se s osnovnim pojmovima vezanim za diferentne jednadžbe, a nakon toga preći na proučavanje njihove primjene u ekonomiji.

7.1 Diferentne jednadžbe prvog reda

Definicija 7.1 *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, ... \tag{7.1}$$

gdje je $f : I \to I$ (I interval realnih brojeva), se naziva ***diferentnom jednadžbom prvog reda****.*

Zašto se jednadžba (7.1) naziva baš diferentnom jednadžbom? Otkuda je dobila taj naziv? Naime, diferentne jednadžbe su intenzivno proučavane kao diskretni analogoni diferencijalnih jednadžbi

$$x' = g(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ukoliko izvod $x'(t)$ aproksimiramo količnikom

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

za dovoljno malo h, i stavimo

$$t_n = t_0 + nh, \quad x(t_n) = x_n, \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

dobijamo

$$\Delta x_n = hg(x_n).$$

Dakle, aproksimacijom izvoda diferencijalnih jednadžbi, a što je moguće učiniti na više načina, dolazimo do novih oblika jednadžbi koje zapravo nazivamo diferentnim jednadžbama.

Rješenje jednadžbe (7.1) je svaki niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava jednadžbu (7.1) za sve $n = 0, 1, \ldots$. Za neke klase diferentnih jednadžbi, prije svega za neke linearne, moguće je doći do općeg rješenja. Međutim, u općenitom slučaju to je vrlo teško postići. Teorija diferentnih jednadžbi je u ovom trenutku na početku svog razvitka, tako da je jako malo klasa diferentnih jednadžbi, čak i prvog reda, koje se mogu efikasno riješiti. Zbog toga ćemo se u ovom poglavlju posvetiti problemu rješavanja linearnih diferentnih jednadžbi, te njihovoj primjeni u praksi. Također, biće riječi o dinamici pojedinih diferentnih jednadžbi. Dinamika diferentne jednadžbe vrlo često je vrlo komplicirana. Tako je, za razliku od diferencijalnih jednadžbi, moguće haotično ponašanje rješenja čak i u slučaju diferentnih jednadžbi prvog reda (npr. slučaj Riccatijeve ili logističke diferentne jednadžbe). Kod diferencijalnih jednadžbi to je moguće tek u slučaju kad su one trećeg reda. Jednostavnosti radi, mi ćemo se baviti proučavanjem samo nekih najjednostavnijih oblika linearnih diferentnih jednadžbi.

7.1.1 Linearne jednadžbe prvog reda

Definicija 7.2 *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.2}$$

gdje su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ poznati nizovi realnih brojeva, naziva se ***linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda****.*

U slučaju kada je $b_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, jednadžba (7.2) se naziva ***homogenom****, dok se inače, to jest kada je $b_n \neq 0$ za bar jedno $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, jednadžba (7.2) naziva* ***nehomogenom****.*

Uočimo da se u jednadžbi (7.2) može općenito smatrati da indeks n polazi od nekog fiksnog prirodnog broja $n_0 \geq 1$. Međutim, smjenom $z_{n-n_0} = x_n$, taj slučaj svodimo na slučaj jednadžbe (7.2).

Obično se jednadžbi (7.2) dodaje takozvani uvjet početnih vrijednosti

$$x_0 = \alpha. \tag{7.3}$$

Diferentna jednadžba (7.2), zajedno s početnim uvjetom (7.3), čini tzv. *problem početnih vrijednosti* (skr. PPV).

Moguće su izvjesne modifikacije jednadžbe (7.2) u ovisnosti o tome da li su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konstantni ili ne:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.4}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.5}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.6}$$

pri čemu su $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ poznate konstante.

Rješavanje homogene jednadžbe

Razmotrimo prvo slučaj homogene linearne jednadžbe prvog reda:

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \; . \tag{7.7}$$

Rješenje ove jednadžbe se može jednostavno dobiti iteriranjem:

$$\begin{aligned} x_n &= a_{n-1}x_{n-1} = a_{n-1}\left(a_{n-2}x_{n-2}\right) = a_{n-1}a_{n-2}\left(a_{n-3}x_{n-3}\right) = ... = \\ &= a_{n-1}a_{n-2}...a_0x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (7.7) je dato sa

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) C, \tag{7.8}$$

gdje je C proizvoljna konstanta, dok odgovarajuće rješenje PPV ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) \alpha. \tag{7.9}$$

Specijalno, ako je $a_i = a$ za sve $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, tada to rješenje ima oblik

$$x_n = a^n x_0. \tag{7.10}$$

Primjer 7.1 *Jednadžba*

$$x_{n+1} = 3x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ima opće rješenje

$$x_n = C \cdot 3^n,$$

gdje je C *proizvoljna konstanta. Odgovarajuće rješenje PPV je*

$$x_n = \alpha \cdot 3^n.$$

Primjećujemo da je svako rješenje neograničeno. ♣

Primjer 7.2 *Jednadžba*

$$x_{n+1} - \frac{3n+1}{3n+7} x_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ima opće rješenje (prema (7.8))

$$\begin{aligned} x_n &= C \prod_{i=0}^{n-1} \frac{3i+1}{3i+7} \\ &= C \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{10}{16} \cdot ... \cdot \frac{3n-8}{3n-2} \cdot \frac{3n-5}{3n+1} \cdot \frac{3n-2}{3n+4} \\ &= \frac{4C}{(3n+1)(3n+4)}, \end{aligned}$$

(C *- proizvoljna konstanta), iz čega se da zaključiti da* $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. ♣

Nehomogena linearna jednadžba

Razmatrajmo sada slučaj nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda u najopćenitijem obliku (7.2). Jedinstveno rješenje ove jednadžbe može se naći također jednostavnim iteriranjem i primjenom matematičke indukcije. Naime,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0 + b_0, \\ x_2 &= a_1 x_1 + b_1 = a_1 (a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1, \\ x_3 &= a_2 x_2 + b_2 = a_2 (a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 = \\ &= a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2, \end{aligned}$$

iz čega se može zaključiti da za sve $n \in \mathbb{Z}^+$ vrijedi:

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r. \tag{7.11}$$

Pri tome smo, po definiciji, uzimali da je

$$\prod_{i=0}^{-1} a_i = 1 \text{ i } \prod_{i=n}^{n-1} a_i = 1. \tag{7.12}$$

Naravno da će se formula (7.11) malo modificirati u slučaju jednadžbi (7.4), (7.5) ili (7.6).

Gornje razmatranje se može objediniti u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 7.1 *Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nizovi realnih brojeva. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbe (7.2) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. Takvo rješenje je oblika*

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) \alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r, \quad n = 1, 2, ..., \tag{7.13}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (7.12).

Specijalno, kada je $a_n = a$ ili $b_n = b$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, to jest kad je jednadžba (7.2) oblika (7.4), (7.5) ili (7.6), vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 7.2 *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbi (7.4), (7.5), odnosno (7.6) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. U slučaju jednadžbe (7.6) to je rješenje dato sa*

$$x_n = \begin{cases} \alpha + bn, & \text{ako je } a = 1, \\ \left(\alpha - \dfrac{b}{1-a}\right) a^n + \dfrac{b}{1-a}, & \text{ako je } a \neq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2... \,. \tag{7.14}$$

Rješenje jednadžbe (7.5) ima oblik

$$x_n = \alpha a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k, \quad n = 1, 2, ..., \tag{7.15}$$

dok rješenje jednadžbe (7.4) ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) \alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b, \quad n = 1, 2, ..., \tag{7.16}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (7.12).

