UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA

Jasmina Rahmanović
Drugi ciklus studija
Primijenjena matematika

Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma u diferentnim jednadžbama i diskretnim dinamičkim sistemima

-Magistarski rad-

Tuzla, 2023.

UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Ime i prezime kandidata: Jasmina Rahmanović

Naziv studijskog programa: Primijenjena matematika

Naslov rada: *Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma u diferentnim jednadžbama i diskretnim dinamičkim sistemima*

UDK broj:

Magistarski rad je odbranjen dana:

Sastav komisije za odbranu rada:

Dr sc. Samra Moranjkić, vanredni profesor, predsjednik komisije
Dr sc. Mehmed Nurkanović, redovni profesor, mentor i član
Dr sc. Zehra Nurkanović, redovni profesor, član

Redni broj iz matične evidencije:

Broj zapisnika:

Rezime

Za razliku od hiperboličkih tačaka ekvilibrijuma, gdje je lokalna stabilnost obuhvaćena kroz nekoliko teorema i gdje uvijek imamo jasnu situaciju, ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u diferntnim jednadžbama i diskretnim dinamičkim sistemima je specifično i zahtijeva dodatna ispitivanja i upotrebu različitih tehnika i metoda. Ovaj rad posvećuje pažnju upravo nehiperboličkom ekvilibrijumu kod diferentnih jednadžbi drugog reda, te jednodimezionalnih i dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema.

Prvo poglavlje (*Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma diferentne jednadžbe prvog reda*) obuhvata diferentnu jednadžbu prvog reda, to jest, jednadžbu oblika

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, ...,$$

koja ujedno predstavlja i jednodimenzionalni diskretni dinamički sistem.

Na samom početku su definisani osnovni pojmovi, te je uveden pojam stabilnosti tačaka ekvilibrijuma, a zatim je posebna pažnja posvećena stabilnosti nehiperbiličkih tačaka ekvilibrijuma. Nehiperbolički ekvilibrijum se pojavljuje u slučaju kada je $|f'(\bar{x})| = 1$, pri čemu je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma navedene diferentne jednadžbe prvog reda, odnosno, fiksna tačka preslikavanja f. Razmatrana su dva slučaja i to kada je $f'(\bar{x}) = 1$ i $f'(\bar{x}) = -1$, te su navedeni kriteriji za utvrđivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u oba slučaja.

U drugom poglavlju (*Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema*) razmatran je dvodimenzionalni diskretni dinamički sistem:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} & = & g(x_n, y_n) \end{array}\right\} n = 0, 1, ...,$$

odnosno, diferentna jednadžba drugog reda:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_{n-1}), \quad n = 0, 1, ...$$

Uvedeni su osnovni pojmovi o stabilnosti, analogni onima u prvom poglavlju, a zatim je navedeno nekoliko metoda za ispitivanje stabilnosti nehiperboličkih tačaka ekvilibrijuma (to su one tačke u kojima Jakobijan matrica pridruženog lineariziranog sistema ima bar jednu svojstvenu vrijednost po modulu jednaku jedan). Tako je opisan metod Lyapunovljeve funkcije, metod invarijante, metod centralne mnogostrukosti, KAM metod, Neimark-Sackerova bifurkacija, te metod monotonih preslikavanja. Svaki od ovih metoda ilustrovan je pomoću odgovarajućih, pažljivo odabranih, primjera.

Summary

Unlike hyperbolic equilibrium points, where local stability is included through several theorems and where we always have a clear situation, the stability analysis of non-hyperbolic equilibrium points in differential equations and discreete dynamical systems is specific and requires additional tests and the use of different techniques and methods. This paper devotes attention precisely at the non-hyperbolic equilibrium of the differential equations and discreete dynamical systems.

First chapter (*Stability of non-hyperbolic equilibrium of the first-order differential equation*) include first-order differential equation, i.e. equation of the form

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, ...$$

At the begining, the basic concept are defined and we introduce the concept of an equilibrium point and then special attention is paid to the stability of non-hyperbolic equilibrium points, i.e., in the case when $|f'(\bar{x})| = 1$, where $\bar{x}$ is an equilibrium point of listed first-order differential equation or fixed point of map f. Two cases are considered, when $f'(\bar{x}) = 1$ and when $f'(\bar{x}) = -1$, and the criteria for determining stability of non-hyperbolic equilibrium in both cases are listed.

In the second chapter (*Stability of non-hyperbolic equilibrium of the two-dimensional discrete dynamical systems*) it was discussed two-dimensional discrete dynamical system:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} & = & g(x_n, y_n) \end{array}\right\} n = 0, 1, ...,$$

or second-order differential equation:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_{n-1}), \quad n = 0, 1, ...$$

Basic concepts of stability are introduced, analogous to those in the first chapter, and then several methods for investigating the stability of non-hyperbolic equilibrium points (these are the points where the Jacobian matrix of the associated linearized system has at least one eigenvalue per modulo equal to one) are listed. So, the Lyapunov function method, the invariant method, the Method of center manifold, the KAM method, the Neimark-Sacker bifurcation, and the Method of monotone maps are described. Each of these methods is illustrated with an appropriate, carefully selected, example.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Posljednjih nekoliko decenija izučavanje diferentnih jednadžbi je intenzivirano, a uglavnom je motivirano problemima iz prakse. Naime, veliki broj procesa koji se odvijaju oko nas (iz biologije, fizike, medicine, ekonomije,...) može se predstaviti uz pomoć diskretnih modela, to jest, diferentnih jednadžbi ili sistema diferentnih jednadžbi. To su procesi koji se najčešće prate u diskretnom vremenu. Također, veliki napredak u razvoju tehnologije, odnosno, odgovarajućih softverskih programa i paketa, olakšao je, a time i ubrzao razvijanje ove oblasti.

Diskretni dinamički sistem (DDS) opisujemo kao autonomni sistem diferentnih jednadžbi

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, ..., \tag{1.1}$$

gdje je je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Rješenje posmatranog sistema (1.1) je niz $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadavoljava dati sistem za svako $n = 0, 1, ...$ i ono uključuje konstantu C, koja može biti izračunata ako je dat početni uvjet $x_0 = \alpha$.

Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ DDS (1.1) je rješenje jednadžbe

$$\bar{x} = F(\bar{x}).$$

Dakle, tačka ekvilibrijuma je fiksna tačka preslikavanja F.

Fiksna tačka preslikavanja F^k naziva se periodičnom tačkom perioda k sistema (1.1). To je, zapravo, rješenje jednadžbe

$$p = F^k(p).$$

Pozitivna orbita tačke x_0 za sistem (1.1) je skup

$$\mathcal{O}^+(\alpha) = \{x_0, F(x_0), F^2(x_0), ...\}.$$

Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma DDS (1.1), tada uvođenjem smjene

$$y_n = x_n - \bar{x} \text{ i } G(y) = F(y + \bar{x}) - F(\bar{x}),$$

DDS (1.1) prelazi u sistem
$$y_{n+1} = G(y_n).$$
Nije teško uočiti da je 0 tačka ekvilibrijuma dobijenog sistema i da ona odgovara tački ekvilibrijuma $\bar{x}$ sistema (1.1). Dakle, bez smanjenja općenitosti, može se pretpostaviti da je 0 tačka ekvilibrijuma DDS (1.1).

Veoma je važno u praksi ispitati stabilnost DDS (1.1), odnosno, stabilnost njegove tačke ekvilibrijuma. Ukoliko sve svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\bar{x})$ leže unutar jediničnog diska, ekvilibrijum $\bar{x}$ je lokalno asimptotski stabilan, a ukoliko je bar jedna svojstvena vrijednost izvan jediničnog diska, riječ je o nestabilnom ekvilibrijumu.

Postoje različiti pristupi u ispitivanju stabilnosti DDS, i to se uglavnom može, s manjim ili većim naporom, izvesti u slučaju tzv. hiperboličkog ekvilibrijuma, to jest, kada nijedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\bar{x})$ nije po modulu jednaka jedan. Međutim, poseban problem predstavlja ispitivanje stabilnosti tzv. nehiperboličkog ekvilibrijuma, to jest, u slučaju kada je barem jedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\bar{x})$ po modulu jednaka jedan. Važno je napomenuti da se tada postupa različito od slučaja do slučaja i da ne postoji poseban metod za to.

Predmet proučavanja ovog rada je, upravo, nehiperbolički ekvilibrijum kod diskretnih dinamičkih sistema oblika (1.1), koji zahtijeva posebnu pažnju i posebne tehnike i metode za utvrđivanje stabilnosti odnosno nestabilnosti.

Prvi dio obrađuje stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma u jednodimenzionalnom slučaju, to jest kada je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i ovdje postoje dovoljni uvjeti za utvrđivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Ekvilibrijum je nehiperbolički ako je $|F'(\bar{x})| = 1$. Dakle, razmatraju se dva slučaja, i to kada je $F'(\bar{x}) = 1$ i kada je $F'(\bar{x}) = -1$.

U slučaju $F'(\bar{x}) = 1$, koristeći Test drugog izvoda, Test trećeg izvoda odnosno Test izvoda višeg reda, moguće je doći do zaključka o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Ovdje se uvode i pojmovi polustabilnosti odozdo i polustabilnosti odozdo tačke ekvilibrijuma. Test izvoda višeg reda predstavlja opći kriterij za utvrđivanje lokalne asimptotske stabilnosti, polustabilnosti, odnosno, nestabilnosti nehiperboličke tačke ekvilibrijuma $\bar{x}$.

Nešto složenija situacija je u slučaju kada je $F'(\bar{x}) = -1$, zbog mogućnosti pojave periodičnih rješenja minimalnog perioda dva i zbog činjenice da orbita $\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, F(x_0), ..., F^n(x_0)\}$ oscilira oko ekvilibrijuma $\bar{x}$. Zato se ovdje uvodi pojam Schwarzianovog izvoda ili Schwarziana u tački ekvilibrijuma, te je pomoću njega moguće dobiti dovoljne uvjete za lokalnu asimptotsku stabilnost ili nestabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma. U ovom slučaju tzv. Murakamijev teorem je opći kriterij koji daje odgovor na pitanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma.

U nekim slučajevima moguće je izvesti zaključak o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma elementarnim putem, odnosno, posmatrajući ponašanje rješenja u blizini tačke ekvilibrijuma.

Koristeći Dijagram paukove mreže, moguće je grafički prikazati ponašanje rješenja oko tačke ekvilibrijuma.

Drugi dio rada posvećen je dvodimenzionalnim diskretnim dinamičkim sistemima, odnosno, diferentnim jednadžbama drugog reda. U ovom slučaju (to jest, kada je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ u DDS (1.1)) ili u slučaju diferentne jednadžbe drugog reda

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, ..., \tag{1.2}$$

ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma postaje vrlo ozbiljan problem. Naime, Teorem linearizirane stabilnosti daje odgovor kada je riječ o stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma, ali stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma ostaje otvorena.

Ipak, u nekim slučajevima postoje metodi pomoću kojih se može utvrditi njegova stabilnost. Metod Lyapunovljeve funkcije jedan je od načina za utvrđivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. On se može koristiti i za višedimenzionalne sisteme, ali ćemo se ovdje zadržati na dvodimenzionalnom slučaju. Prvo se uvodi pojam Lyapunovljeve funkcije, a onda ako su ispunjeni uvjeti Lyapunoljevog teorema stabilnosti, može se utvrditi stabilnost, lokalna asimptotska stabilnost, odnosno, globalna asimptotska stabilnost tačke ekvilibrijuma.

Jedan od metoda pomoću kojeg se mogu izvesti zaključci o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma je i metod invarijante. Naime, ukoliko DDS (1.1) ili jednadžba (1.2) posjeduju invarijantu, tada se uz pomoć Lyapunovljeve funkcije, pod određenim uvjetima, koriteći tzv. Diskretni Dirichletov teorem može odrediti priroda stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma. Isti se metod može koristiti i u trodimenzinalnom slučaju DDS (1.1) ili u slučaju diferentne jednadžbe trećeg reda

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n = 0, 1, ... \tag{1.3}$$

U ovom radu pokazana je primjena ovog metoda na ispitavanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma Lynessove diferentne jednadžbe

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ...,$$

gdje je $a > 0$ parametar.

Također, naveden je i primjer primjene metoda invarijante na ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma za Toodovu diferentnu jednadžbu trećeg reda

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n + x_{n-1}}{x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, ...,$$

pri čemu je $a > 0$.

Metod invarijantne nije previše složen za primjenu, ali je ponekad jako teško pronaći invarijantu, iako je njena egzistencija obezbijeđena teoremom, kada je riječ o nehiperboličkom ekvilibrijumu.

Navedena dva metoda, metod Lyapunovljeve funkcije i metod invarijante, mogu se koristiti i za ispitivanje stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma.

U dvodimenzionalnom slučaju DDS (1.1), kao i u slučaju diferentne jednadžbe (1.2) moguće je koristiti tzv. Teorem centralne mnogustrukosti, kako bi se došlo do spoznaje o prirodi stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma, mada je taj metod vrlo kompleksan. Centralna mnogostrukost je, najjednostavnije rečeno, skup M_c u prostoru manje dimenzije, gdje se o stabilnosti polaznog sistema može zaključivati promatrajući ponašanje na skupu M_c. S obzirom da je stabilnost jako dobro razrađena u jednodimenzionalnom slučaju, ovaj metod predstavlja vrlo moćno sredstvo za ispitivanje stabilnosti u dvodimenzionalnom slučaju. Ovaj metod se može primijeniti na ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u dva slučaja, i to:

- Jedna svojstvena vrijednost matrice Jakobijana J_F je 1, a druga je unutar jedinične kružnice.
- Jedna svojstvena vrijednost matrice Jakobijana J_F je -1, a druga je unutar jedinične kružnice.

U ovom radu je pokazana primjena metoda centralne mnogostrukosti na diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Ex_{n-1}}{x_n^2 + f}, \quad n = 0, 1, ...,$$

pri čemu je $A, E, f \in (0, \infty)$.

Ponekad je moguće ispitivati stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma u dvodimenzionalnom DDS (1.1) ili diferentnoj jednadžbi drugog reda (1.2) u najtežem slučaju, kada su obje svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\bar{x})$, odnosno $J_f(\bar{x})$, konjugovano-kompleksni brojevi po modulu jednaki jedan. To je tzv. eliptički slučaj.

Ukoliko preslikavanja F ili f imaju osobinu da čuvaju površinu (tzv. area preserving map), tada se koristi tzv. KAM (Kolmogorov-Andre-Moser) teorija. Preslikavanje F je preslikavanje koje čuva površinu ako za njegovu Jakobijevu matricu $J_F(x)$ vrijedi

$$\det J_F(x) = 1,$$

za sve $x \in \mathbb{R}^2$. Glavni rezultat koji se primjenjuje ovdje je tzv. KAM teorem na osnovu kojeg se utvrđuje stabilnost nula ekvilibrijuma, tako što se pomoću tri odgovarajuće transformacije koordinata sistem dovede u tzv. Birkhoffov normalni oblik.

U radu je ilustrovana primjena KAM metoda na diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^3 + B}{ax_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ...,$$

pri čemu su A, B, a parametri i $A, B, a > 0$.

S druge strane, ukoliko preslikavanja ne čuvaju površinu, ali zadovoljavaju određene dodatne uvjete o egzistenciji tzv. Neimark-Sackerove bifurkacije, moguće je zaključiti da je nehiperbolički ekvilibrijum stabilan, ali ne i asimptotski. Dakle, Neimark-Sackerova bifurkacija se pojavljuje u diskretnim dinamičkim sistemima koji zavise o parametru, sa fiksnom tačkom čiji Jakobijan ima par konjugovano-kompleksnih svojstvenih vrijednosti. Najjednostavnije rečeno, bifurkacija se javlja kada mala promjena vrijednosti parametra izaziva iznenadne kvalitativne ili topološke promjene ponašanja sistema. Naziv "bifurkacija" prvi je uveo Henri Poincare 1885. Lokalne bifurkacije, koje mogu biti u potpunosti analizirane posmatrajući lokalnu stabilnost evilibrijuma, periodičnih tačaka ili invarijantnih skupova, kada parametar prolazi kroz kritičnu vrijenost, javljaju se u nehiperboličkim tačkama. Neimark-sackerova bifurkacija je diskretni analogon Hopfove bifurkacije. Razlikujemo Neimark-Sackerovu *superkritičnu* i *subkritičnu* bifurkaciju. U prvom slučaju, fiksna tačka je stabilna za vrijednost bifurkacionog patrametra manju od Lyapunovljevog koeficijenta λ_0 (koji se dobije u procesu prelaska na normalnu formu), a nestabilna za vrijednost parametra veću od λ_0. Fiksna tačka je za neku malu pozitivnu vrijednost parametra okružena izoliranom zatvorenom invarijantnom krivom, koja je jedinstvena i stabilna. Sve orbite koje startaju izvana ili iznutra u odnosu na zatvorenu krivu, ali ne u koordinatnom početku, teže ka krivoj pod određenim iteracijama. U drugom slučaju, nestabilna zatvorena kriva postoji za vrijednost parametra manju od Lyalunovljevog koeficijenta λ_0. Struktura orbita na invarijantnom krugu zavisi od činjenice da li je količnik između ugla rotacije i 2π racionalan ili iracionalan. Ako je racionalan, orbite na invarijantnoj krivoj su periodične, a ako je iracionalan, orbite na krugu su guste.

