Prof. dr. Mehmed Nurkanović

M A T E M A T I K A   Z A   E K O N O M I S T E

Pitanja i zadaci za završni dio ispita

(Odgovori na sva pitanja mogu se naći u knjizi - udžbeniku: M. Nurkanović, O. Kurtanović: *Matematika za ekonomiste*, PrintCom, Tuzla, 2013.)

1. a) Objasniti pojam matrice. Operacije s matricama. Navesti sva odgovarajuća pravila (uvjete pod kojim se određena operacija može izvesti, tekstualno pravilo izvođenja operacije i odgovarajuću formulu).

   b) Data je matrica $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$. Izračunati zbir i razliku matrice A i matrice B, ako je poznato da su elementi prve vrste matrice B dvostruki proizvodi odgovarajućih elemenata prve vrste matrice A, a elementi druge vrste matrice B su za 25% veći od odgovarajućih elemenata druge vrste matrice A.

   c) Navesti definiciju transponirane matrice kao i osobine transponiranja matrice. Naći proizvode $A^T B$ i $A^T B^T$ ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

   d) Zadaci: 1.-11. str. 15 i 16 knjige.

2. a) Objasniti pojam determinante i navesti razliku između pojmova matrice i determinante.

   b) Objasniti Sarrusovo pravilo i kada se ono može upotrijebiti. Navesti teorem o Laplaceovom razvoju pri izračunavanju determinanti.

   c) Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

   d) Zadaci: 1.-5. str. 22 i 23 knjige.

3. a) Navesti sve osobine determinanti uz navođenje odgovarajućih primjera.

   b) Koristeći samo osobine determinanti naći vrijednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & -9 & 6 \end{vmatrix}$.

   c) Zadaci: 6.-8. str. 23 knjige.

4. a) Definicija inverzne matrice (objasniti detaljno i pojmove minora i algebarskog komplementa određenog elementa matrice, te pojam adjungirane matrice).

   b) Osobine inverzne matrice i formula za izračunavanje inverzne matrice.

   c) Odrediti nepoznatu matricu X iz jednadžbe: $XA = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

   d) Zadaci: 1.-9. str. 33 i 34 knjige.

5. a) Definicija linearne neovisnosti i linearne ovisnosti matrica.

   b) Ispitati linearnu (ne)ovisnost matrica:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   c) Zadaci: 10. i 11. str. 34 i 35 knjige.

6. a) Pojam ranga matrice. Objasniti način izračunavanja ranga matrice.

   b) Odrediti rang matrice: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

   c) Zadaci: 12. i 13. str. 35 knjige.

7. a) Napisati opći oblik sistema od m linearnih algebarskih jednadžni sa n nepoznanica. Objasniti pojam saglasnosti rješenja tog sistema. Koliko rješenja može imati taj sistem?

   b) Kronecker-Capelliev teorem - formulacija - bez dokaza. Napisati kada sistem ima jedinstveno rješenje i kada nema jedinstveno rješenje.

   c) Dat je sistem algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7. \end{aligned}$$

   Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga Gaussovim i matričnim metodom.

   d) Zadaci: 1. i 2. str. 47 knjige.

8. a) Cramerov teorem - formulacija - bez dokaza (ali sa objašnjenjem pojedinih oznaka u formulaciji teorema).

   b) Cramerovim metodom riješiti sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= -3 \\ 5x - 2y + 4z &= 9 \\ 3x - 5y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

   c) Zadaci: 3.-6. str. 47 i 48 knjige.

9. a) Pojam homogenog sistema linearnih algebarskih jednadžbi (napisati opći oblik). Objasniti pojam trivijalnog i netrivijalnog rješenja ovog sistema. Kada homogeni sistem ima i netrivijalnih rješenja (odakle to slijedi)?

   b) Zadatak 7. str. 48 knjige).

10. a) Objasniti model tržišne ravnoteže u slučaju kad su funkcije ponude i potražnje linearnog oblika kao funkcije cijene (navesti njihove formule i objasniti zbog čega su pojedini koeficijenti navedenog oblika). Naći tačku ravnoteže (ekvilibrijuma) i objasniti kada ovaj model ima ekonomskog smisla. Nacrtati sve odgovarajuće slike.

    b) Zadaci 1. i 2. str. 54 knjige.

11. a) Opisati *Model nacionalnog* dohotka u obliku sistema linearnih algebarskih jednadžbi. Izračunavanje ekvilibrijuma tog modela.

    b) Zadaci 3. i 4. str. 54 knjige.