Napomena 7.1 *Neka je $b \neq 0$. Uočimo da je, u slučaju $a = 1$, svako rješenje jednadžbe (7.6) neograničeno. Također, u slučaju $a \neq 1$, jednadžba (7.6) ima konstantno rješenje*

$$x_n = \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \,. \tag{7.17}$$

Takvo se rješenje naziva ***ekvilibrijum rješenje*** *jednadžbe (7.6). Svako drugo rješenje jednadžbe (7.6), za $|a| < 1$, konvergira ka ekvilibrijum rješenju.*

Primjer 7.3 *Riješiti problem početnih vrijednosti*

$$x_{n+1} - 3x_n = e^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad x_0 = 2.$$

Rješenje. Data jednadžba je oblika (7.5), pa se njeno opće rješenje može, koristeći (7.15) i uvjet $\alpha = x_0 = 2$, predstaviti u obliku

$$x_n = 2 \cdot 3^n + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-k-1} e^k, \quad n = 1, 2, \dots \,. \qquad \clubsuit$$

Primjer 7.4 *Naći rješenje diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = 2\,(n+1)\,x_n + 3^n\,(n+1)!, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad x_0 = 1.$$

Rješenje. Prema (7.13) imamo

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{i=0}^{n-1} 2\,(i+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\,(i+1) \right) 3^k\,(k+1)! \\ &= 2^n n! + \sum_{k=0}^{n-1} n! 2^{n-k-1} \cdot 3^k = 2^n n! + 2^{n-1} n! \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= 2^n n! + 2^{n-1} n! \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2^n n! \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right) \\ &= 3^n n! \quad . \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

7.1.2 Primjene diferentnih jednadžbi prvog reda u ekonomiji

Razmatraćemo neke slučajeve iz prakse koji se mogu matematički modelirati, pri čemu su ti modeli linearne diferentne jednadžbe prvog reda.

Primjena diferentnih jednadžbi u ekonomiji je vrlo rasprostranjena, jer se mnogi ekonomski procesi mogu modelirati u obliku diferentnih jednadžbi. Svakako je najčešći slučaj obračuna kamate i amortizacije, ali i neki drugi vrlo važni, kao što su: rast nacionalnog dohotka, model paukove mreže (cobweb model) i tome slično.

Obračun kamate

Ovdje ćemo razmotriti nekoliko slučajeva obračuna kamate na uložena sredstva, pri čemu se podrazumijeva da se kamata obračunava na zatečeni iznos na kraju obračunskog perioda, a da se eventualna ulaganja izvode isključivo ili na početku ili na kraju obračunskog perioda.

Slučaj 1 *Pretpostavimo da se na početku jednog obračunskog perioda u banku uložio iznos novca I. Postavlja se pitanje: koje će stanje novca biti na kraju n-tog obračunskog perioda ako se na kraju svakog obračunskog perioda zaračunava kamata po stopi r (u decimalnom obliku kao $r = \frac{p}{100}$, gdje je $p\%$ kamatna stopa u procentima)?*

Označimo sa I_n stanje računa na kraju n-tog perioda (tako da je $I_0 = I$). Na kraju $(n+1)$-vog perioda ovo stanje će biti uvećano za obračunatu kamatu na taj iznos, tj. za iznos rI_n. Dakle, vrijedi

$$I_{n+1} = I_n + rI_n,$$

odnosno

$$I_{n+1} = (1+r)\, I_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7.18}$$

Očito je (7.18) homogena diferentna jednadžba prvog reda oblika (7.7), čije je rješenje dato sa (7.10), pri čemu je $a = 1 + r$, odnosno

$$I_n = (1+r)^n\, I_0 = (1+r)^n\, I, \tag{7.19}$$

a to i predstavlja traženo stanje računa na kraju n-tog obračunskog perioda.

Primjer 7.5 *Odrediti broj godina potrebnih da se određena suma novca uložena u banku udvostruči, ako se na nju primjenjuje ukamaćivanje na kraju svake godine na zatečeni iznos novca s kamatnom stopom od 2% godišnje.*

Rješenje. Označimo li sa I_n iznos novca na kraju n-te godine, vidimo da je on rješenje diferentne jednadžbe

$$I_{n+1} = (1+r)\, I_n,$$

gdje je $r = 0,02$ kamatna stopa. Prema (7.19) imamo

$$I_n = (1+r)^n\, I_0,$$

gdje je I_0 iznos uložene sume novca. Prema uvjetima zadatka imamo $I_n = 2I_0$, pa vrijedi

$$2I_0 = (1+r)^n\, I_0 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log(1+r)} = \frac{\log 2}{\log\left(1+\frac{2}{100}\right)} = 35.0027.$$

Dakle, za 35 godina će se suma novca, uz navedene uvjete, udvostručiti. ♣

Slučaj 2 *Pretpostavimo da se konstantna suma novca R deponuje na kraju svakog obračunskog perioda u nekoj banci, pri čemu se na zatečeni iznos primjenjuje obračun kamate na kraju svakog obračunskog perioda sa stopom r. Ponovo nas zanima isto pitanje: koje je stanje računa na kraju n-tog obračunskog perioda?*

Očito je da je stanje računa na kraju $(n+1)$-og obračunskog perioda jednak zbiru iznosa novca stanja računa na kraju n-tog perioda, kamate obračunate na taj iznos po stopi r i novca u iznosu R koji se uplaćuje za svaki obračunski period, tj.

$$I_{n+1} = (1+r)\, I_n + R, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.20}$$

gdje je $I_0 = 0$. Rješenje ove diferentne jednadžbe je

$$I_n = R\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \tag{7.21}$$

Slučaj 3 *Razmotrimo sada situaciju sličnu prethodnom slučaju, samo što ćemo pretpostaviti da se konstantna suma novca R deponuje na početku svakog obračunskog perioda.*

Naime, i ovdje se dobije ista diferentna jednadžba, tj. (7.20), s tim da ovdje početni ulog I_0 nije 0, nego je $I_0 = R$. Prema formuli (7.14), za $I_0 = R, a = 1+r, b = R$, imamo

$$\begin{aligned} I_n &= \left(I_0 - \frac{R}{1-(1+r)}\right)(1+r)^n + \frac{R}{1-(1+r)} \\ &= \left(R + \frac{R}{r}\right)(1+r)^n - \frac{R}{r}, \end{aligned}$$

odnosno

$$I_n = R\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r}. \tag{7.22}$$

Slučaj 4 *Pretpostavimo da je na početku prvog obračunskog perioda deponovano novca u iznosu I u nekoj banci i pretpostavimo da se konstantna suma novca R deponuje na kraju svakog obračunskog perioda. Ako se na zatečeni iznos primjenjuje obračun kamate na kraju svakog obračunskog perioda sa stopom r, koje će stanje računa biti na kraju n-tog obračunskog perioda?.*

Kao i u prethodna dva slučaja imamo istu diferentnu jednadžbu (7.20), pri čemu je $I_0 = I$. Prema formuli (7.14), za $I_0 = I, a = 1+r, b = R$, imamo

$$I_n = \left(I_0 - \frac{R}{1-(1+r)}\right)(1+r)^n + \frac{R}{1-(1+r)},$$

odnosno

$$I_n = \left(I + \frac{R}{r}\right)(1+r)^n - \frac{R}{r}. \tag{7.23}$$

Amortizacija

Amortizacija je proces kojim se otplaćuje određeni zajam putem niza periodičnih rata, pri čemu svaka od njih sadrži i dio otplate osnovnog duga (glavnice) i dio kamate koja se zaračunava na neotplaćeni dio duga za svaki vremenski period posebno. Pretpostavljamo, dakle, da je u pitanju obračun kamate na zatečeni iznos, koji se primjenjuje po stopi r za svaki vremenski period otplate ukupnog duga. Sa p_n označimo neotplaćeni dio duga nakon n-te uplate g_n (dakle, uplate u općem slučaju ne moraju biti jednake).

Formulacija našeg modela ovdje je bazirana na činjenici da je neotplaćeni dio duga p_{n+1}, nakon $(n+1)$-ve rate otplate duga, jednak zbiru neotplaćenog dijela duga p_n nakon n-te rate otplate duga i kamate rp_n obračunate u toku $(n+1)$-og perioda, umanjenog za ratu g_n. Dakle,

$$p_{n+1} = p_n + rp_n - g_n = (1+r)\,p_n - g_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Prema (7.15), imamo

$$p_n = (1+r)^n\,p_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^{n-k-1}\,g_k.$$

U praksi, rata otplaćivanja duga g_n je konstantna i, recimo, jednaka G. Zamjenom u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} p_n &= (1+r)^n p_0 - (1+r)^n G \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k-1} \\ &= (1+r)^n p_0 - [(1+r)^n - 1] \left(\frac{G}{r}\right). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Ako želimo zajam otplatiti u tačno n rata, postavlja se pitanje kolika će biti rata otplate duga? Naravno, tada je $p_n = 0$, pa zamjenom u (7.24), imamo

$$G = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]. \tag{7.25}$$

Primjer 7.6 *Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od* 100$ *uz kamatnu stopu od* 5% *mjesečno. Amortizacioni plan treba da sadrži: mjesec (odnosno broj rate), neplaćeni dio glavnice početkom mjeseca, iznos rate otplate duga na kraju mjeseca (anuitet), strukturu anuiteta, koja podrazumijeva iznos kamate obračunate na neplaćeni dio duga na kraju obračunskog perioda (tj. mjeseca) i dio otplate glavnice. Plan praviti prema pretpostavci da će zajam biti otplaćen u pet rata.*