Primjena ovog metoda u radu je pokazana na primjeru jedne homogene racionalne diferentne jednadžbe drugog reda s kvadratnim članovima

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Bx_n x_{n-1} + Cx_{n-1}^2}{ax_n^2 + bx_n x_{n-1} + cx_{n-1}^2}, \quad n = 0, 1, ...,$$

pri čemu su A, B, C, a, b, c pozitivni parametri.

U korištenju metoda centralne mnogostrukosti, KAM teorije ili u slučaju Neimark-Sackerove bifurkacije, neophodno je dobiti odgovarajuću (Birkhoffovu) normalnu formu

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_l \\ O_l \end{pmatrix},$$

odakle onda proizilaze naredni koraci u ispitivanju.

Naravno, praksa pokazuje da se ispitivanje prirode stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u dvodimenzionalnom DDS (1.1) ili diferentnoj jednadžbi drugog reda(1.2) može izvoditi i na neki poseban način, specifičan za svaki slučaj pojedinačno. Tako se, recimo, u slučaju kada je preslikavanje F kooperativno ili kompetitivno, to jest, kada je preslikavanje F takvo da je rastuće po obje varijable ili je opadajuće po prvoj, a rastuće po drugoj varijabli, mogu koristiti metodi teorije nizova u parcijalno uređenom skupu $\mathbb{R}^2$. U metodu monotonih preslikavanja korišteno je tzv. *jugo-istočno (se)* parcijalno uređenje na $\mathbb{R}^2$, definirano sa $(x_1, y_1) \preceq_{se} (x_2, y_2)$ ako je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \geq y_2$. Slično, *sjeverno-istočno (ne)* parcijalno uređenje na $\mathbb{R}^2$ definiše sa $(x_1, y_1) \preceq_{ne} (x_2, y_2)$ ako je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$.

Metod monotonih preslikavanja ilustrovan je primjenom na diferntnu jednadžbu

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{ax_n^2 + ex_{n-1} + f}, \qquad n = 0, 1, ...,$$

gdje su parametri i a, e, f pozitivni brojevi i $a + e + f > 0$.

Zbog obima rada i kompleksnosti materije, ovdje nije razmatran slučaj tzv. rezonantnog ekvilibrijuma 1:1 (to jest, kada su obje svojstvene vrijednosti matrice Jakobijana $J_F(\bar{x})$ jednake jedan).

O metodu centralne mnogostrukosti, KAM teoriji i Neimark-Sakerovoj bifurkaciji pisali su M. Kulenović, O. Merino, G. Ladas, S. Elaydi, M. Nurkanovć, Z. Nurkanović i dr. dok se o metodu monotonih preslikavanja može naći u radovima M. Kulenovića, M. Nurkanovića, Z. Nurkanović, M. Garić- Demirović , S. Moranjkić, S. Hrustić i dr.

Slike u radu su rađene pomoću softverskog alata $Wolfram\ Mathematica$ 12.0 i $LaTexa$, dok je posljednja preuzeta iz [5].

Poglavlje 2

Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma diferentne jednadžbe prvog reda

2.1 Stabilnost

U okviru ovog poglavlja posmatraćemo diferentnu jednadžbu prvog reda:

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, ..., \tag{2.1}$$

pri čemu je $f : I \to I$ data funkcija definisana na intervalu I realnih brojeva. Ona ujedno predstavlja i jednodimenzionalni diskretni dinamički sistem, ali ćemo u ovom poglavlju koristiti termin "diferentna jednadž ba". Rješenje jednadžbe (2.1) je svaki niz $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava jednadžbu (2.1) za svako $n = 0, 1, \ldots$. Za neke klase diferentnih jednadžbi moguće je naći opće rješenje, međutim, u općem slučaju, to je jako teško. Ako je dat početni uvjet $x_0 = \alpha$, problem rješavanja jednadžbe (2.1) naziva se **problem početnih vrijednosti (PPV)**. **Opće rješenje** jednadžbe (2.1) je niz $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava jednadžbu (2.1) za svako $n = 0, 1, ...$ i ukuljučuje konstantu C koja se može izračunati ako je dat početni uvjet. **Partikularno rješenje** je rješenje koje se dobije iz općeg rješenja za određenu vrijednost konstante C, odnosno, predstavlja rješenje odgovarajućeg PPV. Kako je već rečeno, za neke diferentene jednadžbe nije moguće pronaći rješenje. Zato se umjesto rješavanja jednadžbe posmatra i ispituje ponašanje njenog rješenja u zavisnosti od početnog uvjeta x_0.

2.1.1 Tačka ekvilibrijuma i periodičnost

Uvedimo pojmove ekvilibrijuma i periodičnosti rješenja diferentne jednadžbe (2.1).(v. [12])

Definicija 2.1.1. *[8, 12]*

1. ***Pozitivna orbita*** *tačke* $x_0 = \alpha$ *jednadžbe (2.1) je niz*

$$\mathcal{O}^+(\alpha) := \{x_0, x_1, x_2, ...\} = \{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ...\}.$$

2. ***Tačka ekvilibrijuma*** *(fiksna tačka ili tačka ravnoteže) jednadžbe (2.1) je tačka* $\bar{x}$, *takva da je*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

3. ***Eventualna tačka ekvilibrijuma*** *jednadžbe (2.1) je tačka* $x^* \in \mathbb{R}$ *za koju postoji* $r \in \mathbb{N}$ *i fiksna tačka* $\bar{x}$ *tako da je*

$$f^r(x^*) = \underbrace{f(f(...f}_{r}(x^*))) = \bar{x}.$$

4. *Tačka* $p \in \mathbb{R}$ *naziva se* ***periodičnom tačkom perioda*** k, *ako je*

$$f^k(p) = p.$$

5. *Tačka* $p \in \mathbb{R}$ *naziva se* ***periodičnom tačkom minimalnog perioda*** k *(ili prostog perioda* k*) ako je* k *broj za koji vrijedi*

$$f^k(p) = p,$$

i

$$f^l(p) \neq p \quad \text{za sve} \quad l = 1, 2, ..., k-1.$$

Ako je p *periodična tačka minimalnog perioda* k, *tada se* $\mathcal{O}^+(p)$ *naziva* ***periodičnom orbitom*** *i ona je tada konačan skup* $\mathcal{O}^+(p) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$. *Za orbite koje nisu periodične kaže se da su* ***neperiodične****.*

6. *Tačka* $p^* \in \mathbb{R}$ *naziva se* ***eventualnom periodičnom tačkom minimalnog perioda*** k, *ako postoji* $r \in \mathbb{N}$ *i periodična tačka* p *(minimalnog perioda* k*) tako da je*

$$f^r(p^*) = p \quad i \quad f^{r-1}(p^*) \neq p.$$

Inače, oznaka $f^r(x)$ predstavlja r-tu iteraciju preslikavanja f koja počinje od tačke x.

Primjer 2.1.1. *Odrediti tačke ekvilibrijuma, neke eventualne tačke ekvilibrijuma, periodične tačke minimalnog perioda dva, eventualno periodične tačke minimalnog perioda dva, kao i odgovarajuće periodične orbite za tzv.* ***tent*** *preslikavanje*

$$x_{n+1} = T_2(x_n), \qquad n = 0, 1, ...,$$

gdje je

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rješenje. Tačke ekvilibrijuma tražimo rješavajući jednadžbu

$$\bar{x} = T_2(\bar{x}).$$

S obzirom na definiciju **tent** preslikavanja, imaćemo dva slučaja.
Za $x \leq \frac{1}{2}$ rješavamo jednadžbu

$$2\bar{x} = \bar{x},$$

i dobijemo $\bar{x} = 0$, što je prva tačka ekvilibrijuma posmatrane jednadžbe.
Ako je $x > \frac{1}{2}$, tada rješavamo jednadžbu

$$2(1-\bar{x}) = \bar{x},$$

te dobijamo drugu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = \frac{2}{3}$.
Odredimo eventualne tačke ekvilibrijuma reda 1 i 2.
Za $r = 1$ i $\bar{x} = 0$ imamo

$$T_2(x^*) = 0 \wedge x^* \neq 0.$$

Odakle slijedi $x^* = 1$ (razmatrajući slučajeve $x \leq \frac{1}{2}$ i $x > \frac{1}{2}$).
Dalje, za $\bar{x} = \frac{2}{3}$, slijedi

$$T_2(x^*) = \frac{2}{3} \wedge x^* \neq \frac{2}{3},$$

odakle se dobije $x^* = \frac{1}{3}$. Odgovarajuće pozitivne orbite su

$$\mathcal{O}^+(1) = \{1, 0, 0, ...\}, \qquad \mathcal{O}^+\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\}.$$

Neka je $r = 2$. Vrijedi

$$T_2^2(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \frac{1}{4} \\ 2(1-2x), & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 2(2x-1), & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x), & x \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Za $\bar{x} = 0$ je

$$T_2^2(x^*) = 0 \wedge T_2(x^*) \neq 0.$$

Uzimajući u obzir sve slučajeve preslikavanja T_2^2, dobije se $x^* = \frac{1}{2}$.
Za drugu tačku ekvilibrijuma, $\bar{x} = \frac{2}{3}$, imamo da je

$$T_2^2(x^*) = \frac{2}{3} \wedge T_2(x^*) \neq \frac{2}{3},$$

te se dobije $x^* = \frac{1}{6}$ i $x^* = \frac{5}{6}$.
Odgovarajuće pozitivne orbite su oblika

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 0, 0, ...\right\},$$

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{6}\right) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\},$$

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{5}{6}\right) = \left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\}.$$

Odredimo sada periodična rješenja minimalnog perioda dva. Dakle, rješavamo jednadžbu

$$T_2^2(p) = p \wedge T_2(p) \neq p.$$

Uzimajući u obzir definiciju funkcije T_2, dobiju se dvije periodične tačke $p = \frac{2}{5}$ i $p = \frac{4}{5}$. Odgovorajuće pozitivne orbite

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{2}{5}\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, ...\right\},$$

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{4}{5}\right) = \left\{\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, ...\right\}.$$

Rješavanjem jednadžbi

$$T_2^2(x) = \frac{2}{5}$$

i

$$T_2^2(x) = \frac{4}{5},$$

dobiju se eventualno periodične tačke perioda dva, a to su $x = \frac{1}{10}, x = \frac{9}{10}$ i $x = \frac{3}{5}$, odnosno $x = \frac{3}{10}, x = \frac{1}{5}$ i $x = \frac{7}{10}$,dok su odgovarajuće pozitivne orbite

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{10}\right) = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, ...\right\},$$

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{9}{10}\right) = \left\{\frac{9}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots\right\},$$
$$\mathcal{O}^+\left(\frac{3}{5}\right) = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots\right\},$$
$$\mathcal{O}^+\left(\frac{3}{10}\right) = \left\{\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\},$$
$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{5}\right) = \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\},$$
$$\mathcal{O}^+\left(\frac{7}{10}\right) = \left\{\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\}.$$

■

Navedimo i sljedeća dva značajna rezultata (koji se jednostavno dokazuju) u slučaju kada je f neprekidno preslikavanje.

Teorem 2.1.1. *Neka je $f : I \to I$ neprekidno preslikavanje, gdje je $I = [a, b]$ zatvoreni interval u $\mathbb{R}$. Tada f ima fiksnu tačku.*

Teorem 2.1.2. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(I) \supset I$. Tada f ima fiksnu tačku u I.*

2.1.2 Pojam stabilnosti

Definicija 2.1.2. *[8, 12, 13] Neka je $f : I \to I$ preslikavanje i $\bar{x} \in I$ fiksna tačka od f, gdje je I interval u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.*

1. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) je **stabilna** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da*

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon,$$

   za sve $n \geq 0$.

2. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) naziva se **nestabilnom**, ako nije stabilna.*

3. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) naziva se **lokalnim atraktorom** ako postoji $\gamma > 0$ takvo da*

$$x_0 \in I \ \ i \ \ |x_0 - \bar{x}| < \gamma \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) naziva se* ***lokalno asimptotski stabilnom*** *ili* ***sinkom*** *ako je ona stabilna i ako je lokalni atraktor.*

5. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) naziva se* ***globalnim atraktorom*** *na intervalu I ako*
$$x_0 \in I \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

6. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom*** *ako je ona stabilna i ako je globalni atraktor.*

7. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) se naziva* ***odbijajućom tačkom****, ili* ***repelerom****, ako postoji $r > 0$ takvo da, za svako $x_0 \in I$, za koje je $0 < |x_0 - \bar{x}| < r$, postoji $N \geq 1$ tako da je*
$$|x_N - \bar{x}| \geq r.$$

Napomena 2.1.1. *Stavljajući da je*
$$y_n = x_n - \bar{x} \quad i \quad g(y) = f(\bar{x} + y) - f(\bar{x})$$
i uvrštavajući to u jednadžbu (2.1), dobijamo
$$y_{n+1} = f(\bar{x} + y_n) - \bar{x} = f(\bar{x} + y_n) - f(\bar{x}) = g(y_n). \tag{2.2}$$
Nije teško uočiti da je 0 tačka ekvilibrijuma transformirane jednadžbe (2.2) i da ona odgovara tački ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1). Dakle, možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je 0 tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1). Rješenje
$$x_n = 0, \quad n = 0, 1, ...$$
jednadžbe (2.1) se ponekad naziva trivijalnim rješenjem.

Napomena 2.1.2. *Razne definicije stabilnosti tačke ekvilibrijuma jednadžbe (2.1) možemo proširiti na bilo koje rješenje $\{\bar{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ jednadžbe (2.1).*

2.1.3 Linearizirana stabilnost

Ovdje ćemo navesti tzv.Teorem linearizirane stabilnosti ili Test prvog izvoda, koji daje dovoljne uvjete za stabilnost, odnosno, nestabilnost fiksne tačke diferentne jednadžbe (2.1), koristeći vrijednost prvog izvoda preslikavanja u fiksnoj tački.

Teorem 2.1.3. ***(Teorem linearizirane stabilnosti - Test prvog izvoda)****[8, 12]* *Neka je $\bar{x}$ fiksna tačka preslikavanja $f : I \to I$, pri čemu je I interval realnih brojeva, koje je neprekidno diferencijabilno u okolini tačke $\bar{x}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) Ako je

$$|f'(\bar{x})| < 1,$$

tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilno(sink).

(ii) Ako je

$$|f'(\bar{x})| > 1,$$

tada je $\bar{x}$ odbijajuća tačka (repeler), tj. $\bar{x}$ je nestabilan ekvilibrijum.

Nažalost, ako je

$$f'(\bar{x}) = 1,$$

Teorem linearizirane stabilnosti ne daje nikakve informacije o stabilnosti ekvilibrijuma $\bar{x}$. U tom slučaju potrebna su dodatna ispitivanja.

Definicija 2.1.3. *Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidno diferencijabilna funkcija, a $\bar{x}$ neka je tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1).*

1. *$\bar{x}$ se naziva* ***hiperboličkom fiksnom tačkom*** *ako je*

$$|f'(\bar{x})| \neq 1.$$

2. *$\bar{x}$ se naziva* ***nehiperboličkom fiksnom tačkom*** *ako je*

$$|f'(\bar{x})| = 1.$$

Slučaj nehiperboličkog ekvilibrijuma je specifičan i mora se posebno razmatrati, ne samo kod diferentnih jednadžbi prvog reda, nego općenito. Pokazuje se da je to ispitivanje dosta složeno i da se vrlo često ne može doći do potpunih rezultata.
Sada ćemo navesti jedan teorem koji je, zapravo, proširenje prethodno navedenog Teorema linearizirane stabilnosti. Teorem ćemo navesti bez dokaza.