12. a) U *input-output modelu* poznat je vektor Q outputa svih sektora, tj. novi plan proizvodnje. Kako se određuje vektor q finalne potražnje svih sektora i međusektorska potražnja Q_{ij}? Napisati i izvesti odgovarajuće formule.

    b) U *input-output modelu* poznat je vektor q finalne potražnje svih sektora. Kako se određuje vektor Q outputa svih sektora, tj. novi plan proizvodnje i međusektorska potražnja Q_{ij}? Napisati i izvesti odgovarajuće formule.

    c) Zadaci 5. (str. 62 knjige) i 7. (str. 64 knjige).

13. a) Objasniti općenito pojam funkcije ponude (nacrtati odgovarajuće slike za različite tipove funkcije ponude).

    b) Objasniti općenito pojam funkcije potražnje (nacrtati odgovarajuće slike za različite tipove funkcije potražnje).

14. a) Napisati kako izgledaju funkcije ukupnih troškova i prosječnih troškova kao funkcije ponude. Šta su varijabilni, a šta fiksni troškovi i kako se izračunavaju iz ukupnih troškova?

    b) Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija ukupnih troškova? Pod kojim uvjetima općenita kvadratna funkcija $T(Q) = aQ^2 + bQ + c$ može biti funkcija ukupnih troškova?

    c) Zadaci 5. i 6. str. 84 knjige.

15. a) Napisati kako izgledaju funkcije ukupnih prihoda i ukupne dobiti u ovisnosti o ponudi, a kako u ovisnosti o cijeni proizvoda. Objasniti pojam *inetrvala rentabilnosti* proizvodnje nekog artikla.

    b) Zad. 7. str. 84 knjige.

16. a) Definicija aritmetičkog niza. Objasniti odakle potiče naziv aritmetičkom nizu.

    b) Izvesti formulu po kojoj se računa opći član aritmetičkog niza i formulu za zbir prvih n članova aritmetičkog niza.

    c) Zadaci: 1.-11. str. 90 i 91 knjige.

17. a) Definicija geometrijskog niza. Objasniti odakle potiče naziv geometrijskom nizu.

    b) Izvesti formulu po kojoj se računa opći član geometrijskog niza i formulu za zbir prvih n članova geometrijskog niza.

    c) Objasniti primjenu geometrijskog niza u ekonomiji (obračun kamate).

    d) Zadaci: 1.-11. str. 96 i 97 knjige.

18. a) Definicija granične vrijednosti niza. Objasniti pojam konvergencije i divergencije niza.

    b) Navesti osobine limesa niza.

    c) Zadaci: 1.-5. str. 103 knjige.

19. a) Napisati formule kojima se defiira broj e.

    b) Izračunavanje kamate u neprekidnom vremenu.

    b) Zadaci: 7.-11. str. 103 knjige i zadaci: 13.-15. str. 104 knjige.

20. a) Definicija izvoda funkcije jedne varijable.

    b) Geometrijsko značenje izvoda funkcije.

    c) Pravila za izvode.

    d) Zadaci: 2.-10. str 133 i 134 knjige.

21. a) Pojam diferencijala funkcije jedne varijable. Pravila za diferencijal.

    b) Napisati formulu za korištenje diferencijala pri približnom izračunavanju promjene funkcije.

    c) Zadaci: 1.-8. str 138 i 139 knjige.

22. a) L'Hospitalovo pravilo (navesti dva teorema).

    b) Zadaci: 1.-6. str. 152 i 153 knjige.

23. a) Navesti definicije monotono opadajućih i monotono rastućih funkcija.

    b) Na koji način praktično ispitujemo monotonost funkcije na nekom intervalu (navesti odgovarajući teorem)?

    c) Zadaci: 1. i 2. str. 163 knjige.

24. a) Navesti definiciju lokalnih ekstrema funkcije jedne varijable i definiciju stacionarne tačke funkcije.

    b) Navesti test prvog izvoda i testove izvoda višeg reda pri određivanju lokalnih ekstrema.

    c) Zadaci: 3.-10. str. 163 i 164 knjige.

25. a) Definicija (strogo) konveksne (konkavne) funkcije.

    b) Navesti teorem koji govori o načinu praktičnog ispitivanja konveksnosti (konkavnosti) funkcije pomoću izvoda.

    c) Objasniti pojam *krive indiferencije*.

    d) Zadaci: 1.-5. str. 170 knjige.

26. a) Općenita definicija granične (marginalne) funkcije. Definicija graničnih funkcija ukupnih troškova, ukupnih prihoda i ukupne dobiti kao funkcije ponude, odnosno cijene.

    b) Odrediti graničnu funkciju ukupnih troškova ako su prosječni troškovi $\overline{T}(Q) = Qe^{-Q}$.