Rješenje. Izračunajmo prvo iznos mjesečne rate otplate duga (anuiteta). Uzimajući da je $p_0 = 100\$$ i $r = 5\% = \frac{5}{100}$, iz (7.25) dobijamo

$$G = 100 \frac{\frac{5}{100}}{1-\left(1+\frac{5}{100}\right)^{-5}} = 23,09748(\$) \approx 23,10(\$).$$

Tabela 7.1 Amortizacioni plan

Mjesec	Neplaćeni dio glavnice poč. mj.	Anuitet	Kamata od 5% (dio anuiteta)	Otplata glavnice (dio an.)
1	100,00$	23,10$	5,00$	18,10$
2	81,90	23,10	4,10	19,00
3	62,90	23,10	3,14	19,96
4	42,94	23,10	2,15	20,95
5	21,99	23,10	1,10	22,00
6	0,00			
Ukupno:		115,50$	15,49$	100,01$

Uočimo da je na kraju prvog mjeseca na dug od 100\$ obračunato 5% kamate, što iznosi $5,00\$$, pa je dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice $23,10\$ - 5,00\$ = 18,10\$$. Zbog toga je početkom drugog mjeseca neotplaćeni dio glavnice $100,00\$ - 18,10\$ = 81,90\$$. Na taj se iznos obračunava 5% kamate, što iznosi $4,10\$$, pa je dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice $23,10\$-4,10\$ = 19,00\$$, i tako dalje. Iz ovoga se vidi da se vremenom učešće kamate u anuitetu smanjuje, a dio koji se odnosi na otplatu glavnice raste. ♣

Rast nacionalnog dohotka

Opišimo sada jedan od klasičnih modela koji se koriste u proučavanju rasta nacionalnog dohotka u ekonomiji koja se razvija. Nacionalni dohodak se sastoji od dvije komponente: potrošnje i investicija. U daljem izlaganju zanimaće nas varijacije ovih kvantiteta tokom vremena. Smatrat ćemo da je vrijeme podijeljeno u jednake intervale, recimo godine, i uvedimo funkcije Y, C i I za nacionalni dohodak, potrošnju i investicije, respektivno. Dakle, domen svake od ovih funkcija biće skup (vremenskih) t-vrijednosti: $0, 1, 2, ...$, a Y_t, C_t, I_t označavaće respektivno vrijednosti tih funkcija u vremenu t. Prema tome, nacionalni dohodak se može izraziti u obliku

$$Y_t = C_t + I_t \quad t = 0, 1, 2, ... \ . \tag{7.26}$$

Pretpostavljat ćemo da je potrošnja s nacionalnim dohotkom povezana relacijom

$$C_t = c + mY_t \quad t = 0, 1, 2, ..., \tag{7.27}$$

gdje su c i m konstante (koje se određuju iz činjenice da je $C_t = c$ kad je $Y_t = 0$ i da je $\Delta C_t = m\Delta Y_t$). Uočimo da ovdje pretpostavljamo da su ove konstante neovisne o t, tako da je ustvari veza između potrošnje i dohotka neizmijenjena s porastom vremena t. Postavimo sljedeća ograničenja na parametre c i m:

$$c \geq 0, \quad 0 < m < 1. \tag{7.28}$$

Druga od ovih nejednakosti samo predstavlja činjenicu da neki rast dohotka djelimično, ali ne u potpunosti, izaziva i rast potrošnje.

Pretpostavimo, u cilju orijentacije, da smo u periodu pune zaposlenosti, s dohotkom na takvom nivou da se on ne troši u cijelosti, već da se određeni dio ostavlja za investicije. Kad se investira, ovaj će dio izazvati neki rast u kapacitetu (ili u ukupnom nacionalnom dohotku) sistema i ako puna zaposlenost bude sačuvana, investicijski troškovi će također imati porast. A ovaj rast u investiranju će opet izazvati rast kapaciteta, koji će opet povećati investiranje, itd. Stopa rasta investiranja sa zahtjevom da se sačuva puna zaposlenost se naziva Harrodova[1]

[1] J.R.Hicks, Mr. Harrod's Dynamic Theory, *Economica*, New series, 16 (1949), 106-121.

"garancijska stopa". Naš je cilj da odredimo ovu garancijsku stopu i da opišemo rast i investiranja i nacionalnog dohotka s vremenom.

Mi moramo, naravno, napraviti nekakav iskaz o preciznom ponašanju u kome će nivo investiranja uticati na nacionalni dohodak. Pretpostavimo da postoji neka konstanta, tzv. *faktor rasta*, koju ćemo označavati sa r, za koju vrijedi

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = rI_t \quad t = 0, 1, 2, ... \ . \tag{7.29}$$

Rast u kapacitetu izazvana jedinicom investiranja je, dakle, jednaka r i pretpostavimo da je

$$r > 0. \tag{7.30}$$

Prvo izvedimo diferentne jednadžbe koje zadovoljavaju funkcie Y i I. Polazeći od (7.29) i koristeći (7.26) i (7.27), imamo

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - Y_t &= rI_t \\ &= r\left(Y_t - C_t\right) \\ &= rY_t - r\left(c + mY_t\right), \end{aligned}$$

odnosno

$$Y_{t+1} = \left[1 + r\left(1 - m\right)\right] Y_t - rc \quad t = 0, 1, 2, ... \ . \tag{7.31}$$

Ovo je linearna diferentna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima koju zadovoljava funkcija nacionalnog dohotka.

Da bismo pronašli odgovarajuću jenadžbu za investicijski razvoj, pođimo od (7.26):

$$\begin{aligned} I_{t+1} - I_t &= \left(Y_{t+1} - C_{t+1}\right) - \left(Y_t - C_t\right) \\ &= \left(Y_{t+1} - Y_t\right) - \left(C_{t+1} - C_t\right). \end{aligned}$$

Koristeći (7.29) i (7.27), dobija se

$$I_{t+1} - I_t = rI_t - m\left(Y_{t+1} - Y_t\right) = rI_t - mrI_t.$$

Dakle,

$$I_{t+1} = \left[1 + r\left(1 - m\right)\right] I_t \quad t = 0, 1, 2, ... \ . \tag{7.32}$$

Diferentna jednadžba (7.32) ima rješenje

$$I_t = \left[1 + r\left(1 - m\right)\right]^t I_0 \quad t = 0, 1, 2, ...$$

i, zbog činjenice da je $r\left(1 - m\right) > 0$, niz $\{I_t\}$ divergira ka $+\infty$.

Analogno se rješava diferentna jednadžba nacionalnog dohotka (7.31), koristeći formulu (7.14) za $a = 1 + r(1-m), b = -rc$. Pri tome je tačka ekvilibrijuma (v. (7.17)):

$$Y^* = \frac{b}{1-a} = \frac{c}{1-m}. \tag{7.33}$$

Zato je rješenje jednadžbe (7.31) (za dato Y_0) dato sa

$$Y_t = [1 + r(1-m)]^t (Y_0 - Y^*) + Y^* \quad t = 0, 1, 2, ...,$$

tako da, ako je $Y_0 > Y^*$, niz $\{Y_t\}$ također divergira ka $+\infty$.

Harrod je promatrao specijalni slučaj u kome je $c = 0$. U ovom slučaju, kao što se najbolje vidi iz činjenice da jednadžbe (7.31) i (7.32) imaju isti oblik, dohodak i investiranje moraju rasti po istoj garantiranoj stopi, u obliku konstante $r(1-m)$, da bi se sačuvala puna zaposlenost.