Teorem 2.1.4. *[8, 12] Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1), i da je, za neko $r > 0$, funkcija f neprekidno diferencijabilna na intervalu $(\bar{x}-r, \bar{x}+r)$. Tada vrijedi:*

(i) ako je

$$|f'(\bar{x})| < 1$$

ili

$$|f'(x)| < 1 \qquad \text{za sve } x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)\backslash\{\bar{x}\},$$

ekvilibrijum $\bar{x}$ je lokalno asimptotski stabilan;

(ii) ako je

$$|f'(\bar{x})| > 1$$

ili

$$|f'(x)| > 1 \qquad \text{za sve } x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \backslash \{\bar{x}\},$$

ekvilibrijum $\bar{x}$ je repeler.

Navedimo još jedan značajan rezultat.

Teorem 2.1.5. *[12] Razmotrimo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \lambda x_n + f(x_n)x_n, \qquad n = 0, 1, ... \tag{2.3}$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$, I je interval koji sadrži 0, $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna u 0, takva da je $f(0) = 0$ i $\lambda x + f(x) \in I$ za sve $x \in I$. Vrijede sljedeće tvrdnje.

(i) Ako je $|\lambda| < 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (2.3) je lokalno asimptotski stabilno.

(ii) Ako je $|\lambda| > 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (2.3) je nestabilno.

(iii) Ako je $|\lambda| = 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (2.3) može biti stabilno ili može biti nestabilno.

Dokaz tvrdnje *iii)* ilustrovat ćemo sa sljedeća dva primjera.

Primjer 2.1.2. *Neka je $x_0 \in [0, 1]$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \qquad n = 0, 1, ... \tag{2.4}$$

Nula ekvilibrijum jednadžbe (2.4) je sink. Dokazati.

Rješenje. Ovdje je $\lambda = 1, f(x) = -x, I = [0, 1]$. Ako je $x_0 = 0$, onda je $x_n \equiv 0$ za sve $n \geq 0$. Ako je $x_0 = 1$, opet je $x_n \equiv 0$ za sve $n \geq 1$. Konačno je, za $0 < x_0 < 1$,

$$0 < x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n.$$

Dakle, niz$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je monotono opadajući i ograničen odozdo. Zato postoji $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, za neko $l \in [0, 1)$. Kako je $l = l - l^2$, slijedi $l = 0$. Dakle, svako rješenje, s početnim uvjetom $0 < x_0 < 1$, monotono opada ka nuli. ■

Primjer 2.1.3. *[8, 12] Neka je $x_0 \in [0, \infty)$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.5}$$

Nula rješenje jednadžbe (2.5) je repeler. Dokazati!

Rješenje. Ovdje je $\lambda = 1, f(x) = x, I = [0, \infty)$. Ako je $x_0 > 0$, onda je

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 > x_n,$$

pa je ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, za neki pozitivan broj l. Ako bi takav broj l, zaista, postojao, imali bismo $l = l + l^2$, što je nemoguće.
Zbog toga zaključujemo da rješenje $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotono divergira ka ∞, pa je, dakle, nula ekvilibrijum repeler. ∎

2.2 Stabilnost u nehiperboličkom slučaju

Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma zahtijeva posebnu pažnju i posebna razmatranja, jer kako smo vidjeli, Teorem linearizirane stabilnosti ne daje nikakve odgovore kada je u pitanju nehiperbolički ekvilibrijum, tj. kada je $|f'(\bar{x})| = 1$.
Da bismo dali odgovor na pitanje o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma, razmatraćemo dva kvalitativno različita slučaja: $f'(\bar{x}) = 1$ i $f'(\bar{x}) = -1$.

1. Slučaj: $f'(\bar{x}) = 1$,[12]

Uvedimo prvo pojam polustabilnosti ekvilibrijuma.

Definicija 2.2.1. *Tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ nazivamo* ***polustabilnom odozdo*** *ako postoji broj $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (2.1) sa $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$, tada je taj niz monotono strogo rastući i konvergira ka $\bar{x}$.

ii) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (2.1) sa $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$, tada postoji prirodan broj $N \geq 1$ takav da je

$$\bar{x} < x_0 < ... < x_{N-1} < \bar{x} + r \leq x_N.$$

Definicija 2.2.2. *Tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ nazivamo* ***polustabilnom odozgo*** *ako postoji broj $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (2.1) sa $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$, tada postoji prirodan broj $N \geq 1$ takav da je

$$x_N \leq \bar{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \bar{x}.$$

ii) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (2.1) sa $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$, tada je taj niz monotono strogo opadajući i konvergira ka $\bar{x}$.

Definicija 2.2.3. *Tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ nazivamo **polustabilnom** ako je ona polustabilna odozdo ili polustabilna odozgo.*

Sada ćemo navesti kriterij za ispitivanje polustabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (2.1), u slučaju kada je $f''(\bar{x}) \neq 0$, tzv. Test drugog izvoda.

Teorem 2.2.1. ***(Test drugog izvoda)****[12] Pretpostavimo da je $f \in C^2[I, I]$, $f'(\bar{x}) = 1$ i $f''(\bar{x}) \neq 0$. Tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) polustabilan. Preciznije:*

i) ako je $f''(\bar{x}) < 0$, tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) polustabilan odozgo;

ii) ako je $f''(\bar{x}) > 0$, tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) polustabilan odozdo.

Dokaz. i) Pretpostavimo da je $f''(\bar{x}) < 0$. Budući da je $f \in C^2[I, I]$, slijedi da postoji neko $r > 0$ tako da, ako je $0 < |x - \bar{x}| < r$, tada vrijedi

$$f'(x) > 1 \text{ ako je } \bar{x} - r < x < \bar{x}$$

i

$$0 < f'(x) < 1 \text{ ako je } \bar{x} < x < \bar{x} + r.$$

Vidimo, dakle, da je f rastuća funkcija na intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$.
Dokažimo sada da je $\bar{x}$ jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, to jest da postoji $\widetilde{x} \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, $\widetilde{x} \neq \bar{x}$ i $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.
Ako je $\bar{x} - r < \widetilde{x} < \bar{x}$, tada postoji $\xi \in (\widetilde{x}, \bar{x})$ tako da je (zbog $f'(\xi) > 1$)

$$\widetilde{x} = \widetilde{x} - \bar{x} + \bar{x} = f(\widetilde{x}) - f(\bar{x}) + \bar{x} = f'(\xi)(\widetilde{x} - \bar{x}) + \bar{x} < (\widetilde{x} - \bar{x}) + \bar{x} = \widetilde{x},$$

što je nemoguće.
Ako je $\bar{x} < \widetilde{x} < \bar{x} + r$, tada postoji $\xi \in (\bar{x}, \widetilde{x})$ tako da je (zbog $f'(\xi) < 1$)

$$\widetilde{x} = \widetilde{x} - \bar{x} + \bar{x} = f(\widetilde{x}) - f(\bar{x}) + \bar{x} = f'(\xi)(\widetilde{x} - \bar{x}) + \bar{x} < (\widetilde{x} - \bar{x}) + \bar{x} = \widetilde{x},$$

što je, takodjer, nemoguće.
Prema tome, $\bar{x}$ je jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$.
Pretpostavimo da je $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$. Tada postoji $\eta \in (x_0, \bar{x})$ tako da je (zbog $f'(\eta) > 1$)

$$x_1 = f(x_0) = f(x_0) - \bar{x} + \bar{x} = f(x_0) - f(\bar{x}) + \bar{x}$$

$$= f'(\eta)(x_0 - \bar{x}) + \bar{x} < (x_0 - \bar{x}) + \bar{x} = x_0.$$

Kako je $\bar{x}$ jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, to postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$x_N \leq \bar{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \bar{x}.$$

Neka je sada $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$. Budući da je f rastuća funkcija na intervalu $(\bar{x}, \bar{x} + r)$, vrijedi $\bar{x} = f(\bar{x}) < f(x_0) = x_1$. Također, postoji $\eta \in (x_0, \bar{x})$ tako da je (zbog $f'(\eta) < 1$)

$$x_1 = f(x_0) = f(x_0) - \bar{x} + \bar{x} = f(x_0) - f(\bar{x}) + \bar{x}$$

$$= f'(\eta)(x_0 - \bar{x}) + \bar{x} < (x_0 - \bar{x}) + \bar{x} = x_0.$$

Dakle, s obzirom da je $\bar{x}$ jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, zaključujemo da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo opadajući i da kon- vergira ka $\bar{x}$, što znači da je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (2.1) polustabilan odozgo.

ii) Dokaz za slučaj $f''(\bar{x}) > 0$ je analogan dokazu pod i). □

Primjer 2.2.1. *Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + 2x_n} \ (n = 0, 1, ...), \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Rješenje. Data jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvlibrijuma $\bar{x} = 0$. Kako je $f(x) = \dfrac{x}{1 + 2x}$, imamo $f'(0) = 1$, tj., ekvilibrijum $\bar{x}$ je nehiperbolički. Dalje je $f''(0) = -4 < 0$, pa prema Teoremu 2.2.1, $\bar{x} = 0$ je polustabilan odozgo. ■

Sljedeći teorem daje kriterij polustabilnosti u slučaju kada je $f''(\bar{x}) = 0$, tzv. Test trećeg izvoda.

Teorem 2.2.2. ***(Test trećeg izvoda)****[12]Pretpostavimo da je $f \in C^3[I, I]$, $f'(\bar{x}) = 1$ i $f''(\bar{x}) = 0$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je $f'''(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilan (sink).

ii) Ako je $f'''(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ repeler.

Dokaz. i) Pretpostavimo da je $f'''(\bar{x}) < 0$. Uzimajući u obzir pretpostavke teorema, tada postoji $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) $f''(x) > 0$ za $\bar{x} - r < x < \bar{x}$,

(b) $f''(x) < 0$ za $\bar{x} < x < \bar{x} + r$,

(c) $0 < f'(x)$ za $\bar{x} - r < x < \bar{x} + r$.

Drugim riječima, f je rastuća funkcija na intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$.
Neka je $\bar{x} - r < x < \bar{x}$. Postoji $\xi \in (x, \bar{x})$ takav da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \bar{x})^2 \\ &= \bar{x} + (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \bar{x})^2 \\ &> \bar{x} + (x - \bar{x}) = x. \end{aligned}$$

Slično se pokazuje da, za $\bar{x} < x < \bar{x} + r$, vrijedi $f(x) < x$. Prema tome, vrijedi nejednakost

$$(f(x) - x)(x - \bar{x}) < 0 \quad \text{za sve} \quad x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \setminus \{\bar{x}\}. \tag{2.6}$$

Također, $\bar{x}$ je jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$.
Sada smo u mogućnosti pokazati da je $\bar{x}$ sink.

1. Neka je $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$. Tada je $x_1 = f(x_0) < f(\bar{x}) = \bar{x}$, jer je f rastuća funkcija. Zbog (2.6) i $x_0 < \bar{x}$, imamo $x_1 = f(x_0) > x_0$, odnosno

$$\bar{x} - r < x_0 < x_1 < \bar{x}.$$

   Indukcijom zaključujemo da vrijedi

$$\bar{x} - r < x_0 < x_1 < ... < x_n < ... < \bar{x},$$

   tako da postoji $l \in (\bar{x} - r, \bar{x}]$ takav da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo rastući i da konvergira ka l. Zbog toga, l mora biti tačka ekvilibrijuma funkcije f. No, kako je $\bar{x}$ jedini ekvilibrijum u $(\bar{x} - r, \bar{x}]$, to znači da niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo rastući konvergira ka $\bar{x}$.

2. Neka je $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$. Analogno kao u slučaju 1. dokazuje se sada da niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo opadajući konvergira ka $\bar{x}$.

ii) Pretpostavimo da je $f'''(\bar{x}) > 0$. uzimajući u obzir pretpostavke teorema, tada postoji $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) $f''(x) < 0$ za $\bar{x} - r < x < \bar{x}$,

(b) $f''(x) > 0$ za $\bar{x} < x < \bar{x} + r$.

Neka je sada $\bar{x} - r < x < \bar{x}$. Tada postoji $\xi \in (x, \bar{x})$ takav da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \bar{x})^2 \\ &= \bar{x} + (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \bar{x})^2 \\ &< \bar{x} + (x - \bar{x}) = x. \end{aligned}$$

Analogno se pokazuje da, za $\bar{x} < x < \bar{x} + r$, vrijedi $f(x) > x$. Također, $\bar{x}$ je jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$. Sada smo u mogućnosti dokazati da je $\bar{x}$ repeler.

1. Neka je $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$. Tada je $x_1 = f(x_0) < x_0 < \bar{x}$. Budući da je $\bar{x}$ jedini ekvilibrijum u $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, slijedi da postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je
$$x_N < \bar{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \bar{x}.$$
2. U slučaju da je $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$, slično se pokazuje da postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je
$$\bar{x} < x_0 < ... < x_{N-1} < \bar{x} + r < x_N.$$

□

Primjer 2.2.2. *[12]Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n \quad (n = 0, 1, ...), \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Rješenje. Data jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$. Kako je $f(x) = x^3 + x$, imamo $f'(0) = 1$, što znači da je $\bar{x}$ je nehiperbolički ekvilbrijum. Kako je $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6 > 0$, prema Teoremu 2.2.2, tačka ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$ je nestabilna. Preciznije, $\bar{x}$ je repeler.

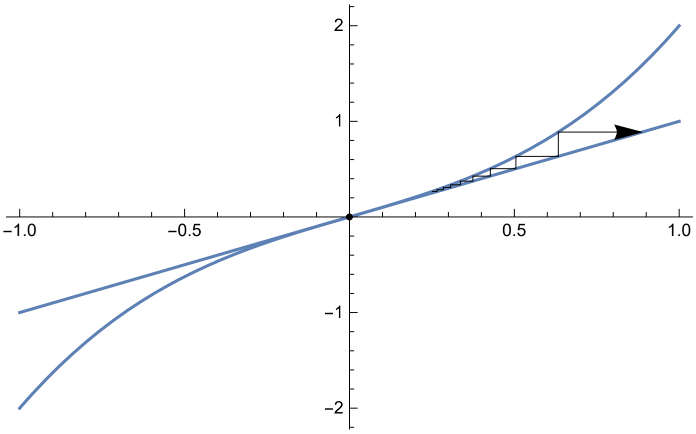
U ovom slučaju karakter stabilnosti tačke ekvilibrijuma mogli smo ustanoviti i elementarnim putem. Naime, ako je $x_0 > 0$, tada je $x_1 = x_0^3 + x_0 > x_0$. Koristeći indukciju, može se pokazati da je $x_n > x_{n-1}$ za $n = 0, 1, ...$ Dakle, niz (x_n) konvergira ka tački ekvilibrijuma ili divergira ka $+\infty$. No, kako je $\bar{x} = 0$ jedina tačka ekvilibrijuma, zaključujemo da $\{x_n\}$ divergira ka $+\infty$. Ako sada pretpostavimo da je $x_0 < 0$, tada je $x_1 = x_0^3 + x_0 < x_0$, odnosno, indukcijom se dobije $x_n < x_{n-1}$ za $n = 1, 2, ...$ Ovo implicira da $\{x_n\}$ divergira ka $-\infty$. Prema tome, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je repeler.