27. a) Navesti i dokazati teorem koji govori o tome kada su prosječni troškovi minimalni.

    b) Navesti i dokazati teorem koji govori o tome na kojem nivou proizvedenih dobara je dobit maksimalna.

28. a) Pojam elastičnosti funkcije jedne varijable. Izvesti formulu za koeficijent elastičnosti funkcije jedne varijable

    b) Ekonomska interpretacija koeficijenta elastičnosti. različiti tipovi elastičnosti funkcije.

    c) Zadaci: 4.-11.str. 188 i 189 knjige.

29. a) Objasniti pojam *izokvante (nivo linije)* kao i vezu između nivo linije funkcije dvije varijable i krive indiferencije.

    b) Zadaci: 7.-10. str. 196 i 197 knjige.

30. a) Definicija lokalnih ekstrema funkcije više varijabli. Pojam stacionarne tačke te funkcije.

    b) Objasniti pojam Hessiana funkcije više varijabli.

    c) Navesti Silvesterov kriterij za određivanje ekstrema funkcije više promjenljivih (spec. za funkciju dvije varijable).

    d) Zadaci: 1.-6. str. 227 knjige.

31. a) Objasniti pojam parcijalne elastičnosti u slučaju funkcije dvije varijable

    b) Definicija homogene funkcije više promjenljivih.

    c) Navesti obje verzije Eulerovog teorema.

    d) Zadaci: 4.-12. str. 236. i 237. knjige.

32. a) Metod smjene kod neodređenog integrala.

    b) Zadaci: 1.-4. str. 262 knjige.

33. a) Metod parcijalne integracije kod neodređenih integrala - izvesti odgovarajuću formulu.

    b) Pokazati kako se primjenjuje metod parcijalne integracije u slučaju sljedećih integrala:

    1. $\int P(x)\, e^{ax} dx$, 2. $\int P(x) \ln x dx$, 3. $\int e^{ax} \sin bx dx$, ($P(x)$ je polinom po x).

    c) Zadaci: 5. i 6. str. 262 knjige.

34. a) Rastavljanje razlomljene racionalne funkcije na parcijalne razlomke na primjeru

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k (x^2+px+q)^l},$$

    gdje je $P(x)$ polinom po x stepena nižeg od $k+l$, a $k, l \in \mathbb{N}$.

    b) Izračunati: $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$.

    c) Zad. 7. str. 262 knjige.

35. a) Izračunavanje ekonomske funkcije kad je poznata njena granična funkcija. Specijalno za funkcije ukupnih troškova, ukupnih prihoda i ukupne dobiti (kao funkcije cijene i funkcije ponude).

    b) Zadaci: 10.-13. str. 262 i 263 knjige.

36. a) Newton-Leibnitzova formula za računanje određenog integrala.

    b) Osobine određenog integrala.

37. a) Metod smjene i metod parcijalne integracije u određenom integralu.

    b) Zadaci: 1.-12. str. 284 i 285 knjige.

38. Pokazati kako se određuje funkcija $y = y(x)$ ako znamo njen koeficijent elastičnosti $E_{y,x} = f(x)$.

    b) Zadaci: 8.-11. str. 300 knjige.

39. a) Linearna diferencijalna jednadžba (oblik i način rješavanja).

    b) Riješiti diferencijalnu jednadžbu: $y' + xy = x$ i zad. 3. str. 299 knjige.

40. a) Bernoullijeva diferencijalna jednadžba (oblik i način rješavanja)

    b) Zadaci 4. i 5. str. 300 knjige.

41. a) Linearna diferentna jednadžba prvog reda.

    b) Primjena linearne diferentne jednadžbe prvog reda u obračunu kamate.

42. a) Primjena linearne diferentne jednadžbe u izradi amortizacionog plana

    b) Napraviti amortizacioni plan za otplatu zajma od 1500$ u toku šest mjeseci uz kamatnu stopu 7%.

43. Diskretni model nacionalnog dohotka.

44. a) Metod neodređenih koeficijenata pri rješavanju linearne diferentne jednadžbe višeg reda s konstantnim koeficijentima.

    b) Zadaci: 1.-17. str. 332 i 333 knjige.

45. Primjena diferentnih jednadžbi na model pregovora radnika i menadžmenta (zad. 19. str. 333 knjige).

46. Diskretni model nacionalnog dohotka (složeniji oblik) (zad. 18. str. 333 knjige).