Primjer 7.7 *Pretpostavimo da je u određenom periodu ekvilibrijum dohotka u visini* $Y_0 = 100$*, dok je* $C_0 = 60$ *i* $I_0 = 40$*. Funkcija potrošnje je* $C_t = 0,60Y_{t-1}$*, a investiranje je autonomno. Iznenada, iz nekog razloga, investiranje se mijenja od* 40 *na* 50*. Analizirati stabilnost novog ekvilibrijuma (u smislu da je ekvilibrijum* Y^* *stabilan ako vrijedi* $\lim_{t\to+\infty} Y_t = Y^*$*).*

Rješenje. Budući da je $Y_t = C_t + I_t$ i $I_t = 50$ $(t = 1, 2, ...)$, to dobijamo

$$Y_t = 0,60Y_{t-1} + 50 \quad (t = 1, 2, ...).$$

Ovo je očito linearna diferentna jednadžba prvog reda, iz koje slijedi (novi ekvilibrijum)

$$Y^* = \frac{50}{1 - 0,60} = 125,$$

a prema (7.14) imamo kao rješenje te jednadžbe niz

$$Y_t = (Y_0 - 125)(0,60)^t + 125 = -25(0,60)^t + 125 \quad (t = 1, 2, ...).$$

Odavde je očito $\lim_{t\to+\infty} Y_t = 125 = Y^*$, što znači da je novi ekvilibrijum zaista stabilan. Zanimljivo je pratiti numerički pregled stanja iskazanog gornjim modelom (v. Tabelu 7.2).

Tabela 7.2 Numerički pregled nacionalnog dohotka, potrošnje i investicija

Period	**Investicije**	**Potrošnja**	**Dohodak**
0	40	60	100
1	50	60	110
2	50	66	116
3	50	$69,6$	$119,6$
4	50	$71,76$	$121,76$
5	50	$73,056$	$123,056$
6	50	$73,8336$	$123,8336$
...	...	...	...
$t \to +\infty$	50	$C_t \to 75,00$	$Y_t \to 125$

♣

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. Riješiti sljedeće diferentne jednadžbe:

a) $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} x_n$,

b) $x_{n+1} = \dfrac{3n+1}{2n+5} x_n$,

c) $x_{n+1} - 2^n x_n = 0$.

2. Naći opće rješenje svake od sljedećih diferentnih jednadžbi:

a) $x_{n+1} - 2x_n = 3$,

b) $x_{n+1} - 3x_n = 3 \cdot 2^n$,

c) $x_{n+1} - 4x_n = 4^n$.

3. Naći opće rješenje svake od sljedećih diferentnih jednadžbi:

a) $x_{n+1} - \dfrac{n}{n+1} x_n = 2$,

b) $x_{n+1} - (n+1)\, x_n = 3^n\, (n+1)!$,

c) $x_{n+1} = x_n + (n+1)^2$.

4. Naći rješenje svakog od sljedećih PPV:

a) $x_{n+1} - 3x_n = e^n, \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, 3, ...,$

b) $x_{n+1} + 2(n-1)x_n + 2n + 3 = 0, \quad x_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...,$

c) $x_{n+1} - 4x_n = 3 \cdot 5^n, \quad x_0 = -1, \quad n = 0, 1, 2, ... \ .$

5. Riješiti svaku od narednih jednadžbi i odrediti $\lim_{n\to\infty} x_n$:

a) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{(n+1)!}, \quad x_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...,$

b) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{n}, \quad x_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...$

6. Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od 500$ uz kamatnu stopu od 8% mjesečno. Amortizacioni plan treba da sadrži: mjesec (odnosno broj rate), neplaćeni dio glavnice početkom mjeseca, iznos rate otplate duga na kraju mjeseca (anuitet), strukturu anuiteta, koja podrazumijeva iznos kamate obračunate na neplaćeni dio duga na kraju obračunskog perioda (tj. mjeseca) i dio otplate glavnice. Plan praviti prema pretpostavci da će zajam biti otplaćen u šest rata.

7. Pretpostavimo da se konstantna suma novca 2500$ deponuje na kraju svakog obračunskog perioda u nekoj banci, pri čemu se na taj novac primjenjuje obračun kamate na zatečeni iznos sa stopom $6,5\%$ po svakom obračunskom periodu. Koliko novca banka duguje na kraju svakog obračunskog perioda?

8. Odrediti broj godina potrebnih da se određena suma novca uložena u banku utrostruči, ako se na nju primjenjuje obračun kamate na zatečeni iznos s kamatnom stopom od $8,5\%$ godišnje.

9. Pretpostavimo da smo investirali 5000$ sa godišnjom kamatnom stopom 8% na 10 godina (obračun kamate na zatečeni iznos). Koliko ćemo novca imati na kraju tog perioda, ako se kamata obračunava:

a) godišnje,

b) polugodišnje,

c) kvartalno,

d) mjesečno,

e) dnevno?

10. U elementarnom ekonomskom modelu tržnice, cijena p_n nekog proizvoda nakon n godina je povezana sa zalihama s_n nakon n godina formulom

$$p_n = a - bs_n,$$

gdje su a i b pozitivne konstante, budući da velika nabavka prouzrokuje da cijena bude niska u datoj godini. Pretpostavimo da su cijena i nabavka u alternativnim godinama proporcionalne: $kp_n = s_{n+1}$ $(k > 0)$.

a) Pokazati da p_n zadovojava jednadžbu $p_{n+1} + bkp_n = a$.

b) Riješiti dobijenu jednadžbu pod a) po p_n.

c) Ako je $bk < 1$, pokazati da se cijena stabilizira. Drugim riječima, pokazati da p_n konvergira ka konačnoj granici kad $n \to \infty$. Šta se može očekivati ako je $bk > 1$?

7.2 Diferentne jednadžbe višeg reda

7.2.1 Linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Promatrajmo linearnu diferentnu jednadžbu k-tog reda:

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \ldots + p_k x_n = 0 \quad (n = n_0, n_0 + 1, ...) \tag{7.34}$$

gdje su p_i $(i = 1, ..., k)$ konstante i $p_k \neq 0$. Naš cilj je da nađemo fundamentalni skup rješenja (tj. skup n linearno nezavisnih rješenja) i shodno tome opće rješenje jednadžbe (7.34), kao linearnu kombinaciju elemenata fundamentalnog skupa. Procedura je relativno jednostavna.

Pretpostavimo da rješenja jednadžbe (7.34) imaju oblik λ^n, gdje je λ kompleksan broj. Zamjenom ove vrijednsoti u jednadžbu (7.34) dobijamo:

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0. \tag{7.35}$$

Ova jednadžba se naziva *karakterističnom jednadžbom* diferentne jednadžbe (7.34), a njeni korijeni λ se nazivaju *karakterističnim korijenima*.

Primijetimo da, zbog $p_k \neq 0$, nijedan od karakterističnih korijena nije jednak nuli. Razmotrit ćemo dva slučaja.

1. *Slučaj* ***a.*** Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *međusobno različiti.* Tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 7.3 *Ako su karakteristični korijeni* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *međusobno različiti, tada je skup* $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ *fundamentalni skup rješenja jednadžbe (7.34).*

Iz toga slijedi da je opće rješenje jednadžbe (7.34) dato sa

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} C_i \lambda_i^n, \quad C_i \text{ proizvoljne konstante.} \tag{7.36}$$

Primjer 7.8 *Data je diferentna jednadžba*

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0 \quad (n = 0, 1, ...) .$$

a) Naći opće rješenje date jednadžbe.
b) Naći rješenje date jednadžbe uz početne uvjete $x_0 = 1$ *i* $x_1 = 2$*.*

Rješenje. a) Odgovarajuća karakteristična jednadžba ima oblik

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

odakle se dobijaju karakteristične vrijednosti $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$, pa je fundamentalni skup rješenja $\{2^n, 5^n\}$. Opće rješenje date diferentne jednadžbe ima oblik

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 5^n. \tag{7.37}$$

b) Koristeći opće rješenje (7.37) i početne uvjete, imamo

$$n = 0 \Rightarrow 1 = x_0 = C_1 + C_2,$$

$$n = 1 \Rightarrow 2 = x_1 = 2C_1 + 5C_2.$$

Odavde se dobija $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, pa je traženo rješenje PPV: $x_n = 2^n$. ♣

2. *Slučaj **b**.* Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *različiti sa višestrukostima* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respektivno, pri čemu je

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = k.$$

Teorem 7.4 *Skup* $S = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ *je fundamentalni skup rješenja jednadžbe (7.34), gdje je* $S_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ $(i = 1, 2, ...2r)$*.*

Posljedica 7.1 *Opće rješenje jednadžbe (7.34) je dato sa:*

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(C_{i0} + C_{i1} n + C_{i2} n^2 + \ldots + C_{im_{i-1}} n^{m_i - 1} \right). \tag{7.38}$$