Ovo se vidi i na Slici 1.1, korištenjem stepenastog grafika (ili paukove mreže) na funkciju $f(x) = x^3 + x$. ■

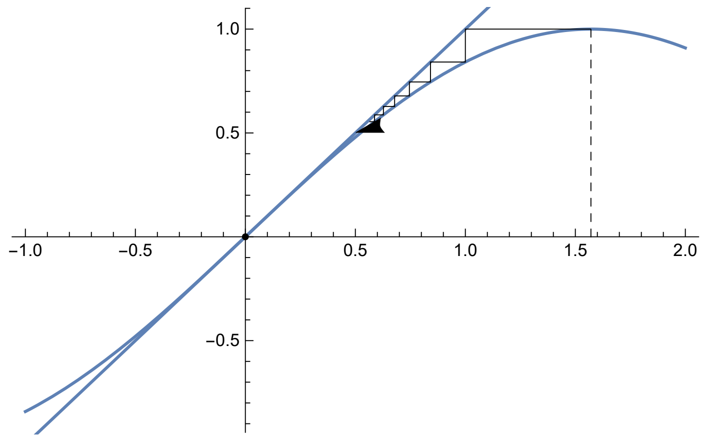
Primjer 2.2.3. *Ispitati prirodu stabilnosti ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$ diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = \sin x_n \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Rješenje. Vidimo da je $f(x) = \sin x$. Kako je $f'(0) = 1$ ($\bar{x}$ je nehiperbolički ekvilibrijum), $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = -1 < 0$, pa je ekvilibrijum $\bar{x} = 0$, prema Teoremu 2.2.2, lokalno asimptotski stabilan (sink), v. Sliku 1.2.



Slika 2.1: Fenomen paukove mreže za funkciju $f(x) = x^3 + x$



Slika 2.2: Paukova mreža za funkciju $f(x) = \sin x$

$\blacksquare$

Test izvoda višeg izvoda je općenitiji rezultat od prethodna dva teorema. Navest ćemo ga u nastavku.

Teorem 2.2.3. ***(Test izvoda višeg reda)****[12] Neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1). Pretpostavimo da je $f \in C^k[I, I] (k \geq 2)$ i da je*

$$f'(\bar{x}) = 1, \qquad f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, ..., k-1), \qquad f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

i) Ako je k paran broj, tada je $\bar{x}$:

a) polustabilan odozdo ako je $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$,

b) polustabilan odozgo ako je $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$.

ii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

iii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$*, tada je* $\bar{x}$ *lokalno asimptotski stabilan.*

Dokaz. i) Pretpostavimo da je k paran broj. Prema Taylorovom teoremu, za dovoljno malo h, postoji $\xi \in (\bar{x}, \bar{x}+h)$ tako da je

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(\bar{x})}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}h^k. \quad (2.7)$$

Ako je $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije $f^{(k)}$, za dovoljno malo h, vrijedi $f^{(k)}(\xi) > 0$. Zbog toga iz (2.7) slijedi

$$f(\bar{x}+h) = \bar{x} + h + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}h^k > \bar{x} + h.$$

Analogno

$$f(\bar{x}-h) = \bar{x} - h + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}h^k > \bar{x} - h.$$

Odavde slijedi $f(\bar{x}+h) > \bar{x}+h$ i $\bar{x}-h < f(\bar{x}-h)$, čime je dokazana polustabilnost odozdo. Analogno se dokazuje polustabilnost odozgo.

Dokazi za slučajeve *ii)* i *iii)* izvode se kao i u slučaju *i)*. □

Primjer 2.2.4. *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma* $\bar{x} = 0$ *diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n - x_n^7 + 3x_n^8, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Rješenje. Nije teško uočiti da je $f(x) = x - x^7 + 3x^8$, pa je $f'(0) = 1$ (to jest, $\bar{x}$ je nehiperbolička tačka ekvilibrijuma), $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$ i $f^{(7)}(0) = -5040 < 0$. Prema Teoremu 2.2.3, $\bar{x} = 0$ je asimptotski stabilan ekvilibrijum. ■

Primjer 2.2.5. *[12]Ispitati prirodu stabilnosti ekvilibrijuma* $\bar{x} = 0$ *diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n e^{-x_n^k} \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

gdje su $x_n \in \mathbb{R}$*, a k prirodni broj.*

Rješenje. Neka je $f(x) = xe^{-x^k}$. Koristeći razvoj funkcije e^{-x^k} u stepeni red, slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= x\Big[1 + \Big(-x^k\Big) + \frac{1}{2!}\Big(-x^k\Big)^2 + \frac{1}{3!}\Big(-x^k\Big)^3 + ...\Big] \\ &= x - x^{k+1} + \frac{1}{2!}x^{2k+1} - \frac{1}{3!}x^{3k+1} + ... \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$f'(0) = 1, \qquad f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = 2, 3, ..., k), \qquad f^{(k+1)}(\bar{x}) = -(k+1)! < 0.$$

Dakle, $\bar{x} = 0$ je nehiperbolički ekvilibrijum i prema Teoremu 2.2.3 vrijedi:

a) ako je k paran, onda je ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ asimptotski stabilan,

b) ako je k neparan, onda je ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ nestabilan (polustabilan odozgo).

■

2. Slučaj: $f'(\bar{x}) = -1$

Neka je $g : I \to I$ definirana sa $g(x) = f(f(x))$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, ... \tag{2.8}$$

Lema 2.2.1. *[12] Pretpostavimo da je $g \in C(I)$.*

i) Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1), tada je $\bar{x}$ i tačka ekvilibrijuma i jednadžbe (2.8).

ii) Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1) lokalno asimptotski stabilna u odnosu na jednadžbu (2.8), onda je ona stabilna i u odnosu na jednadžbu (2.1).

iii) Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1) repeler u odnosu na jednadžbu (2.8), onda je ona repeler i u odnosu na jednadžbu (2.1).

Dokaz. Neka je x_n rješenje jedndžbe (2.1), a y_n rješenje jednadžbe (2.8). Ubuduće ćemo pretpostaviti da je $x_0 = y_0$. Zato je $y_n = x_{2n}$.

i) Jednostavno se vidi da je

$$g(\bar{x}) = f(f(\bar{x})) = f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

ii) Pretpostavimo da je $\bar{x}$ stabilan u odnosu na jednadžbu (2.8). Tada, za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, postoji $\delta_1(\varepsilon_1) > 0$ takav da $|y_0 - \bar{x}| = |x_0 - \bar{x}| < \delta_1$ implicira $|y_n - \bar{x}| = |x_{2n} - \bar{x}| < \varepsilon_1$, za sve $n \geq 0$. Zbog neprekidnosti funkcije f u tački $\bar{x}$, imamo da, za proizvoljno $\varepsilon_2 > 0$, postoji $\delta_2(\varepsilon_2) > 0$ takav da $|x - \bar{x}| < \delta_2$ implicira $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon_2$. Izaberemo li sada ε_1 tako da je $\varepsilon_1 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$, tada postoji $\delta_1(\delta_2(\varepsilon_2)) > 0$ tako da $|x_0 - \bar{x}| < \delta_1$ implicira $|f(x_{2n}) - f(\bar{x})| = |x_{2n+1} - \bar{x}| < \varepsilon_2$, za sve $n \geq 0$. Otuda, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, ako uzmemo da je $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_1(\delta_2(\varepsilon))\}$, imamo da $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ implicira

$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, za sve $n \geq 0$. To znači da je $\bar{x}$ stabilan u odnosu na jednadžbu (2.1).

Pretpostavimo da postoji $\eta > 0$ tako da $|y_0 - \bar{x}| < \eta$ implicira $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{x}$. Tada za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, postoji prirodni broj $N_1(\varepsilon_1) > 0$, takav da je $|y_n - \bar{x}| = |x_{2n} - \bar{x}| < \varepsilon_1$, za sve $n \geq N_1$. Iz neprekidnosti funkcije f u tački $\bar{x}$, imamo da, za proizvoljno $\varepsilon_2 > 0$, postoji $\delta(\varepsilon_2) > 0$ takav da $|x - \bar{x}| < \delta$ implicira $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon_2$. Izaberimo sada ε_1 da bude $\varepsilon_1 = \delta(\varepsilon_2) > 0$. Tada postoji $N_1(\delta(\varepsilon_2)) > 0$ takav da $|f(x_{2n}) - f(\bar{x})| = |x_{2n+1} - \bar{x}| < \varepsilon_2$, za sve $n \geq N_1$. Otuda, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, ako uzmemo da je $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_1(\delta(\varepsilon))\}$, imamo da je $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, za sve $n \geq N$. Dakle, $\bar{x}$ je asimptotski stabilan u odnosu na jednadžbu (2.1).

iii)Pretpostavimo da je $\bar{x}$ nestabilan, to jest repeler, u odnosu na jednadžbu (2.8). Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da, za proizvoljno $\delta > 0$, postoje x_0 ($|x_0 - \bar{x}| < \delta$) i $n \geq 0$ takvi da je $|y_n - \bar{x}| \geq \varepsilon$. Kako je $y_n = x_{2n}$, zaključujemo da je $\bar{x}$ nestabilan, to jest repeler, u odnosu na jednadžbu (2.1). □

Sada ćemo uvesti pojam *Schwarzianovog izvoda* ili *Schwarziana.*

Definicija 2.2.4. *Za dato $x \in I$, pri čemu $f'(x) \neq 0$, izraz*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

*nazivamo **Schwarzianovim izvodom** ili **Schwarzianom**.*

Uočimo da, ako je $f'(\bar{x}) = -1$, onda je

$$Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2.$$

U nastavku navodimo jedan vrlo značajan kriterij za ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma kada je $f'(\bar{x}) = -1$.

Teorem 2.2.4. *[8, 12] Neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1) i pretpostavimo da je $f'(\bar{x}) = -1$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je $Sf(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilan.

ii) Ako je $Sf(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (preciznije, $\bar{x}$ je repeler).

Dokaz. i) Prema Lemi 2.2.1, $\bar{x}$ je tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.8). Ako je $x \in I$, sigurno je da vrijedi

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x),$$

pa je

$$g'(\bar{x}) = f'(f(\bar{x}))f'(\bar{x}) = (-1)(-1) = 1.$$

Također, vrijedi

$$g''(x) = f''(f(x))[f'(x)]^2 + f'(f(x))f''(x),$$

odakle je

$$\begin{aligned} g''(\bar{x}) &= f''(f(\bar{x}))[f'(\bar{x})]^2 + f'(f(\bar{x}))f''(\bar{x}) \\ &= f''(\bar{x})(-1)^2 + f'(\bar{x})f''(\bar{x}) \\ &= f''(\bar{x}) - f''(\bar{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ostatak dokaza slijedi primjenom Teorema 2.2.3, s tim što treba da odredimo i $g'''(\bar{x})$. Naime, kako je

$$g'''(x) = f'''(f(x))[f'(x)]^3 + 3f''(f(x))f'(x)f''(x) + f'(f(x))f'''(x),$$

vrijedi

$$\begin{aligned} g'''(\bar{x}) &= f'''(f(\bar{x}))\,[f'(\bar{x})]^3 + 3f''(f(\bar{x}))f'(\bar{x})f''(\bar{x}) + f'(f(\bar{x}))f'''(\bar{x}) \\ &= f'''(\bar{x})(-1)^3 + 3f''(\bar{x})(-1)f''(\bar{x}) + f'(\bar{x})f'''(\bar{x}) \\ &= -2f'''(\bar{x}) - 3[f''(\bar{x})]^2. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.2.6. *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma jednadžbe*

$$x_{n+1} = 3x_n - x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Rješenje. Prvo odredimo tačke ekvilibrijuma date jednadžbe. Dakle, rješavamo jednadžbu $\bar{x} = 3\bar{x} - \bar{x}^2$. Rješenja posljednje jednadžbe su $\bar{x} = 0$ i $\bar{x} = 2$. Zato, polazna jednadžba ima dvije tačke ekvilibrijuma. To su $\bar{x} = 0$ i $\bar{x} = 2$. Kako je $f(x) = 3x - x^2$, to je onda $f'(x) = 3 - 2x, f''(x) = -2$ i $f'''(x) = 0$. Prema tome, $f'(0) = 3$, tj. $|f'(0)| > 1$, pa je prema Teoremu linearizirane stabilnosti ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ nestabilan (repeler).
Međutim, $f'(2) = -1$, tj., ekvilibrijum $\bar{x} = 2$ je nehiperbolički. Dalje je $f''(2) = -2, f'''(2) = 0$. Dakle, $Sf(2) = -\frac{3}{2}(-2)^2 = -6 < 0$, pa je ekvilibrijum $\bar{x} = 2$, prema Teoremu 2.2.4, lokalno asimptotski stabilan. ■

Slično kao u slučaju $f'(x) = 1$ i ovdje postoji općenitiji kriterij za ispitivanje karaktera nehiperboličkog ekvilibrijuma (tzv. Murakamijev teorem).

Teorem 2.2.5. *[12] Neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.1). Pretpostavimo da je $f \in C^{2k-1}[I, I](k \geq 1)$ i da je*

$$f'(\bar{x}) = -1, \qquad f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = 2, 3, ..., k-1), \qquad f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

i) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ asimptotski stabilan.

ii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

iii) Pretpostavimo da je k paran i da postoji cio broj $l < k$ tako da je

$$f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, ..., 2l-3), \qquad f^{(2l-1)}(\bar{x}) \neq 0.$$

a) Ako je $f^{(2l-1)}(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ asimptotski stabilan.

b) Ako je $f^{(2l-1)}(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

iv) Pretpostavimo da je k paran i da je

$$f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, ..., 2k-3).$$

a) Ako je $\frac{k}{2}\left(\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} > 0$, tada je $\bar{x}$ asimptotski stabilan.

b) Ako je $\frac{k}{2}\left(\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} < 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

Dokaz. Primjenom Taylorovog toerema, imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \tfrac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 \\ &+ ... + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!}(x-\bar{x})^{2k-1} + o\Big((x-\bar{x})^{2k-1}\Big) \\ &= \bar{x} - (x-\bar{x}) + \sum_{i=k}^{2k-1} a_i(x-\bar{x})^i + o\Big((x-\bar{x})^{2k-1}\Big), \end{aligned}$$

gdje je $a_k = \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}$. Dalje je

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f(f(x)) \\
&= \bar{x} - (f(x) - \bar{x}) + \sum_{i=k}^{2k-1} a_i (f(x) - \bar{x})^i + o\Big((f(x) - \bar{x})^{2k-1} \Big) \\
&= \bar{x} - \Big\{ - (x - \bar{x}) + \sum_{i=k}^{2k-1} a_i (x - \bar{x})^i \Big\} \\
&+ \sum_{i=k}^{2k-1} \left(a_i \left\{ - (x - \bar{x}) + \sum_{j=k}^{2k-1} a_j (x - \bar{x})^j \right\}^i \right) + o\Big((x - \bar{x})^{2k-1} \Big) \\
&= x + \sum_{i=k}^{2k-1} \Big(a_i \Big\{ -1 + (-1)^i \Big\} (x - \bar{x})^i \Big) \\
&+ k a_k^2 (-1)^{k-1} (x - \bar{x})^{2k-1} + o\Big((x - \bar{x})^{2k-1} \Big).
\end{aligned}
$$

Ako je k neparan, onda je

$$g(x) = x - 2a_k (x - \bar{x})^k + o\Big((x - \bar{x})^k \Big).$$

Dakle, imamo

$$g'(\bar{x}) = 1, \quad g^{(i)}(\bar{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, ..., k-1), \quad g^{(k)}(\bar{x}) = -2f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

Iz Teorema 2.2.3 i Leme 2.2.1 slijedi tačnost tvrdnji *i)* i *ii)*.
Pretpostavimo da je k paran broj. Tada je

$$g(x) = x - 2 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} a_{k+2i-1} (x - \bar{x})^{k+2i-1} - k a_k^2 (x - \bar{x})^{2k-1} + o\Big((x - \bar{x})^{2k-1} \Big).$$

U slučaju *iii)* imamo

$$g(x) = x - 2a_{2l-1} (x - \bar{x})^{2l-1} + o\Big((x - \bar{x})^{2l-1} \Big).$$

Dakle,

$$g'(\bar{x}) = 1, \quad g^{(i)}(\bar{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, ..., 2l-2), \quad g^{(2l-1)}(\bar{x}) = -2f^{(2l-1)}(\bar{x}).$$

Iz Teorema 2.2.3 i Leme 2.2.1 slijedi tačnost tvrdnje *iii)*.
U slučaju *iv)* imamo

$$g(x) = x - (2a_{2k-1} + k a_k^2)(x - \bar{x})^{2k-1} + o\Big((x - \bar{x})^{2k-1} \Big).$$

Prema tome, dobija se

$$g'(\bar{x}) = 1, \quad g^{(i)}(\bar{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, ..., 2k-2),$$

$$g^{(2l-1)}(\bar{x}) = -2(2k-1)!\Big(\frac{k}{2}a_k^2 + a_{2k-1}\Big).$$

Iz Teorema 2.2.3 i Leme 2.2.1 slijedi tačnost tvrdnje *iv)*. □

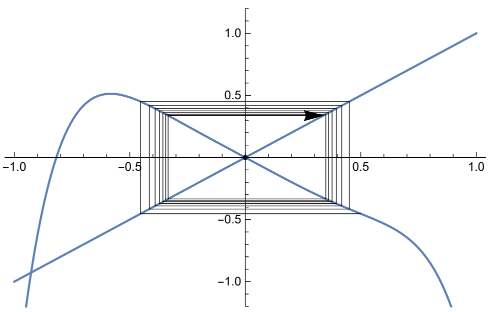
Primjer 2.2.7. *[12]Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$ diferentnih jednadžbi*

i) $x_{n+1} = -x_n + x_n^4 + x_n^5 - 3x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, ...,$

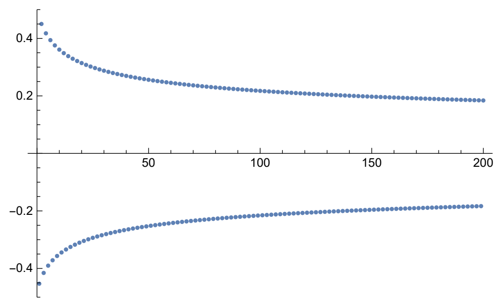
ii) $x_{n+1} = -x_n + x_n^4 - x_n^5 - 3x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Rješenje.

i) Ovdje je $f(x) = -x + x^4 + x^5 - 3x^6$ i $f'(0) = -1$ ($\bar{x} = 0$ je nehiperbolički ekvilibrijum), $f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Prema Teoremu 2.2.5 *iii)*, zbog $l = 3$ i $f^{(5)}(0) = 120 > 0$, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je asimptotski stabilan, v. Slike 1.3 i 1.4.