Primjer 7.9 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 4x_n = 0$$

$$x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Rješenje. Odgovarajuća karakteristična jednadžba je

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0,$$

a karakteristični korijeni su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, pa je fundamentalni skup rješenja $\{1, 2^n, n2^n\}$. Opće rješenje je

$$x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + D_1 1^n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + D_1.$$

Da bismo odredili konstante C_1, C_2 i D_1, koristimo početne vrijednosti

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + D_1 = 0 \\ x_1 &= 2C_1 + 2C_2 + D_1 = -1 \\ x_2 &= 4C_1 + 8C_2 + D_1 = 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo

$$C_1 = -5, C_2 = 2, D_1 = 5.$$

Prema tome, traženo rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} x_n &= -5 \cdot 2^n + n 2^{n+1} + 5 \\ &= (2n - 5) \cdot 2^n + 5. \end{aligned}$$

♣

Pretpostavimo sada da među korijenima karakteristične jednadžbe ima *kompleksnih*, koji se, kao što znamo pojavljuju u parovima konjugirano kompleksnih brojeva. Pokazaćemo da svakom takvom paru odgovaraju dva realna linearno nezavisna rješenja. Neka je $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$. Tada je

$$\lambda_{1,2} = r\left(\cos\theta \pm i \sin\theta\right), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}, \quad \theta \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

odakle slijedi

$$x_n = \lambda_1^n = r^n \left(\cos n\theta + i \sin n\theta\right).$$

Odavde se vidi da karaktersitičnom korijenu λ_1 odgovaraju dva realna rješenja

$$x_n^{(1)} = r^n \cos n\theta, \quad x_n^{(2)} = r^n \sin n\theta, \tag{7.39}$$

koja su linearno nezavisna. S druge strane, konjugirano kompleksnom korijenu λ_2 odgovaraju realna rješenja

$$x_n^{*(1)} = r^n \cos n\theta, \quad x_n^{*(2)} = -r^n \sin n\theta, \tag{7.40}$$

koja su očito linearno zavisna sa rješenjima (7.39). Prema tome, paru konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe odgovaraju linearno nezavisna realna rješenja oblika (7.39) ili (7.40).

Ako, međutim, konjugirano kompleksni par korijena karakteristične jednadžbe ima višestrukost m, onda su odgovarajuća fundamentalna (linearno nezavisna) rješenja:

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin\theta, nr^n \cos n\theta, nr^n \sin\theta, ..., n^{m-1} r^n \cos n\theta, n^{m-1} r^n \sin\theta.$$

Zaključujemo da se pronalaženjem svih fundamentalnih rješenja koja odgovaraju svim realnim korijenima i svih rješenja koja odgovaraju svim parovima konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe, dobija fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (7.34).

Primjer 7.10 *Riješiti jednadžbu*

$$3x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Rješenje. Iz karakteristične jednadžbe $3\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$ dobijamo

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos\frac{\pi}{6} \pm i \sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Zbog toga je opće rješenje promatrane jednadžbe

$$x_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left[c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right], \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

pri čemu su c_1 i c_1 proizvoljne konstante. ♣

7.2.2 Linearne nehomogene jednadžbe i metodi rješavanja

Do sada smo razmatrali linearne homogene diferentne jednadžbe, a u slučaju takvih jednadžbi s konstantnim koeficijentima pokazali smo kako se konstruira njihovo opće rješenje. Otvorenim je ostalo pitanje rješavanja linearnih nehomogenih jednadžbi. Zbog toga ćemo se sada fokusirati na rješavanje linearne nehomogene jednadžbe k-tog reda

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = r_n, \tag{7.41}$$

gdje su, kako smo to na početku ovog poglavlja istakli, p_i $(i = 1, ..., k)$ i r_n konstante i pri čemu je $p_k \neq 0$.

Logično je, naravno, kao i u slučaju homogene jednadžbe, postaviti sljedeće pitanje: Da li rješenja jednadžbe (7.41) formiraju vektorski prostor? Drugim riječima, da li je linearna kombinacija dva rješenja jednadžbe (7.41), također, rješenje jednadžbe (7.41)?

Odgovor na ova pitanja daje sljedeći primjer.

Primjer 7.11 *Promatrajmo jednadžbu*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3 \cdot 2^n.$$

a) Pokazati da su $x_n^{(1)} = -(3n-1) \cdot 2^{n-1}$ *i* $x_n^{(2)} = -3n \cdot 2^{n-1}$ *rješenja date jednadžbe.*

b) Pokazati da $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ *nije rješenje date jednadžbe.*

c) Pokazati da $x_n = Cn(2^{n-1})$ *nije rješenje date jednadžbe, gdje je* C *konstanta.*

Rješenje.

a) Neposrednim uvrštavanjem nizova $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ u datu jednadžbu, vidi se da su to zaista njena rješenja.

b) Imamo $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)} = 2^{n-1}$. Zamjenjujući ovo u datu jednadžbu, dobijamo

$$2^{n+1} - 5 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{n-1} = 2^n(2 - 5 + 3) = 0 \neq 3 \cdot 2^n.$$

c) Zamjenom x_n u datu jednadžbu, lahko se vidi da taj niz nije njeno rješenje.

♣

Iz prethodnog primjera može se izvući sljedeći ***zaključak.***

i) *Nasuprot homogenim diferentnim jednadžbama, rješenja nehomogenih diferentnih jednadžbi ne formiraju vektorski prostor. Ni suma (razlika), ni proizvod rješenja nehomogene jednadžbe nije (općenito) njeno rješenje.*

ii) *Iz dijela b) vidi se da razlika rješenja $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ nehomogene jednadžbe je zapravo rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe.*

Na taj način može se iskazati općenitiji rezultat.

Teorem 7.5 *Ako su $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ rješenja jednadžbe (7.41), onda je $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe.*

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = 0. \tag{7.42}$$

Dokaz. Oduzimanjem jednakosti

$$x_{n+k}^{(1)} + p_1 x_{n+k-1}^{(1)} + \ldots + p_k x_n^{(1)} = r_n,$$

$$x_{n+k}^{(2)} + p_1 x_{n+k-1}^{(2)} + \ldots + p_k x_n^{(2)} = r_n,$$

dobija se

$$\begin{aligned} 0 &= \left[x_{n+k}^{(1)} - x_{n+k}^{(2)}\right] + p_1 \left[x_{n+k-1}^{(1)} - x_{n+k-1}^{(2)}\right] + \ldots + p_k \left[x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\right] \\ &= x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n. \end{aligned}$$

■

Uobičajeno je da se opće rješenje homogene jednadžbe (7.42) naziva *komplementarnim rješenjem* nehomogene jednadžbe (7.41) i označava se sa $x_n^{(c)}$.

Bilo koje rješenje nehomogene jednadžbe (7.41) zvaćemo *partikularnim rješenjem* jednadžbe (7.41) i označavaćemo ga sa $x_n^{(p)}$.

Budući da odranije znamo kako se određuje komplementarno rješenje nehomogene jednadžbe (7.41), to je sada moguće znati i njeno opće rješenje.

Teorem 7.6 *Bilo koje (tj. opće) rješenje jednadžbe (7.41) može se napisati kao*

$$x_n = x_n^{(p)} + x_n^{(c)} = x_n^{(p)} + \sum_{i=1}^{k} C_i x_n^{(i)}, \tag{7.43}$$

gdje je $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$ fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (7.42).

Dokaz. Primijetimo da je $x_n - x_n^{(p)}$ rješenje homogene jednadžbe (7.42). Prema tome,

$$x_n - x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} C_i x_n^{(i)}$$

za neke konstante a_i. ■

U mnogim slučajevima jako je teško naći opće rješenje nehomogene jednadžbe. No, situacija je nešto povoljnija kada su u pitanju linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Za takve slučajeve preostaje još samo pronaći način kako se određuje partikularno rješenje $x_n^{(p)}$. Postoje različiti metodi za njihovo određivanje: *metod neodređenih koeficijenata*, *metod varijacije konstanti*, *metod operatora*, *metod generirajućih funkcij*a i *metod Z-transformacije*. Ovdje će biti demonstriran metod neodređenih koeficijenata.