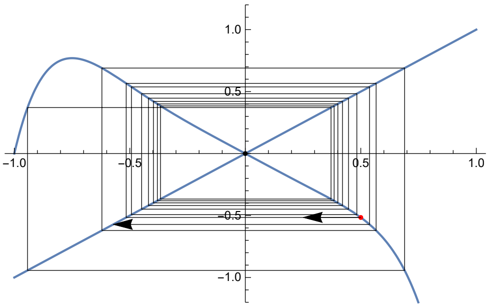
Slika 2.3: Dijagram paukove mreže za asimptotski stabilan ekvilibrijum $\bar{x} = 0$



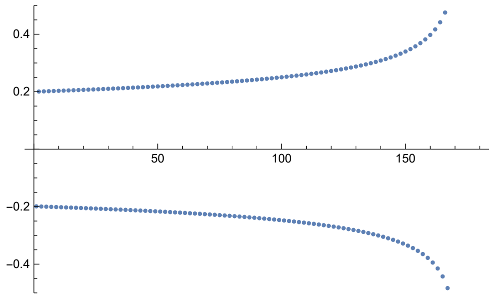
Slika 2.4: Ponašanje članova niza u okolini asimptotski stabilnog ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$

ii) Sada je $f(x) = -x + x^4 - x^5 - 3x^6$ i $f'(0) = -1$ ($\bar{x} = 0$ je nehiperbolički ekvilibrijum), $f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Prema Teoremu 2.2.5 *iii)*, zbog $l = 3$ i $f^{(5)}(0) = -120 < 0$, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je nestabilan (repeler), v. Slike 1.5 i 1.6.

■



Slika 2.5: Dijagram paukove mreže za nestabilan ekvilibrijum (repeler) $\bar{x} = 0$



Slika 2.6: Ponašanje članova niza u okolini nestabilnog ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$

2.3 Stabilnost periodičnih tačaka

S obzirom da je periodična tačka minimalnog perioda k preslikavanja f, zapravo, fiksna tačka preslikavanja f^k, to se na osnovu Teorema 2.2.1 i lančanog pravila, dobija sljedeći kriterij stabilnosti periodične tačke.

Teorem 2.3.1. *[2, 14]Neka je $f \in C^1[I, I]$, a $\mathcal{O}(p) = \{p, f(p), ..., f^{k-1}(p)\}$ orbita periodične tačke minimalnog perioda k preslikavanja f. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Tačka p je lokalno asimptotski stabilna ako je

$$|f'(p)f'(f(p)) \cdots f'(f^{k-1}(p))| < 1.$$

ii) Tačka p je nestabilna ako je

$$|f'(p)f'(f(p)) \cdots f'(f^{k-1}(p))| > 1.$$

Primjer 2.3.1. *Neka je data diferentna jednadžba*

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2.$$

Odrediti sve periodične tačke minimalnog perioda dva i njihove orbite. Ispitati stabilnost periodičnih tačaka.

Rješenje. Prvo ćemo odrediti fiksne tačke preslikavanja f. Kako je $f(x) = 1 - x^2$, fiksne tačke dobijemo rješavanjem jednadžbe $\bar{x} = 1 - \bar{x}^2$. To su tačke $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Periodične tačke minimalnog perioda dva su rješenja jednadžbe $f^2(x) = x$, uz uslov $f(x) \neq x$. Zato, prvo odredimo preslikavanje f^2:

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(1 - x^2) = 1 - (1 - x^2)^2 = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = -x^4 + 2x^2.$$

Sada rješavamo sistem $(-x^4 + 2x^2 = x \wedge 1 - x^2 \neq x)$, odnosno, $(x(x^3 - 2x + 1) = 0 \wedge 1 - x^2 \neq x)$, odnosno, $(x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \wedge 1 - x^2 \neq x)$, što daje $x = 0$ i $x = 1$. Dakle, fiksne tačke preslikavanja f^2 su $x = 0$ i $x = 1$.
Orbita tačke $x = 0$ je $\mathcal{O}(0) = \{0, 1\}$, dok je $\mathcal{O}(1) = \{1, 0\}$ orbita tačke $x = 1$.
Kako je $f'(x) = -2x$, to je

$$|f'(0)f'(1)| = |0 \cdot (-2)| = 0 < 1,$$

pa zaključujemo da je periodična tačka $x = 0$ lokalno asimptotski stabilna.
Dalje, za $x = 1$ je

$$|f'(1)f'(0)| = |-2 \cdot 0| = 0 < 1,$$

pa je i $x = 1$, također, lokalno asimptotski stabilna. ■

Poglavlje 3

Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema i diferenetnih jednadžbi drugog reda

3.1 Stabilnost

Neka je F vektorsko preslikavanje, tako da $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, odnosno, $F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$, gdje su $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Tada se

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.1}$$

naziva sistemom diferentnih jednadžbi u ravni, odnosno, dvodimenzionalnim diskretnim dinamičkim sistemom. Sistem (3.1) možemo pisati i u obliku

$$\left.\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n, v_n) \\ v_{n+1} & = & g(u_n, v_n) \end{array}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, ...), \tag{3.2}$$

uzimajući da je $X = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, a $u, v \in \mathbb{R}$.
Također ćemo razmatrati i diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.3}$$

koja se može napisati u obliku (3.1), tako da i ona spada u klasu dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema. Zaista, uvođenjem smjena

$$\begin{aligned} u_n &= x_{n-1}, \\ v_n &= x_n, \end{aligned}$$

dobijamo sistem diferentnih jednadžbi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= f(v_n, u_n). \end{aligned}$$

Neka je $\|\cdot\|$ bilo koja norma vektora u $\mathbb{R}^2$ i, također, pridružena norma matrice.

3.1.1 Tačka ekvilibrijuma diskretnog dinamičkog sistema i pojam stabilnosti

Definicija 3.1.1. .

1. ***Tačka ekvilibrijuma*** *DDS (3.1), odnosno, DDS (3.2) je tačka* $\overline{X} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ *takva da je*
$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\bar{x}, \bar{y}) \\ g(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$
To jest, $\overline{X}$ *je* ***fiksna tačka*** *funkcije* F.

2. ***Periodična tačka*** *perioda* m *DDS (3.1) je tačka* $P = (r, s) \in \mathbb{R}^2$ *takva da je ona tačka ekvilibrijuma* m*-te iteracije* F^m *preslikavanja* F.

3. *Neka je* (x_0, y_0) *data tačka iz* $\mathbb{R}^2$. *Parovi* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ *koji su definirani induktivno pomoću (3.2) nazivaju se* ***iteracijama*** *od* (x_0, y_0), *a niz* $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *se naziva* ***pozitivnom orbitom*** *od* (x_0, y_0) *i označava se sa*
$$\mathcal{O}^+((x_0, y_0)).$$
Dakle,
$$\mathcal{O}^+((x_0, y_0)) = \Big\{(x_0, y_0), F(x_0, y_0), \ldots, F^k(x_0, y_0), \ldots\Big\}.$$

4. *Ako je preslikavanje* F *invertibilno, definiramo negativnu orbitu od* (x_0, y_0) *sa*
$$\mathcal{O}^-((x_0, y_0)) = \Big\{(x_0, y_0), F^{-1}(x_0, y_0), \ldots, F^{-k}(x_0, y_0), \ldots\Big\},$$
gdje F^{-n} *označava* n*-tu kompoziciju od* F^{-1} *sa samim sobom.*

5. *Kada postoje obje, i pozitivna i negativna orbita, tada se* ***orbitom*** *od* (x_0, y_0) *naziva unija pozitivne i negativne orbite:*
$$\mathcal{O}((x_0, y_0)) = \mathcal{O}^+((x_0, y_0)) \cup \mathcal{O}^-((x_0, y_0)).$$

Kada je riječ o diferentnoj jednadžbi drugog reda (3.3), njenu tačku ekilibrijuma, odnosno, fiksnu tačku preslikavanja f, definiramo kao tačku $\bar{x} \in \mathbb{R}$ za koju vrijedi
$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}).$$
Tačku $P = (p, q) \in \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi
$$p = f(p, q) \text{ i } q = f(q, p),$$
nazivamo periodičnom tačkom minimalnog perioda dva jednadžbe (3.3).

Definicija 3.1.2. *[14]*

1. *Tačka ekvilibrijuma* $\overline{X}$ *DDS (3.1) se naziva* ***stabilnom*** *(ili* ***lokalno stabilnom****) ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da* $\|X_0 - \overline{X}\| < \delta$ *implicira* $\|X_n - \overline{X}\| < \varepsilon$ *za sve* $n \geq 0$. *Inače se ekvilibrijum* $\overline{X}$ *naziva* ***nestabilnim****.*

2. *Tačka ekvilibrijuma* $\overline{X}$ *DDS (3.1) se naziva* ***asimptotski stabilnom*** *(ili* ***lokalno asimptotski stabilnom****) ako je ona stabilna i ako postoji* $\gamma > 0$ *tako da* $\|X_0 - \overline{X}\| < \gamma$ *implicira*
$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - \overline{X}\| = 0.$$

3. *Tačka ekvilibrijuma* $\overline{X}$ *DDS (3.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom*** *ako je ona asimptotski stabilna i ako, za svako* X_0*, vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - \overline{X}\| = 0.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma* $\overline{X}$ *DDS (3.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom u odnosu na skup*** $S \subset \mathbb{R}^2$ *ako je ona asimptotski stabilna i ako, za svako* $X_0 \in S$*, vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - \overline{X}\| = 0.$$

5. *Tačka ekvilibrijuma* $\overline{X}$ *DDS (3.1) se naziva* ***globalni atraktor*** *sa skupom* $S \subset \mathbb{R}^2$ *kao oblašću privlačenja, ako je*
$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\| = \overline{X}$$
za svako rješenje s početnim uvjetom $X_0 \in S$.

Napomena 3.1.1. *Pojmovi stabilnosti i asimptotske stabilnosti periodičnih tačaka definiraju se analogno.*

3.1.2 Stabilnost linearnih sistema

Ovdje ćemo razmatrati specijalan slučaj sistema (3.1) kod koga je $F(X) = AX$, pri čemu je A matrica formata 2 x 2, odnosno, razmatraćemo sistem (v.[12])

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.4}$$

(v.[12])
Rješenje sistema (3.4) je svaki niz vektora X_n koji zadovoljava ovaj sistem za sve vrijednosti $n = 0, 1, ...$ **Opće rješenje** je rješenje koje sadrži u sebi sva druga rješenja. **Partikularno rješenje** sistema (3.4) je rješenje koje zadovoljava početni uvjet

$$X_0 = \alpha,$$

pri čemu je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2$ dati vektor. Problem pronalaženja partikularnog rješenja sistema (3.4), sa datim početnim uvjetima, naziva se **problem početnih vrijednosti** ili **PPV**.

Nije teško uvidjeti da je rješenje sistema (3.4) oblika

$$X_n = A^n X_0 = A^n \alpha. \tag{3.5}$$

Iz jednakosti (3.5) zaključujemo da se rješavanje sistema (3.4) svodi na određivanje n-tog stepena matrice A.

Karakteristični polinom matrice A je

$$\kappa(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + p\lambda + q,$$

gdje je $p = TrA$ i $q = \det A$, a karakteristična jednadžba matrice A je

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su date sa

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\Big(- p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\Big).$$

Ako je $|\lambda_-| < 1$ i $|\lambda_+| < 1$, ekvilibrijum $\overline{X} = (0, 0)$ je lokalno asimptotski stabilan. Odavdje slijedi jednostavan kriterij za lokalnu asimptotsku stabilnost ekvilibrijuma $\overline{X} = (0, 0)$.

Teorem 3.1.1. *[14] Tačka ekvilibrijuma* $\overline{X} = (0, 0)$ *sistema (3.4) je lokalno asimptotski stabilna ako vrijede sljedeća tri uvjeta:*

(i)

$$1 + p + q > 0, \tag{3.6}$$

(ii)
$$1 - p + q > 0, \tag{3.7}$$

(iii)
$$q < 1, \tag{3.8}$$

ili, što je ekvivalentno sa
$$|p| < 1 + q < 2. \tag{3.9}$$

3.1.3 Stabilnost preko linearizacije

Definicija 3.1.3. *[8]*

1. *Ako je $\overline{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ fiksna tačka glatkog preslikavanja $F = (f, g)$ i ako je $J_f(\bar{x}, \bar{y})$ Jakobijeva matrica preslikavanja F u tački $(\bar{x}, \bar{y})$, tj.*
$$J_F(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix},$$
onda se linearno preslikavanje $J_F(\bar{x}, \bar{y}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dato sa
$$J_F(\bar{x}, \bar{y})(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})y \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})x + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})y \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$
*naziva **linearizacijom** preslikavanja F u fiksnoj tački $(\bar{x}, \bar{y})$.*

2. *Za tačku ekvilibrijuma $\overline{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ preslikavanja $(x, y) \to F(x, y)$ kažemo da je **hiperbolička** ako je preslikavanje (3.10) hiperboličko, to jest, ako Jakobijan $J_F(x, y)$ u tački $(\bar{x}, \bar{y})$ nema svojstvenih vrijednosti po modulu jednakih jedan. Inače se tačka ekvilibrijuma $\overline{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ naziva **nehiperboličkom**.*

Najvažaniji rezultat u analizi linearizirane stabilnosti je sljedeći teorem.

Teorem 3.1.2. ***(Linearizirana stabilnost)*** *[8, 14] Neka je $F = (f, g)$ jedna C^1 funkcija definirana na otvorenom skupu W u $\mathbb{R}^2$ i neka je $\overline{X} = (\bar{x}, \bar{y}) \in W$ tačka ekvlibrijuma preslikavanja F. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) Ako sve svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ leže u otvorenom disku $|\lambda| < 1$, onda je ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ asimptotski stabilan.

(b) *Ako je bar jedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ po modulu veća od jedan, tada je ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ nestabilan.*

Napomena 3.1.2. *(a) Ako je hiperbolički ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y})$ asimptotski stabilan, tada postoji otvorena okolina O tačke $(\bar{x}, \bar{y})$ u kojoj sve tačke konvergiraju ka tački ekvilibrijuma pod pozitivnim iteracijama, tj.*

$$F^n(a, b) \to (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{za svako} \quad (a, b) \in O.$$

Takav ekvilibrijum se naziva ***sink*** *ili* ***atraktivni ekvilibrijum****.*

(b) *Kada je ekvilibrijum nestabilan, tada postoje dvije kvalitativno različite situacije.*

1. *Ako su obje svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ po modulu veće od jedan, tada postoji otvorena okolina O tačke $(\bar{x}, \bar{y})$ u kojoj sve tačke konvergiraju ka tački ekvilibrijuma pod negativnim iteracijama. Takav ekvilibrijum se naziva* ***izvor*** *ili* ***repeler****.*
2. *Ako je jedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ po modulu manja, a druga veća od jedan, tada u svakoj otvorenoj okolini tačke ekvilibrijuma neke tačke konvergiraju ka ekvilibrijumu pod pozitivnim iteracijama, dok druge konvergiraju ka ekvilibrijumu pod negativnim iteracijama. Takav ekvilibrijum se naziva* ***sedlasta tačka****.*

Sada ćemo navesti *Routh-Hurwitzov* i *Schur-Cohnov* kriterij, jer će nam oni biti potrebni prilikom određivanja uvjeta koje treba da zadovolje svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\bar{x}, \bar{y})$ kako bi tačka ekvilibrijuma bila lokalno asimptotski stabilna, repeler ili sedlasta tačka.