7.2.3 Metod neodređenih koeficijenata

Metod neodređenih koeficijenata za izračunavanje partikularnog rješenja $x_n^{(p)}$ jednadžbe (7.41) je jedan od jednostavnijih metoda i zbog toga ćemo upravo njemu prvo posvetiti pažnju. Analogno istoj situaciji kao kod diferencijalnih jednadžbi, i ovdje se, u osnovi, metod sastoji u tome da se inteligentno pretpostavi oblik partikularnog rješenja, s nepoznatim (neodređenim) koeficijentima, a zatim da se ta funkcija (niz) zamijeni u diferentnoj jednadžbi (7.41) i tako odrede nepoznati koeficijenti. Naravno da se ovaj metod ne može efikasno upotrijebiti u svim situacijama, to jest za potpuno proizvoljan niz r_n. Ipak, ovim metodom mogu biti uspostavljena neka pravila za određivanje partikularnog rješenja ako je r_n linaerna kombinacija izraza koji su oblika

$$a^n, \sin(bn), \cos(bn), \quad \text{ili} \quad n^k \tag{7.44}$$

ili njihovih proizvoda

$$a^n \sin(bn), a^n n^k, a^n n^k \cos(bn). \tag{7.45}$$

Tabela 7.3. sadrži nekoliko tipova funkcija r_n i njihovih odgovarajućih partikularnih rješenja.

Tabela 7.3

Oblik niza r_n	**Oblik partikularnog rješenja $x_n^{(p)}$**
a^n	$C_1 a^n$
n^k	$\sum_{i=0}^{k} C_i n^i$
$n^k a^n$	$\left(\sum_{i=0}^{k} C_i n^i\right) a^n$
$\sin bn, \cos bn$	$C_1 \sin bn + C_2 \cos bn$
$a^n \sin bn, a^n \cos bn$	$(C_1 \sin bn + C_2 \cos bn) a^n$
$a^n n^k \sin bn, a^n n^k \cos bn$	$\left(\sum_{i=0}^{k} C_i n^i\right) a^n \sin(bn) + \left(\sum_{i=0}^{k} D_i n^i\right) a^n \cos(bn)$

Napomenimo da se prethodno razmatranje može primijeniti i za slučaj kada se niz r_n može predstaviti u obliku zbira nizova koji se bitno razlikuju. Naime, ako je $r_n = r_n^{(1)} + ... + r_n^{(m)}$, tada se partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (7.41) traži u obliku zbira $x_n^{(p)} = x_n^{(p_1)} + ... + x_n^{(p_m)}$, pri čemu je $x_n^{(p_i)}$ partikularno rješenje jednadžbe

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = r_n^{(i)} \, (i = 1, ..., m) \, .$$

Razmatranje ćemo podijeliti u nekoliko slučajeva u ovisnosti o obliku niza r_n.

A) Slučaj kada je niz r_n oblika

$$r_n = P_m \left(n \right) a^n,$$

gdje je $P_m (n)$ polinom po n stepena m.

A1) Ako a nije korijen karakteristične jednadžbe diferentne jednadžbe (7.42), tada partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ tražimo u obliku

$$x_n^{(p)} = Q_m \left(n \right) a^n,$$

gdje je $Q_m (n)$ polinom stepena m, čije koeficijente treba odrediti.

A2) Ako je a korijen karakteristične jednadžbe diferentne jednadžbe (7.42) višestrukosti ν, tada partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ tražimo u obliku

$$x_n^{(p)} = n^{\nu} Q_m \left(n \right) a^n.$$

B) Slučaj kada je niz r_n oblika

$$r_n = \left[P_r \left(n \right) \cos \left(nb \right) + P_s \left(n \right) \sin \left(nb \right) \right] a^n.$$

Neka je $m = \max \{ r, s \}$.

B1) Ako se $a^n \cos (nb)$ i $a^n \sin (nb)$ ne pojavljuju u (općem) rješenju $x_n^{(c)}$ homogene diferentne jednadžbe (7.42), tada se partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ traži u obliku

$$x_n^{(p)} = \left[Q_m^1 \left(n \right) \cos \left(nb \right) + Q_m^2 \left(n \right) \sin \left(nb \right) \right] a^n,$$

gdje su Q_m^1 i Q_m^2 polinomi stepena m s neodređenim koeficijentima.

B2) Ako se $a^n \cos(nb)$ ili $a^n \sin(nb)$ pojavljuju u (općem) rješenju $x_n^{(c)}$ homogene diferentne jednadžbe (7.42) s višestrukošću ν, tada se partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ traži u obliku

$$x_n^{(p)} = n^{\nu} \left[Q_m^1(n)\cos(nb) + Q_m^2(n)\sin(nb)\right] a^n.$$

Napomenimo još da se u izrazu niza r_n stepen a^n može i da ne pojavi, pa se tada i ne uključuje ni u partikularno rješenje.

Primjer 7.12 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = n3^n. \tag{7.46}$$

Rješenje. Karakteristični korijeni homogene jednadžbe su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -4$, pa je

$$x_n^{(c)} = C_1 + C_2(-4)^n.$$

Zbog toga imamo

$$x_n^{(p)} = (a_1 + a_2 n)\, 3^n.$$

Zamjenom ove relacije u (7.46) dobijamo

$$\begin{aligned} a_1 3^{n+2} + a_2(n+2)3^{n+2} + 3a_1 3^{n+1} + 3a_2(n+1)3^{n+1} - 4a_1 3^n - 4a_2 n3^n = n3^n \\ \Leftrightarrow (14a_1 + 27a_2 + 14a_2 n)3^n = n3^n. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} 14a_1 + 27a_2 &= 0, \\ 14a_2 &= 1, \end{aligned}$$

ili $a_1 = -\dfrac{27}{196}$, $a_2 = \dfrac{1}{14}$. Partikularno rješenje date jednadžbe je

$$x_n^{(p)} = \left(-\frac{27}{196} + \frac{1}{14}n\right) 3^n,$$

a njeno opće rješenje je

$$x_n = C_1 + C_2(-4)^n + \left(-\frac{27}{196} + \frac{1}{14}n\right) 3^n. \qquad \clubsuit$$

Primjer 7.13 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} + 9x_n = 5 \cdot 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{7.47}$$

Rješenje. Karakteristična jednadžba odgovarajuće homogene jednadžbe je

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Karakteristični korijeni su:

$$\lambda_1 = -3i, \quad \lambda_2 = 3i$$

Dakle, $r = 3$ i $\theta = \frac{\pi}{2}$, pa je

$$x_n^{(c)} = 3^n \left[C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

Primijetimo da se $r_n = 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ pojavljuje u $x_n^{(c)}$. To je slučaj B2), prema kojem je

$$x_n^{(p)} = n\left[a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] 3^n, \tag{7.48}$$

gdje su a i b koeficijenti koje treba odrediti.

Zamjenom (7.48) u (7.47), dobijamo

$$\begin{aligned}(n+2)\left[a \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + b \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right)\right] \cdot 3^{n+2} + \\ + 9n\left[a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \cdot 3^n = 5 \cdot 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Zamjenom $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ i $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ i poređenjem koeficijenata koji stoje uz kosinus, dobijamo $a = 0$. Analogno, poređenjem koeficijenata koji stoje uz sinus, dobijamo $b = -\frac{5}{18}$.

Zamjenom ovih vrijednosti nazad u (7.48), dobijamo

$$x_n^{(p)} = -\frac{5}{18} n 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

a opće rješenje jednadžbe (7.47) je

$$x_n = \left[C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{5}{18} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \cdot 3^n. \quad \clubsuit$$

Primjer 7.14 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 7x_{n+1} - 5x_n = 2n - 1 + 2 \cdot 3^n. \tag{7.49}$$

Rješenje. Odgovarajuća homogena jednadžba je

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 7x_{n+1} - 5x_n = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba ima jedan realni korijen $\lambda = 1$ i dva konjugirano komleksna korijena $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, pa je rješenje homogene jednadžbe dato sa

$$x_n^{(c)} = C_1 + 5^{\frac{n}{2}}(C_2 \cos n\varphi + C_3 \sin n\varphi),$$

pri čemu je $\varphi = \arctan 2$ (i $r = \sqrt{5}$).

Uočimo prvo da desnu stranu polazne jednadžbe (7.49) možemo zapisati u obliku

$$(2n-1) \cdot 1^n + 2 \cdot 3^n.$$

Dakle, partikularno rješenje tražimo kao

$$x_n^{(p)} = (a+bn)n + c \cdot 3^n.$$

Uvrštavajući to u polaznu jednadžbu dobijamo

$$\begin{aligned}
&(a+3b)n + 3a + 9b + bn^2 + 3bn - 3\left[(a+2b)n + 2a + 4b + bn^2 + 2bn\right] + \\
&+ 7\left[(a+b)n + a + b + bn^2 + bn\right] - 5(an + bn^2) + \\
&+ c \cdot 3^{n+3} - 3c \cdot 3^{n+2} + 7c \cdot 3^{n+1} - 5c \cdot 3^n \\
&= 2n - 1 + 2 \cdot 3^n \quad .
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
8b &= 2, \\
4a + 4b &= -1, \\
16c &= 2,
\end{aligned}$$

odnosno

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{8}.$$

Dakle, partikularno rješenje ima oblik

$$x_n^{(p)} = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{1}{8} \cdot 3^n.$$

Na osnovu toga, opće rješenje polazne diferentne jednadžbe je

$$x_n = C_1 + 5^{\frac{n}{2}}(C_2 \cos n\varphi + C_3 \sin n\varphi) + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{1}{8} \cdot 3^n$$

gdje je $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. ♣

7.2.4 Primjene u ekonomiji

Pregovori između radnika i menadžmenta

Sada ćemo konstruirati jedan relativno jednostavan model pregovora o visini plaća između radnika i menadžmenta. U tim pregovorima radnici zahtijevaju (redovnu) plaću od, recimo, R_0 dolara godišnje, dok je početna ponuda menadžmenta, recimo, M_0 dolara godišnje. Rješenje ovog problema treba da se nađe posredstvom pregovora između ova dva tabora. U svakom koraku pregovora radnički predstavnici podnose zahtjev o visini plaće menadžmentu. Općenito, očekuje se da menadžment ponudi iznos plaće koji je manji od radničkog zahtjeva, a to onda ima za posljedicu potrebu za nastavkom pregovora. Matematički model ove situacije može biti konstruiran pomoću pretpostavke da u svakom koraku pregovora menadžment korigira svoju prethodnu ponudu dodavanjem nekog dijela a razlike između potražnje i ponude u zadnjem koraku. S druge strane, za očekivati je da će i radnici svoju prethodnu ponudu korigirati oduzimanjem nekog dijela b razlike između potražnje i ponude u zadnjem koraku.

Označimo, respektivno, sa M_n i R_n ponudu menadžmenta i potražnju radnika u n-tom koraku. Dinamičke jednadžbe kojima se opisuje ovaj pregovarački proces izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n + a\,(R_n - M_n) \\ R_{n+1} &= R_n - b\,(R_n - M_n)\,, \end{aligned} \tag{7.50}$$

gdje su a i b pozitivne konstante koje zadovoljavaju sljedeće uvjete

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1. \tag{7.51}$$

Jednadžbe (7.50) se mogu napisati i u obliku

$$M_{n+1} = (1-a)\,M_n + aR_n \tag{7.52}$$

$$R_{n+1} = bM_n + (1-b)\,R_n. \tag{7.53}$$

Eliminacijom R_n, dobija se diferentna jednadžba

$$M_{n+2} - (2-a-b)\,M_{n+1} + (1-a-b)\,M_n = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - (2-a-b)\,\lambda + (1-a-b) = 0,$$

čija su rješenja

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1-a-b.$$

Prema tome, M_n ima sljedeći prikaz

$$M_n = c_1 + c_2 (1 - a - b)^n ,$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

S druge strane, iz (7.52) za R_n imamo

$$R_n = \frac{1}{a} M_{n+1} - \frac{1-a}{a} M_n,$$

odnosno,

$$R_n = c_1 - \frac{b}{a} c_2 (1 - a - b)^n.$$

Konstante c_1 i c_2 možemo odrediti uvođenjem početnih uvjeta:

$$c_1 + c_2 = M_0,$$

$$c_1 - \frac{b}{a} c_2 = R_0.$$

Dakle,

$$c_1 = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b}, \qquad c_2 = -\frac{a(R_0 - M_0)}{a+b}.$$

Zbog $R_0 > M_0$, imamo da je $c_1 > 0$, a $c_2 < 0$, pa je konačno

$$M_n = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b} - \frac{a(R_0 - M_0)}{a+b} (1 - a - b)^n,$$

$$R_n = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b} + \frac{b(R_0 - M_0)}{a+b} (1 - a - b)^n.$$

Analizom ovih jednakosti dolazimo do sljedećih zaključaka:

i) Ako želimo imati monotonu konvergenciju, to jest da se M_n stalno povećava, a R_n stalno smanjuje, onda je

$$0 < a + b < 1.$$

ii) Konačan iznos plaće, w, dogovoren između radnika i rukovodstva je

$$w = M_\infty = R_\infty = \frac{aR_0 + bM_0}{a+b}.$$

Napomenimo da w leži između R_0 i M_0, što smo i mogli pretpostaviti, to jest

$$M_0 < w < R_0.$$

Model nacionalnog dohotka

Razmotrimo sada model nacionalnog dohotka. Nacionalni dohodak D_n se određuje, recimo, na kraju svakog kvartala u toku godine i sastoji se od sljedeća tri dijela:

i) troška potrošača pri nabavci roba za potrošnju, P_n;

ii) podsticajnog privatnog investiranja u kupovinu glavne opreme, I_n;

iii) troška vlade, V_n.

Dakle, jednadžba nacionalnog dohotka je

$$D_n = P_n + I_n + V_n. \tag{7.54}$$

Prema dobijenom modelu nacionalnog dohotka, ekonomist Paul A. Samuelson napravio je tri pretpostavke koje povezuju ove varijable:

i) Trošak potrošača P_n u bilo kojem kvartalu proporcionalan je nacionalnom dohotku D_{n-1} prethodnog kvartala.

ii) Podsticajno privatno investiranje I_n u bilo kojem kvartalu je proporcionalna rastu potrošnje tog kvartala u odnosu na prethodni kvartal, to jest veličini $P_n - P_{n-1}$ (to je tzv. *princip ubrzanja*).

iii) Vladin trošak je konstantan za svaki kvartal.

Naš zadatak je ispitati ponašanje nacionalnog dohotka podvrgnutih gornjim pretpostavkama. Znači, prvo moramo prevesti gornje tri pretpostavke u matematičke relacije, tako da njihovim korištenjem dobijamo jednostavnu jednadžbu za nacionalni dohodak. Iz pretpostavke i) imamo

$$P_n = aD_{n-1}, \tag{7.55}$$

gdje je a konstanta proporcionalnosti, tzv. *marginalna tendencija potrošnje.* Ubuduće ćemo smatrati da je

$$0 < a < 1.$$

Pretpostavka ii) ima sljedeću matematičku reprezentaciju

$$I_n = b(P_n - P_{n-1}), \tag{7.56}$$

gdje je b konstanta proporcionalnosti, tzv. *veza (odnos).*
Ovaj izraz stanja znači da kada se potrošnja smanjuje, to jest kad je $P_n - P_{n-1} < 0$, postoji tendencija da proizvođači izvrše povlačenje novčanih sredstava namijenjenih za investicije, dok u slučaju kad se potrošnja povećava, odnosno kad je

$P_n - P_{n-1} > 0$, proizvođači će željeti povećati svoje investicijske troškove. Pretpostavimo da b zadovoljava sljedeći uvjet

$$0 < b < 1.$$

Zamjenom jednakosti (7.55) u (7.56), dobijamo

$$I_n = ab(D_{n-1} - D_{n-2}). \tag{7.57}$$

Treća pretpostavka je da je vladin trošak isti za sve kvartale, to jest vrijedi

$$V_k = v, \tag{7.58}$$

gdje je v konstantna vrijednost vladinog troška.
Sada smo u mogućnosti doći do jednadžbe koja opisuje kretanje nacionalnog dohotka u n-tom kvartalu. Tako, zamjenom jednakosti (7.55), (7.57) i (7.58) u jednadžbu (7.54), dobijamo

$$D_n = aD_{n-1} + ab(D_{n-1} - D_{n-2}) + v,$$

odnosno

$$D_{n+2} - a(1+b)D_{n+1} + abD_n = v, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots, \tag{7.59}$$

a D_0 i D_1 su dati. Ovo je linearna diferentna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Njeno rješenje daje dinamičko ponašanje nacionalnog dohotka. Ova jednadžba povezuje nacionalni dohodak u nekom periodu (kvartalu) sa nacionalnim dohotkom u neka dva predhodna perioda (kvartala). Ona, također, sadrži dva parametra, marginalnu tendenciju potrošnje a i vezu b.
Za posebne vrijednosti ovih parametara i za date vrijednosti početnih uvjeta D_0 i D_1, rješavanjem jednadžbe (7.59), dobijamo eksplicitnu ovisnost nacionalnog dohotka u diskretnom vremenu n. Međutim, ponašanje raznih eventualnih rješenja može biti razumljivo i bez njihovog eksplicitnog izračunavanja. Prvo, neka je D^* konstantno rješenje jednadžbe (7.59). To odgovara ekvilibrijumu vrijednosti nacionalnog dohotka i može se dobiti rješavanjem jednadžbe

$$D^* - a(1+b)D^* + abD^* = v,$$

odakle je

$$D^* = \frac{v}{1-a}.$$

Uvjet $0 < a < 1$ garantira da je ekvilibrium vrijednosti nacionalnog dohotka pozitivan.