Teorem 3.1.3. ***(Routh-Hurwitzov kriterij)****[8, 13]Promatrajmo polinomsku jednadžbu*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3.11}$$

s realnim koeficijentima i $a_0 > 0$. Potreban i dovoljan uvjet da svi korijeni jednadžbe (3.11) imaju negativan realni dio je da bude

$$\Delta_k > 0 \quad za \quad k = 1, ..., n, \tag{3.12}$$

gdje je Δ_k principijelni minor reda k matrice reda n x n:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{bmatrix}.$$

Potrebni i dovoljni uvjeti da svi korijeni jednadžbe (3.11) leže u otvorenom jediničnom disku $|\lambda| < 1$, pronađeni su pomoću Routh-Hurwitzovog kriterija i činjenice da Mobiusova transformacija

$$z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

transformiše otvoreni jedinični disk iz λ-ravni u otvorenu lijevu poluravan u z-ravni.

Teorem 3.1.4. ***(Schur-Cohnov kriterij)****[8, 13, 14]Jednadžba (3.11) ima sve korijene u otvorenom jediničnom disku $|\lambda| < 1$ ako i samo ako jednadžba*

$$P\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big) = 0$$

ima sve svoje korijene u lijevoj poluravni $Re(z) < 0$.

Primjenom Schur-Cohnovog kriterija dobija se sljedeći rezultat za asimptotsku stabilnost ekvilibrijuma nula diferentne jednadžbe

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.13}$$

Teorem 3.1.5. *[14] Neka su $p, q \in \mathbb{R}$. Potreban i dovoljan uvjet za asimptotsku stabilnost jednadžbe (3.13) je da vrijedi*

$$|p| < 1 + q < 2.$$

Na osnovu Schur-Cohnovog kriterija, moguće je dati eksplicitne uvjete da tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.3) bude lokalni sink, izvor (repeler), sedlasta tačka ili nehiperbolički ekvilibrijum. Naime, neka

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}), \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{x})$$

označavaju parcijalne izvode funkcije $f(u, v)$ izračunate u tački ekvilibrijuma jednadžbe (3.3). Tada se jednadžba

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.14}$$

naziva *lineariziranom* jednadžbom koja je pridružena jednadžbi (3.3) u tački $\bar{x}$.

Teorem 3.1.6. ***(Linearizirana stabilnost)****[14] Promatrajmo diferentnu jednadžbu (3.3) i njoj pridruženu lineariziranu jednadžbu (3.14).*

1. *Ako su oba korijena kvadratne jednadžbe*

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0, \tag{3.15}$$

u otvorenom jediničnom disku, onda je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (3.3) ***lokalno asimptotski stabilan****.*

2. *Ako je bar jedan od korijena jednadžbe (3.15) po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan, onda je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (3.3)* ***nestabilan****.*

3. *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednadžbe (3.15) leže u otvorenom jediničnom disku je*
$$|p| < 1 - q < 2. \tag{3.16}$$
U tom slučaju lokalno asimptotski stabilan ekvilibrijum naziva se ***sink****.*

4. *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednadžbe (3.15) budu po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan je*
$$|p| < |1 - q| \quad i \quad |q| > 1. \tag{3.17}$$
U tom slučaju nestabilan ekvilibrijum $\bar{x}$ se naziva ***repeler*** *ili* ***izvor****.*

5. *Potreban i dovoljan uvjet da jednadžba (3.15) ima jedan korijen po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan, a drugi po apsolutnoj vrijednosti manji od jedan je*
$$|p| > |1 - q| \quad i \quad p^2 + 4q > 0.$$
U tom slučaju nestabilan ekvilibrijum $\bar{x}$ naziva se ***sedlo****.*

6. *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednadžbe (3.15) leže na jediničnom disku je*
$$|p| = |1 - q| \quad ili \quad q = -1 \quad i \quad |p| \leq 2.$$
U tom slučaju ekvilibrijum $\bar{x}$ naziva se ***nehiperboličkim ekvilibrijumom.***

Teorem 3.1.7. *[8, 14]*

1. *Tačka ekvilibrijuma $(\bar{x}, \bar{y})$ DDS (3.1) je lokalno asimptotski stabilna ako i samo ako svako rješenje karakteristične jednadžbe*
$$\lambda^2 - TrJ_F(\bar{x}, \bar{y}) + detJ_F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \tag{3.18}$$
leži unutar jediničnog kruga, a što vrijedi ako i samo ako
$$|TrJ_F(\bar{x}, \bar{y})| < 1 + DetJ_F(\bar{x}, \bar{y}) < 2.$$

2. *Slično, tačka ekvilibrijuma $(\bar{x}, \bar{y})$ DDS (3.1) je lokalni repeler ako svako rješenje karakteristične jednadžbe (3.18) leži izvan jediničnog kruga, što je zadovoljeno ako je*
$$|TrJ_F(\bar{x}, \bar{y})| < |1 + DetJ_F(\bar{x}, \bar{y})| \quad i \quad |DetJ_F(\bar{x}, \bar{y})| > 1.$$

3. *Tačka ekvilibrijuma* $(\bar{x}, \bar{y})$ *DDS (3.1) je lokalna sedlasta tačka ako i samo ako karakteristična jednadžba (3.18) ima jedan korijen koji leži unutar jediničnog kruga i jedan korijen koji leži izvan jediničnog kruga, tj., ako i samo ako*

$$|TrJ_F(\bar{x}, \bar{y}) > |1 + DetJ_F(\bar{x}, \bar{y})| \quad i \quad TrJ_F(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4DetJ_F(\bar{x}, \bar{y}) > 0.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma* $(\bar{x}, \bar{y})$ *DDS (3.1) je nehiperbolička ako i samo ako karakteristična jednadžba (3.18) ima bar jedan korijen koji leži na jediničnoj kružnici, tj., ako i samo ako*

$$|TrJ_F(\bar{x}, \bar{y})| = |1 + DetJ_F(\bar{x}, \bar{y})|$$

ili

$$DetJ_F(\bar{x}, \bar{y}) = 1 \quad i \quad TrJ_F(\bar{x}, \bar{y}) \leq 2.$$

Kada je riječ o nehiperboličkom ekvilibrijumu, situacija je znatno složenija u određivanju karaktera njegove stabilnosti i, uglavnom, je potrebno izvršiti dodatna razmatranja. Zapravo, karakter stabilnosti tačke ekvilibrijuma u ovom slučaju određuje se pomoću članova višeg reda u Taylorovom razvoju za preslikavanje F.

Definicija 3.1.4. *Neka je T preslikavanje na $\mathbb{R}^2$ i neka je $\bar{x}$ ekvilibrijum ili periodična tačka preslikavanja T.* ***Bazen privlačenja*** *ekvilibrijuma $\bar{x}$, kojeg označavamo sa $\mathcal{B}(\bar{x})$, predstavlja skup tačaka $x \in \mathbb{R}^2$ za koje $\|T^k(x) - T^k(\bar{x})\| \to 0$, kad $k \to \infty$, tj.,*

$$\mathcal{B}(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|T^k(x) - T^k(\bar{x})\| \to 0, k \to \infty\}.$$

Definicija 3.1.5. *Neka je T neprekidno preslikavanje na $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$. Skup $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ je* ***invarijantan*** *u odnosu na preslikavanje T ako vrijedi $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.*

ω-granični skup *tačke $z \in \mathcal{A}$ je skup*

$$\omega(z) = \{w \in \mathcal{R} : \exists n_k \to \infty \wedge T^{n_k}(z) \to w\}.$$

Definicija 3.1.6. *Neka je $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ difeomorfizam, to jest, neka je T neprekidno-diferencijabilan homeomorfizam sa neprekidno-diferencijabilnim inverznim preslikavanjem. Pretpostavimo da je $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ hiperbolička fiksna tačka preslikavanja T, tj. pretpostavimo da vrijedi $T(\bar{x}) = \bar{x}$ i da Jakobijan $J_T(\bar{x})$ nema svojstvenih vrijednosti po modulu jednakih jedan. Neka je U neka okolina tačke $\bar{x}$.*

1. ***Lokalno stabilnom mnogostrukošću*** *$W^s_{loc}(\bar{x}, U)$ tačke $\bar{x}$ naziva se skup*

$$W^s_{loc}(\bar{x}, U) = \{x \in U : T^n(x) \in U \ \ za \ \ sve \ \ n \geq 0 \ \ i \ \ \lim_{n\to\infty} T^n(x) = \bar{x}\}.$$

2. ***Lokalno nestabilnom mnogostrukošću*** *$W^u_{loc}(\bar{x}, U)$ tačke $\bar{x}$ naziva se skup*

$$W^u_{loc}(\bar{x}, U) = \{x \in U : T^{-n}(x) \in U \ \ za \ \ sve \ \ n \geq 0 \ \ i \ \ \lim_{n\to\infty} T^{-n}(x) = \bar{x}\}.$$

Lokalno stabilna i lokalno nestabilna mnogostrukost imaju svoje globalne analogone (globalno stabilnu mnogostrukost $W^s(\bar{x})$ i globalno nestabilnu mnogostrukost $W^u(\bar{x})$), koji se definišu na sljedeći način:

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(W^s_{loc}(\bar{x}, U)),$$

$$W^u(\bar{x}) = \bigcup_{n\geq 0} T^{n}(W^u_{loc}(\bar{x}, U)).$$

Primjer 3.1.1. *Odrediti uvjete na α, tako da ekvilibrijum $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ bude LAS pod preslikavanjem*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{\alpha x}{1+\beta y^2} \end{bmatrix} \qquad \beta > 0.$$

Rješenje. Kako je $f(x, y) = y$ i $g(x, y) = \frac{\alpha x}{1+\beta y^2}$, to je Jakobijeva matrica preslikavanja $F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ u proizvoljnoj tački (x, y) oblika

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{1+\beta y^2} & \frac{-2\alpha\beta xy}{(1+\beta y^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Zbog toga je

$$J_F(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba je $\lambda^2 - \alpha = 0$, pa su svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Da bi tačka $(0, 0)$ bila LAS, obje svojstvene vrijednosti moraju biti po apsolutnoj vrijednosti manje od jedan. Dakle, $|\sqrt{\alpha}| < 1$, odakle slijedi $\alpha \in (-1, 1)$. ■

3.2 Metod Lyapunovljeve funkcije

Ruski matematičar A. M. Lyapunov je ovaj metod prvobitno primjenjivao kod ispitivanja stabilnosti rješenja kod nelinearnih diferencijalnih jednadžbi, kao direktni metod. Danas, ovaj metod se vrlo uspješno primjenjuje i u slučaju diferentnnih jednadžbi, odnosno, sistema diferentnih jednadžbi. Ovaj metod se može koristiti i u općem slučaju, kod višedimenzionalnih sistema. Međutim, mi ćemo ovdje pokazati primjenu na dvodimenzionalnim sistemima.

Posmatrajmo diskretni dinamički sistem (3.1), odnosno, (3.2). Navest ćemo elemente teorije stabilnosti DDS pomoću Lyapunovljeve funkcije (v. [2, 8])

Definicija 3.2.1. *Funkciju $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***Lyapunovljevom funkcijom*** *na podskupu $\mathcal{D}$ od $\mathbb{R}^2$ ako je*

1. *V je neprekidna na $\mathcal{D}$*
2. *$\Delta V(X) = V(F(X)) - V(X) \leq 0$ kad je $X, F(X) \in \mathcal{D}$.*

Neka je $\mathcal{B}(C, \rho)$ otvorena sfera u $\mathbb{R}^2$ s centrom u C i radijusa ρ, tj.,

$$\mathcal{B}(C, \rho) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X - C\| < \rho\}.$$

Definicija 3.2.2. *Kažemo da je funkcija V* ***pozitivno definitna*** *u $\overline{X}$ ako je*

1. *$V(\overline{X}) = 0$*
2. *$V(X) > 0$ za sve $X \in \mathcal{B}(\overline{X}, \rho), X \neq \overline{X}$.*

Slijedi nekoliko teorema o stabilnosti korištenjem Lyapunovljeve funkcije.

Teorem 3.2.1. ***(Lyapunovljev teorem stabilnosti)*** *Pretpostavimo da je V Lyapunovljeva funkcija za DDS (3.1) u okolini $\mathcal{O}$ tačke ekvilibrijuma $\overline{X}$ i da je V pozitivno definitna u odnosu na $\overline{X}$. Tada je $\overline{X}$ stabilan. Osim toga, vrijedi*

i) Ako je $\Delta V(X) < 0$ za sve $X, F(X) \in \mathcal{O}$ i $X \neq \overline{X}$, tada je $\overline{X}$ asimptotski stabilan.

ii) Ako je $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$ i

$$V(X) \to \infty \quad \text{kad} \quad \|X\| \to \infty, \tag{3.19}$$

tada je $\overline{X}$ globalno asimptotski stabilan.

Sljedeći teorem govori o ograničenosti rješenja DDS (3.1), odnosno (3.2).

Teorem 3.2.2. *Ako je V Lyapunovljeva funkcija na skupu $\{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| > \alpha\}$ za neko $\alpha > 0$ i ako vrijedi uvjet (3.19), tada su sva rješenja sistema (3.1), odnosno (3.2), ograničena.*

Definicija 3.2.3. *Neka je V Lyapunovljeva funkcija na podskupu $\mathcal{D}$ od $\mathbb{R}^2$. Definirajmo skup*

$$\mathfrak{L} = \{X \in \overline{\mathcal{D}} : \Delta V(X) = 0\}$$

i neka je $\mathcal{M}$ maksimalan invarijantan podskup od $\mathfrak{L}$, to jest, definirajmo $\mathcal{M}$ kao uniju svih invarijantnih podskupova od $\mathfrak{L}$.

Sada ćemo navesti *LaSalleov princip invarijantnosti*, kojeg je neophodno poznavati prilikom ispitivanja stabilnosti rješenja DDS (3.1), odnosno (3.2).

Teorem 3.2.3. ***(LaSalleov princip invarijantnosti)*** *Pretpostavimo da je V pozitivno definitna Lyapunovljeva funkcija za DDS (3.1), odnosno (3.2) u $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Tada za svako ograničeno rješenje X_n sistema (3.1), odnosno (3.2), koje ostaje u $\mathcal{D}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, postoji broj a takav da $X_n \to \mathcal{M} \cap V^{-1}(a)$ kad $n \to \infty$.*

Napomena 3.2.1. *Uočimo sljedeće: ako je $\mathcal{M} = \{\overline{X}\}$ jednočlan skup, onda nam Teorem 3.2.3 kaže da je $\overline{X}$ definitivno asimptotski stabilna fiksna tačka.*

Primjer 3.2.1. *([14], neriješeni zadatak) Ispitati stabilnost tačke ekvilibrijuma $(0,0)$ sistema diferentnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n - y_n(x_n^2 + y_n^2) \\ y_{n+1} &= x_n - x_n(x_n^2 + y_n^2). \end{aligned}$$

Rješenje. Kako je $f(x,y) = y - y(x^2+y^2)$ i $g(x,y) = x - x(x^2+y^2)$, to je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - x^2 - 3y^2$$

i

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1 - y^2 - 3x^2, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2xy.$$

Zato je

$$J_F(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

čije su svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Dakle, ekvilibrijum $(0,0)$ je nehiperbolički. Posmatrajmo Lyapunovljevu pozitivno definitnu funkciju $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisanu sa $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$ od preslikavanja

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y - y(x^2+y^2) \\ x - x(x^2+y^2) \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \Delta V &= V\left(F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) - V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \big(y - y(x^2+y^2)\big)^2 + \big(x - x(x^2+y^2)\big)^2 - x^2 - y^2 \\ &= (x^2+y^2)^3 - 2(x^2+y^2)^2 \\ &= (x^2+y^2)^2(x^2+y^2-2). \end{aligned}$$

Vidimo da je $\Delta V < 0$ ako i samo ako je $x^2 + y^2 < 2$, odakle zaključujemo, na osnovu Teorema 3.2.1, da je $(0,0)$ asimptotski stabilan ekvilibrijum. ■

Teorem 3.2.4. *[2] Neka je $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pri čemu je $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, neprekidna funkcija i neka je u odnosu na sistem (3.1) ΔV je pozitivno definitno (negativno definitno) u nekoj okolini fiksne tačke $\overline{X}$. Ako postoji niz X_n, takav da $X_n \to \overline{X}$, kad $n \to \infty$, i $V(X_n) > 0$ $(V(X_n) < 0)$, tada je $\overline{X}$ nestabilan.*

Primjer 3.2.2. *Posmatrajmo sistem diferentnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + x_n^2 + y_n^2 \\ y_{n+1} &= y_n. \end{aligned}$$

Ispitati stabilnost ekvilibrijuma $(0,0)$.

Rješenje. Iz $f(x,y) = x + x^2 + y^2, g(x,y) = y$, slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

i

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1$$

pa je

$$J_F(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba je $(\lambda - 1)^2 = 0$, pa je $\lambda_{1,2} = 1$ (tzv. rezonantni slučaj) odgovarajuća svojstvena vrijednost. Da bismo odredili stabilnost ekvilibrijuma $(0,0)$, koristićemo Lyapunovljevu funkciju $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x + y$. Tada je

$$\Delta V = x + x^2 + y^2 + y - x - y = x^2 + y^2,$$

pa je $\Delta V > 0$ ako je $(x,y) \neq (0,0)$. Prema Teoremu 3.2.4, ekvilibrijum $(0,0)$ je nestabilan. ■

Primjer 3.2.3. *([14], neriješeni zadatak) Ispitati stabilnost fiksne tačke* $(0,0)$ *preslikavanja*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dfrac{\alpha x}{1 + \beta y^2} \end{bmatrix} \quad \beta > 0.$$

Rješenje. Nije teško zaključiti da matrica Jakobijana $J_F(x,y)$ preslikavanja F ima oblik

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\alpha}{1+\beta y^2} & \dfrac{-2\alpha\beta xy}{(1+\beta y^2)^2} \end{pmatrix},$$

odakle je, za tačku ekvilibrijuma $(0,0)$,

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba gornje matrice je $\lambda^2 - \alpha = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$.
Dakle, ako je $\alpha = \pm 1$, tada je $|\lambda_{1,2}| = 1$, pa je ekvilibrijum $(0,0)$ nehiperbolički. Razmotrićemo dva slučaja.

1. Ako je $\alpha \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, ekvilibrijum $(0,0)$ je repeler, na osnovu Teorema 3.1.2.

2. Ako je $\alpha \in [-1,1]$, posmatraćemo Lyapunovljevu funkciju $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \Delta V &= V\left(F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) - V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = y^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{(1+\beta y^2)^2} - x^2 - y^2 \\ &= \frac{x^2[\alpha^2 - (1+\beta y^2)^2]}{(1+\beta y^2)^2} = \frac{x^2(\alpha^2 - 1 - 2\beta y^2 - \beta^2 y^4)}{(1+\beta y^2)^2} < 0, \end{aligned}$$

   za $(x,y) \neq (0,0)$, jer je $\alpha^2 - 1 \leq 0$. Zbog $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 \to \infty$, kad $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\| \to \infty$, zaključujemo, opet na osnovu Teorema 3.2.1, da je ekvilibrijum $(0,0)$ globalno asimptotski stabilan u ovom slučaju.

$\blacksquare$

Primjer 3.2.4. *[2] Posmatrajmo dvodimenzionalni sistem*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{ay_n}{1+x_n^2} \\ y_{n+1} &= \frac{bx_n}{1+y_n^2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Diskutovati stabilnost nula ekvilibrijuma sistema (3.20).

Rješenje. Sistemu (3.20) odgovara preslikavanje

$$F\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \dfrac{ay}{1+x^2} \\ \dfrac{bx}{1+y^2} \end{array}\right).$$

Matrica Jakobijana $J_F(x, y)$ preslikavanja F je

$$J_F(x,y) = \left(\begin{array}{cc} \frac{-2axy}{(1+x^2)^2} & \frac{a}{1+x^2} \\ \frac{b}{1+y^2} & \frac{-2bxy}{(1+y^2)^2} \end{array}\right),$$

pa je za tačku ekvilibrijuma $(0, 0)$

$$J_F(0,0) = \left(\begin{array}{cc} 0 & a \\ b & 0 \end{array}\right).$$

Karakteristična jednadžba pridružena matrici $J_F(0, 0)$ glasi

$$\lambda^2 - ab = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$.

Dakle, za $ab = \pm 1$, ekvilibrijum je nehiperbolički.

Neka je $V\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = x^2 + y^2$. Tada je

$$\begin{aligned} \Delta V &= V\left(F\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right) - V\left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right) = \frac{a^2y^2}{(1+x^2)^2} + \frac{b^2x^2}{(1+y^2)^2} - x^2 - y^2 \\ &= \left(\frac{b^2}{(1+y^2)^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{(1+x^2)^2} - 1\right)y^2 \le (b^2-1)x^2 + (a^2-1)y^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sada ćemo razmotriti tri slučaja.

1. Ako je $a^2 < 1$ i $b^2 < 1$, tada je $\Delta V < 0$, pa prema Teoremu 3.2.1, zaključujemo da je nula ekvilibrijum asimptotski stabilan. Osim toga, zbog $V\left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right) = x^2 + y^2 \to \infty$, kad $\left\|\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]\right\| \to \infty$, slijedi da je ekvilibrijum $(0, 0)$ globalno asimptotski stabilan.

2. Ako je $a^2 \le 1$ i $b^2 \le 1$, onda je $\Delta V \le 0$, pa je nula ekvilibrijum, prema Teoremu 3.2.1, stabilan.

3. U slučaju $a^2 > 1$ i $b^2 > 1$, Teorem 3.2.1 ne daje odgovor. Primijenićemo Teorem 3.2.4. Pretpostavimo da je δ neki dovoljno mali broj tako da vrijedi $b^2 < (1+\delta^2)^2$ i $a^2 > (1+\delta^2)^2$. Definišimo funkciju $V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ na otvorenom disku $B(0,\delta)$, sa centrom u nuli i poluprečnika δ. Očigledno je da je tada V pozitivno definitna funkcija. Osim toga, za $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B(0,\delta)$, imamo

$$\begin{aligned} \Delta V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{a^2y^2}{(1+x^2)^2} + \frac{b^2x^2}{(1+y^2)^2} - x^2 - y^2 \\ &= \left(\frac{b^2}{(1+y^2)^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{(1+x^2)^2} - 1\right)y^2 \\ &\geq \left(\frac{b^2}{(1+\delta^2)^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{(1+\delta^2)^2} - 1\right)y^2 \\ &> 0 \quad za \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle, prema Teoremu 3.2.4, ekvilibrijum $(0,0)$ je nestabilan.

Drugi slučaj možemo razmotriti i sa stanovišta *LaSalleovog principa invarijantnosti.* Imaćemo dva podslučaja.

a) Neka je $a^2 \leq 1$ i $b^2 \leq 1$ i, pri tome je, $a^2 + b^2 < 2$. Tada je $\Delta V \leq (a^2-1)y^2$, što je jednako nuli ako je $y = 0$. Dakle, $\mathfrak{L}$ je x-osa. Kako bismo pronašli najveći invarijantni podskup $\mathcal{M}$ od $\mathfrak{L}$, primijetimo da, za $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$, je $F\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ bx \end{pmatrix}$. Dakle, $\mathcal{M} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Zaključujemo da je tačka ekvilibrijuma asimptotski stabilna.

b) Ako je $a^2 = 1$ i $b^2 = 1$, tada, na osnovu (3.21), zaključujemo da je $\Delta V = 0$ ako je $x = 0$ ili $y = 0$. Dakle, $\mathfrak{L} = \mathcal{M} =$ unija dvije koordinatne ose. LaSalleov princip invarijantnosti nam sada govori da postoji $c > 0$ tako da se svaka orbita $\mathcal{O}^+(u)$ približava skupu $\left\{\begin{pmatrix} \pm c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm c \end{pmatrix}\right\}$.

   Sada, ako je $c \neq 0$, $F^4\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, što znači da je $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ periodična tačka perioda 4, sa orbitom $\left\{\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ ac \end{pmatrix}\right\}$. Slično, možemo pokazati da je $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ abc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} bc \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, također, 4-ciklus.

Konačno, primjećujemo da se, za $ab = 1$, radi o 2- ciklusima.

■

3.3 Metod invarijante

Lyapunovljeva funkcija se ponekad može primijeniti na ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma primjenom tzv. diskretnog Dirichletovog teorema. U tom slučaju, potrebno je poznavati neku od invarijanti DDS. U slučaju DDS (3.1), gdje je $X_n \in \mathbb{R}^2, F : S \to S$ neprekidno preslikavnje i $S \subset \mathbb{R}^2$, za funkciju $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je **invarijanta** ako je $I(F(X)) = I(X)$ za svako $X \in S$.

Teorem 3.3.1. *[8] Sistem (3.4) ima neprekidnu invarijantu $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ako i samo ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uslova.*

i) Matrica A ima svojstvenu vrijednost λ za koju je $|\lambda| = 1$.

ii) Matrica A ima svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 sa osobinom $|\lambda_1| > 1$ i $0 < |\lambda_2| < 1$.

Dakle, za sistem linearnih difernetnih jednadžbi postoji invarijanta ako je tačka ekvilibrijuma nehiperbolička ili je sedlo.

Primjer 3.3.1. *[8] Posmatrajmo linearni sistem*

$$X_{n+1} = AX_n,$$

pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

za $a \in (0, 1)$. Ispitati stabilnost ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$.

Rješenje. Svojstvene vrijednosti matrice A su rješenja jednadžbe $(a-\lambda)(1-\lambda) = 0$, pa je $\lambda_1 = a$ i $\lambda_2 = 1$. Prema tome, $(0, 0)$ je nehiperbolički ekvilibrijum.

Nije teško zaključiti da je $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dakle, za pozitivne orbite vrijedi

$$A^n X_0 = a^n x_0 V_1 + y_0 V_2,$$

pri čemu su V_1 i V_2 svojstveni vektori. Pozitivne orbite monotono konvergiraju ka $(0, y_0)^T$ u pravcu svojstvenog vektora V_1, pa možemo zaključiti da je nula ekvilibrijum stabilan.

Ako pretpostavimo da $a \in (-1, 0)$, tada će kovergenencija oscilirati u pravcu vektora V_1.

Primijetimo da, prema Teoremu 3.3.1 posmatrani sistem ima invarijantu (U slučaju $a = 1$ je $I(x_n, y_n) = x_n + y_n$). ■

Primjer 3.3.2. *[8] Ispitati stabilnost nula ekvilibrijuma sistema*

$$X_{n+1} = AX_n,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Dakle, $(0, 0)$ je nehiperbolički ekvilibrijum.
Lahko se pokaže da je $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Za pozitivne orbite vrijedi

$$A^n X_0 = x_0 V_1 + (-1)^n y_0 V_2,$$

pri čemu su V_1 i V_2 svojstveni vektori. Dakle, pozitivne orbite konvergiraju ka rješenju perioda dva $\{(x_0, y_0)^T, (x_0, -y_0)^T\}$, pa možemo zaključiti da je nula ekvilibrijum stabilan.
Prema Teoremu 3.3.1, i ovaj sistem ima invarijantu $(I(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2)$. ■

Primjer 3.3.3. *[8] Posmatrajmo sistem*

$$X_{n+1} = AX_n,$$

sa

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ispitati stabilnost nula ekvilibrijuma.

Rješenje. Karakteristična jednadžba matrice A je

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

čija su rješenja

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \rho(\cos\omega \pm i \sin\omega),$$

pri čemu je $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ i $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Dakle, sada je

$$A = \rho \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

što je dobro poznata matrica rotacije. Nije teško pokazati da vrijedi

$$A^n = \rho^n \begin{pmatrix} \cos(n\omega) & \sin(n\omega) \\ -\sin(n\omega) & \cos(n\omega) \end{pmatrix},$$

što je, opet, matrica rotacije za ugao $n\omega$. Očigledno je da se $A^n X_0$ dobije kao kompozicija rotacije za ugao $n\omega$ i množenja sa ρ^n. Stoga, za $\rho < 1$, ishodište je asimptotski stabilna tačka, dok je za $\rho > 1$ nestabilna.

Slučaj $\rho = 1$ je posebno zanimljiv. Prema Teoremu 3.3.1, posmatrani sistem ima invarijantu. Zapravo, ta invarijanta je oblika

$$I(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2.$$

Zaista,

$$I(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n \cos\omega + y_n \sin\omega)^2 + (-x_n \sin\omega + y_n \cos\omega)^2$$

$$= x_n^2 \cos^2\omega + 2x_n y_n \sin\omega\cos\omega + y_n^2 \sin^2\omega + x_n^2 \sin^2\omega - 2x_n y_n \sin\omega\cos\omega + y_n^2\cos^2\omega$$

$$= x_n^2 + y_n^2$$

$$= I(x_n, y_n).$$

Prema tome, orbita kroz tačku X_0 pripada kružnici poluprečnika $\|X_0\|$. Asimptotsko ponašanje orbite na takvoj kružnici zavisi od ω. Zaista, primijetimo da je pozitivna orbita data sa

$$A^n X_0 = (\cos(n\omega)x_0 + \sin(n\omega)y_0)v_1 + (-\sin(n\omega)x_0 + \cos(n\omega)y_0)v_2.$$

Očigledno, svaka orbita na kružnici je periodična ako je $\frac{\omega}{2\pi}$ racionalan, dok je gusta kad je $\frac{\omega}{2\pi}$ iracionalan. ■ Sljedeći teorem ima važnu ulogu u ispitivanju stabilnosti tačke ekvilibrijuma DDS ili diferentne jednadžbe korištenjem invarijante.

Teorem 3.3.2. ***(Diskretni Dirichletov teorem)****[8] Promatrajmo DDS (3.1) i pretpostavimo da je $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna invarijanta. Ako I dostiže izoliranu lokalnu minimalnu ili maksimalnu vrijednost u (fiksnoj) tački ekvilibrijuma $\overline{X}$ ovog sistema, onda postoji funkcija Lyapunova jednaka $\pm(I(X) - I(\overline{X}))$ i takava da je ekvilibrijum $\overline{X}$ stabilan.*

Primjer 3.3.4. ***(Lynessova jednadžba)****[8] Dokazati da Lynessova jednadžba*

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{x_{n-1}}, \tag{3.22}$$

gdje je $a > 0$ parametar i $x_1 > 0, x_0 > 0$ ima invarijantu oblika

$$I(x_n, x_{n-1}) = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)(a + x_n + x_{n-1}), \tag{3.23}$$

a zatim ispitati stabilnost pozitivne tačke ekvilibrijuma.