Drugo, kako smo to ranije vidjeli, oba korijena jednadžbe

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{7.60}$$

su po apsolutnoj vrijednosti manja od 1 ako i samo ako je

$$1 + a_1 + a_2 > 0,$$

$$1 - a_1 + a_2 > 0,$$

$$1 - a_2 > 0.$$

Mi ćemo sada ovaj rezultat primijeniti na homogeni dio diferentne jednadžbe određene jednadžbom (7.59), to jest na jednadžbu

$$D_{n+2} - a(1+b)D_{n+1} + abD_n = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - a(1+b)\lambda + ab = 0. \tag{7.61}$$

Poređenjem jednadžbi (7.60) i (7.61), dobijamo sljedeće rezultate:

$$1 - a(1+b) + ab > 0,$$

$$1 + a(1+b) + ab > 0,$$

$$1 - ab > 0.$$

Ako a i b zadovoljavaju ove tri relacije, onda je nacionalni dohodak D^* stabilan ekvilibrijum vrijednosti. Lahko je vidjeti da je upravo to slučaj. Prva od ovih relacija daje $a < 1$, koja se slaže sa uvjetom $0 < a < 1$. Slično, druga i treća relacija su automatski zadovoljene zato što su a i b pozitivni i manji od 1. Međutim, mi zaključujemo da će niz vrijednosti nacionalnog dohotka konvergirati ka ekvilibrijumu D^*, neovisno o početnim uvjetima. Zaista, ako je

$$a < \frac{4b}{(1+b)^2}, \tag{7.62}$$

onda su korijeni jednadžbe (7.61) (konjugirano) kompleksni brojevi koji leže unutar jediničnog kruga, pa niz vrijednosti nacionalnog dohotka oscilirajući konvergira ka D^*. S druge strane, ako uvjet (7.62) nije zadovoljen, onda su korijeni jednadžbe (7.61) realni i leže u intervalu $(0, 1)$, pa niz vrijednosti nacionalnog dohotka monotono konvergira ka D^*.

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

1. a) Naći partikularno rješenje PPV

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2.$$

b) Naći x_5.

2. a) Naći opće rješenje diferentne jednadžbe $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 0$.

b) Odrediti partikularno rješenje date diferentne jednadžbe koje zadovoljava sljedeće početne uvjete: $x_0 = 0$, $x_1 = -1$.

3. a) Naći opće rješenje diferentne jednadžbe $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

b) Odrediti ono rješenje date jednadžbe koje zadovoljava početne uvjete: $x_0 = 2$, $x_1 = 3$.

4. Naći rješenje PPV

$$x_{n+2} - 2\sqrt{3}x_{n+1} + 4x_n = 0, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0.$$

5. a) Riješiti diferentnu jednadžbu $x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$.

b) Naći ono rješenje date jednadžbe koje zadovoljava početne uvjete: $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Naći opće rješenje svake od diferentnih jednadžbi (6-17):

6. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 14x_n = 0$.

7. $x_{n+4} + 2x_{n+2} + x_n = 0$.

8. $x_{n+3} - 3x_{n+1} - 2x_n = 0$.

9. $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 18x_{n+1} - 12x_n = 0$.

10. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot 3^n + n^2 + n - 1, \quad (n = 1, 2, ...)$.

11. $2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n^2 - 4n + 5^n, \quad (n = 1, 2, ...)$.

12. $5x_{n+2} - 3x_{n+1} - 2x_n = 3n + (-2)^n, \quad (n = 1, 2, ...)$.

13. $3x_{n+2} - 8x_{n+1} - 3x_n = 3^n - 2n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, ...).$

14. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1 - 3n + n^2 + 2^n, \quad (n = 1, 2, ...).$

15. $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = n^2 + 2n + 5 \cdot (-2)^n\,, \quad (n = 1, 2, ...).$

16. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 12x_n = 5\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), \quad (n = 1, 2, ...)\,, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$

17. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 2^n + n^2 + 1, \quad (n = 1, 2, ...)\,, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 2.$

18. U slučaju modela nacionalnog dohotka grafički predstaviti D_n, P_n i I_n, koristeći skup parametara: $V_n = 40$, $a = 0,6$ i $b = 0,5$ sa $D_0 = 100$ i $D_1 = 130$.

19. Neka u modelu pregovora između radnika i menadžmenta vrijedi

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = \frac{1}{5}, \qquad R_0 = 100, \qquad M_0 = 50.$$

a) Na istom grafiku nacrtati R_n i M_n za $n = 0, 1, ..., 10$.

b) U ovom modelu, proces pregovora traje neprekidno zauvijek. Konstruirati definiciju "kraja procesa pregovaranja" tako da je potreban samo konačan broj koraka u pregovaranju.

Bibliografija

[1] R.A. Adams, *Calculus - a complet course,* Fifth Edition, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003.

[2] H. Bader, S. Frőhlich, *Matematika za ekonomiste,* Rad, Beograd, 1980.

[3] J. Bakalar, *Mikroekonomija,* Treće izdanje, HKD Napredak, Sarajevo, 2003.

[4] A.C. Chiang, *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Treće izdanje, MATE, Zagreb, 1994.

[5] S. Drpljanin, *Matematika,* Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[6] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations,* Third Edition, Springer, New York, 2005.

[7] G. Gandolfo, *Economic Dynamics - Study Edition,* Springer-Verlag Berlin, Heildelberg, 1997.

[8] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations (With Illustrative Examples from Economics, Psihology, and Sociology),* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[9] L.D. Hoffmann, G.L. Bradley, *CALCULUS for Business, Economics, and the Social and Life Scinces,* Fifth Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1992.

[10] B. Ivanović, *Matematika za ekonomiste,* Naučna knjiga, Beograd, 1973.

[11] W. G. Kelley, A. C. Peterson, *Difference Equations - An introduction with applications,* Academic Press, 2001.

[12] M. R. S. Kulenović, G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2001.

[13] M. R. S. Kulenović, O. Merino, *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2002.

[14] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene,* Tehnička knjiga - Zagreb, 1967.

[15] V. Lakshmikantham, D. Triggiante, *Theory of Difference Equations,* Academic Press, Boston et al., 1988.

[16] H. Levy, F. Lesman, *Finite Difference Equations,* Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[17] W.G. McCallum, D. Hughes-Hallet, A.M. Gleason et al., *Multivariable calculus,* Wiley, New York, 1998.

[18] R. E. Mickens, *Difference Equations, Theory and Applications,* Second Edition, VNR, New York, 1990.

[19] M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene,* Denfas, Tuzla, 2008.

[20] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika - Teorija i zadaci,* PrintCom, Tuzla, 2009.

[21] L. Smajlović, *Matematika za ekonomiste,* Ekonomski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2010.

[22] B. Šego, *Matematika za ekonomiste,* Narodne novine d.d., Zagreb, 2005.

[23] K. Šorić, *Zbirka zadataka iz matematike s primjenom u ekonomiji,* Treće izdanje, Element, Zagreb, 2006.

[24] F. Vajzović, M. Malenica, *Diferencijalni račun funkcija više promjenljivih,* Univerzitetska knjiga, Sarajevo, 2002.