Rješenje. Prvo ćemo pokazati da je sa (3.23), zaista, data invarijanta jednadžbe (3.22):

$$\begin{aligned}
I(x_{n+1}, x_n) &= \left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)(a + x_{n+1} + x_n) \\
&= \left(1 + \frac{x_{n-1}}{a + x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(a + \frac{a + x_n}{x_{n-1}} + x_n\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\frac{a + x_n + x_{n-1}}{a + x_n} \cdot \frac{(a + x_n)(x_{n-1} + 1)}{x_{n-1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)(a + x_n + x_{n-1}) \\
&= I(x_n, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Prema tome, invarijanta je oblika

$$I(x, y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)(a + x + y).$$

Tačke ekvilibrijuma jednadžbe (3.22) dobijemo rješavajući jednadžbu $\bar{x} = \dfrac{a + \bar{x}}{\bar{x}}$, to jest, $\bar{x}^2 - \bar{x} - a = 0$. Rješenja posljednje jednadžbe su $\bar{x}_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$. Pozitivni ekvilibrijum je tačka $\bar{x} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ i to je nehiperbolički ekvilibrijum prema Teoremu 3.1.6, jer vrijedi:

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{a + \bar{x}}{\bar{x}^2} = -1 \Leftrightarrow \bar{x}^2 - \bar{x} - a = 0$$

i

$$P = \frac{1}{\bar{x}} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sqrt{1 + 4a}.$$

Potreban uvjet za egzistenciju ekstrema funkcije I je

$$\frac{\partial I}{\partial x} \equiv \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{y+a}{x^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} \equiv \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{x+a}{y^2}\right)=0,$$

odakle dobijamo $x=y$ i jednadžbu $x^2-x-a=0$. Ovo pokazuje da su kritične tačke upravo tačke ekvilibrijuma. Sada ćemo provjeriti Hessian u pozitivnoj kritičnoj tački $\bar{x}=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, koju ćemo dalje označavati sa p. Dakle,

$$H=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

gdje je

$$A=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(p,p)=2\frac{(p+1)(p+a)}{p^4}>0, B=\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}(p,p)=\frac{a-2p^2}{p^4}$$

i

$$C=A.$$

Sada je

$$\det H = AC-B^2=\frac{(3a+2(a+1)p)(a+2(a+1)p+4p^2)}{p^8}>0,$$

što implicira da invarijanta I dostiže minimum u (p,p). Prema tome,

$$\min\{I(x,y):(x,y)\in S\}=I(p,p)=\frac{(p+1)^2(a+2p)}{p^2},$$

pa je, prema Teoremu 3.3.2,

$$V(x,y)=I(x,y)-\frac{(p+1)^2(a+2p)}{p^2},$$

što pokazuje da je $\bar{x}$ stabilan ekvilibrijum. ■

Primjer koji slijedi pokazuje da se Metod invarijante ponekad može primijeniti i na diferentne jednadžbe višeg reda.

Primjer 3.3.5. *Pokazati da* ***Toddova jednadžba***

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n + x_{n-1}}{x_{n-2}}, \tag{3.24}$$

pri čemu je $a > 0$ *parametar, i* $x_{-1} > 0, x_0 > 0, x_1 > 0$*, ima invarijantu*

$$I(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-2}}\right)(a + x_n + x_{n-1} + x_{n-2}), \tag{3.25}$$

a zatim ispitai stabilnost pozitivne tačke ekvilibrijuma.

Rješenje. Pokažimo da je sa (3.25), zaista, data invarijanta za jednadžbu (3.24).

$$I(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) = \left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)(a + x_{n+1} + x_n + x_{n-1})$$

$$= \left(1 + \frac{x_{n-2}}{a + x_n + x_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)(a + \frac{a + x_n + x_{n-1}}{x_{n-2}} + x_n + x_{n-1})$$

$$= \frac{a + x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{a + x_n + x_{n-1}}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\frac{(a + x_n + x_{n-1})(1 + x_{n-2})}{x_{n-2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-2}}\right)(a + x_n + x_{n-1} + x_{n-2})$$

$$= I(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}).$$

Dakle, invarijanta je oblika

$$I(x, y, z) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)(1 + x + y + z).$$

Tačke ekvilibrijuma jednadžbe (3.24) pronalazimo rješavajući jednadžbu $\bar{x} = \dfrac{a + \bar{x} + \bar{x}}{\bar{x}}$, odnosno $\bar{x}^2 = a + 2\bar{x}$, odnosno $\bar{x}^2 - 2\bar{x} - a = 0$. Odavde dobijemo da je $\bar{x}_\pm = 1 \pm \sqrt{1 + a}$. Pozitivni ekvilibrijum je tačka $p = \bar{x}_+ = 1 + \sqrt{1 + a}$ i ona je nehiperbolička. Zaista, kako je $f(x, y, z) = \dfrac{a + x + y}{z}$, to je

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial f}{\partial x}(p, p, p) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + a}} = \frac{\sqrt{1 + a} - 1}{a}, \\
s &= \frac{\partial f}{\partial y}(p, p, p) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + a}} = \frac{\sqrt{1 + a} - 1}{a}, \\
t &= \frac{\partial f}{\partial z}(p, p, p) = -\frac{a + 1 + \sqrt{1 + a} + 1 + \sqrt{1 + a}}{(1 + \sqrt{1 + a})^2} = -\frac{a + 2 + 2\sqrt{1 + a}}{a + 2 + \sqrt{1 + a}} = -1.
\end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba $\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0$ je oblika

$$\lambda^3 + \frac{1-\sqrt{1+a}}{a}\lambda^2 + \frac{1-\sqrt{1+a}}{a}\lambda + 1 = 0.$$

Nije teško uočiti da je jedno rješenje ove jednadžbe $\lambda = -1$.

Sada, neophodni uvjeti za ekstrem daju:

$$\frac{\partial I}{\partial x} \equiv \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{a+y+z}{x^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} \equiv \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{a+x+z}{y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} \equiv \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{a+x+y}{z^2}\right) = 0,$$

odakle slijedi $x = y = z$ i $x^2 - 2x - a = 0$. To znači da su kritične tačke upravo tačke ekvilibrijuma. Sada ćemo provjeriti Hessian u pozitivnoj kritičnoj tački (p, p, p), pri čemu je $p = 1 + \sqrt{1+a}$. Dakle,

$$H = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix},$$

gdje je

$$A = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(p,p,p) = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(p,p,p) = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}(p,p,p) = 2\frac{(p+1)^2(a+2p)}{p^5} > 0,$$

i

$$B = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}(p,p,p) = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}(p,p,p) = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}(p,p,p) = \frac{(p+1)(a+p-2p^2)}{p^5}.$$

Sada imamo da je

$$\det H_1 = A > 0,$$

$$\det H_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \frac{(p+1)^2(a+(2a+3)p+6p^2)(3a+(2a+5)p+2p^2)}{p^{10}} > 0$$

i

$$\det H = \begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix} = (A-B)^2(A+2B)$$

$$= 2\frac{(p+1)^3(2a+(a+3)p)(a+(2a+3)p+6p^2)}{p^{15}} > 0,$$

što nam pokazuje da invarijanta I dostiže minimum u tački (p, p, p). Dakle,

$$\min\{I(x, y, z) : (x, y, z) \in S\} = I(p, p, p) = \frac{(p+1)^3(a+3p)}{p^3},$$

i prema Teoremu 3.3.2 je

$$V(x, y, z) = I(x, y, z) - \frac{(p+1)^3(a+3p)}{p^3},$$

a to znači da je p stabilan ekvilibrijum. ∎

3.4 Metod centralne mnogostrukosti

Kada je riječ o stabilnosti hiperboličkih tačaka ekvilibrijma dvodimenzionalnih sistema, Teorem o lineariziranoj stabilnosti je dao odgovor, ali stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma se ne može ispitati na ovaj način. Jedan od načina za ispitivanje stabilnosti nehiperboličkih tačaka je teorija **centralne mnogostrukosti.** Najjednostavnije rečeno, centralna mnogostrukost je skup M_c u prostoru manje dimenzije, gdje se o stabilnosti polaznog sistema može zaključivati promatrajući ponašanje na M_c. Npr. ako je nehiperbolički ekvilibrijum definisan u skupu $\mathbb{R}^2$, onda se stabilnost te tačke može izučavati promatrajući stabilnost odgovarjuće centralne mnogostrukosti u $\mathbb{R}$. S obzirom da je stabilnost jako dobro razrađena u jednodimenzinalnom slučaju, teorija centralnih mnogostrukosti je vrlo moćno sredstvo za ispitivanje stabilnosti i u dvodimenzionalnom slučaju.

Posmatrajmo preslikavanje $F(\mu, u)$, $F : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, pri čemu je $\mu \in \mathbb{R}^s$, $u \in \mathbb{R}^k$ i $F \in C^r (r \geq 3)$. (v.[2]) Pretpostavimo da je $(\bar{\mu}, \bar{u})$ fiksna tačka preslikavanja F, tj.,

$$F(\bar{\mu}, \bar{u}) = \bar{u}.$$

Ako je tačka ekvlibrijuma nehiperbolička, tada imamo tri moguće situacije.

1. Jedna svojstvena vrijednost matrice Jakobijana J_F je 1, a ostale su izvan jedinične kružnice.

2. Jedna svojstvena vrijednost matrice Jakobijana J_F je -1, a ostale su izvan jedinične kružnice.

3. Matrica Jakobijana ima dvije konjugovano-kompleksne svojstvene vrijednosti, koje su po modulu jednake 1, a ostale su izvan jedinične kružnice.

Ako je $k = 2$, tada se prva dva slučaja mogu svesti na jednodimenzinalni slučaj pomoću centralnih mnogostrukosti, koje su opisane na početku ove sekcije, dok za treći slučaj to nije moguće uraditi.

Pretpostavićemo, bez smanjenja općenitosti, da je $u_0 = 0$ i izostavićemo parametar μ, privremeno. Tada se preslikavanje F može zapisati u obliku

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + f(x,y) \\ By + g(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

pri čemu matrica Jakobijana J ima formu $J = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Pored toga, svojstvene vrijednosti matrice A leže na jediničnoj kružnici, dok su svojstvene vrijednosti matrice B izvan jedinične kružnice i još

$$f(0,0) = 0, g(0,0) = 0,$$

$$Df(0,0) = 0, Dg(0,0) = 0.$$

Sistemu (3.26) pridružimo sistem diferentnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= By_n + g(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Nadalje ćemo smatrati da je A matrica tipa $t \times t$, a B tipa $s \times s$ i $t + s = k$.

Teorem 3.4.1. *[2] Za sistem (3.26) postoji centralna mnogostrukost data sa*

$$M_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0, za\ \ dovoljno\ \ malo\ \ \delta\}. \tag{3.27}$$

Osim toga, dinamika sistema (3.26), ograničena na M_c, data je preslikavanjem

$$x \mapsto Ax + f(x, h(x)), x \in \mathbb{R}^t. \tag{3.28}$$

Teorem 3.4.2. *[2] Sljedeće tvrdnje su tačne.*

1. *Ako je fiksna tačka $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ jednadžbe (3.28) stabilna, asimptotski stabilna ili netsbilna, onda je fiksna tačka $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ sistema (3.26), također, stabilna, asimptotski stabilna ili nestabilna, redom.*

2. *Za bilo koje rješenje (x_n, y_n) sistema (3.26), sa početnom tačkom (x_0, y_0), u dovoljno maloj okolini tačke $(0,0)$ postoji rješenje z_n jednadžbe (3.28) i pozitivni brojevi $L, \beta > 1$ tako da vrijedi*

$$|x_n - z_n| \leq L\beta^n \ \ i \ \ |y_n - h(z_n)| \leq L\beta^n \ \ za \ \ sve \ \ n \geq 0.$$

Međutim, i dalje ostaje pitanje kako pronaći centralnu mnogostrukost M_c, odnosno, krivu $y = h(x)$. U tu svrhu, izvršimo zamjenu $y = h(x)$ u sistemu (3.26):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + f(x_n, h(x_n)), \\ y_{n+1} &= h(x_{n+1}) \\ &= h[Ax_n + f(x_n, h(x_n))] \\ &= Bh(x_n) + g(x_n, h(x_n)), \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\mathcal{F}(h(x)) = h[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0. \tag{3.29}$$

Rješavanje jednadžbe (3.29) je težak zadatak, tako da se u najboljem slučaju možemo nadati aproksimaciji rješenja pomoću niza potencija. Sljedeći teorem daje teoretsko opravdanje za aproksimaciju rješenja.

Teorem 3.4.3. *[2] Neka je $\psi : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s$ preslikavanje klase C^1 za koje vrijedi $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}(\psi(x)) = O(|x|^r)$, kad $x \to 0$, za neko $r > 1$. Tada je*

$$h(x) = \psi(x) + O(|x|^r), \quad \textit{kad} \quad x \to 0.$$

Primjer 3.4.1. *[2] Posmatrajmo preslikavanje $F = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$ dato sa*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Ispitati stabilnost tačke ekvilibrijuma $(0,0)$.

Rješenje. Nije teško pokazati da je tačka $(0,0)$ nehiperbolički ekvilibrijum preslikavanja F. Zaista,

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ 2x & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

pa je

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Problem stabilnosti tačke $(0,0)$ ćemo riješiti pomoću centralne mnogostrukosti. Dakle,

$$M_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = h(x), h(0) = h'(0) = 0\}.$$

Funkcija h mora zadovoljavati jednadžbu (3.29)

$$h[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0,$$

odnosno

$$h(-x + xh(x)) + \frac{1}{2}h(x) - x^2 = 0. \tag{3.30}$$

Pretpostavimo da je h oblika

$$h(x) = C_1x^2 + C_2x^3 + O(x^4). \tag{3.31}$$

Sada, zamjenom (3.31) u (3.30), dobijamo

$$h(-x + x(C_1x^2 + C_2x^3 + O(x^4))) + \frac{1}{2}(C_1x^2 + C_2x^3 + O(x^4)) - x^2 = 0,$$

odnosno

$$C_1(-x + C_1x^3 + O(x^4))^2 + C_2(-x + C_1x^3 + O(x^4))^3 + O(-x + C_1x^3 + O(x^4)) = 0,$$

odnosno

$$C_1(x^2 + O(x^4)) + C_2(-x^3 + O(x^4)) + O(x^4) = 0,$$

odakle je

$$C_1x^2 - C_2x^3 + O(x^4) + \frac{1}{2}(C_1x^2 + C_2x^3 + O(x^4)) - x^2 = 0.$$

Odavde slijedi

$$C_1 + \frac{1}{2}C_1 - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad C_1 = \frac{2}{3},$$

$$-C_2 + \frac{1}{2}C_2 = 0 \quad \text{ili} \quad C_2 = 0.$$

Dakle, $h(x) = \frac{2}{3}x^2 + O(x^4)$, a preslikavanje ϕ u centralnoj mnogostrukosti je dato sa

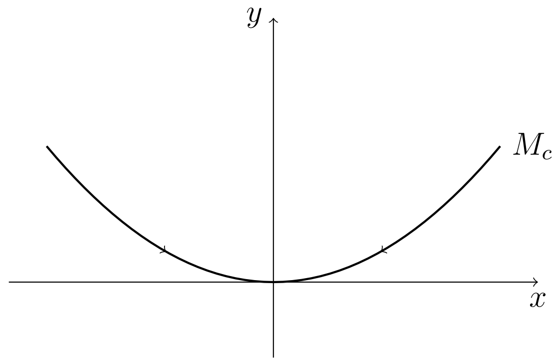
$$x \mapsto -x + \frac{2}{3}x^3 + O(x^5),$$

čiji je Schvarzian u tački $(0, 0)$

$$S\phi(0,0) = \frac{\phi'''(0)}{\phi'(0)} - \frac{2}{3}\left(\frac{\phi''(0)}{\phi'(0)}\right)^2 = -4 < 0.$$

Dakle, prema Teoremu 2.2.4, ekvilibrijum je asimptotski stabilan u odnosu na preslikavanje ϕ, a to prema Teoremu 3.4.2 implicira asimptotsku stabilnost tačke $(0, 0)$ u odnosu na preslikavanje F.

∎



Slika 3.1: Asimptotski stabilan nehiperbolički ekvilibrijum. Kriva $h(x) = -x + \frac{2}{3}x^3 + O(x^4)$ je graf centralne mnogostrukosti

Primjer 3.4.2. *[2]Ispitati stabilnost tačke* $(0,0)$ *u odnosu na preslikavanje* F*, ako je*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y^3 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{3.32}$$

Rješenje. Nije teško pokazati da su svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(0,0)$, zapravo, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, dok su odgovarajući svojstveni vektori $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dakle, ekvilibrijum $(0,0)$ je nehiperbolički.

Da bismo našli centralnu mnogostrukost M_c, prvo moramo dijagonalizirati matricu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ koristeći matricu $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, čije su kolone svojstveni vektori V_1 i V_2. Kako je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, slijedi

$$F\left(T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(u+v)^3 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -(u+v)^3 \end{pmatrix}.$$

Uvrštavanjem $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dobijemo

$$\mathcal{F}(h(u)) = h(Au + f(u, h(u))) - Bh(u) - g(u, h(u)) = 0, \tag{3.33}$$

gdje je $A = 1, B = \dfrac{1}{2}, f(u,v) = -2(u+v)^3, g(u,v) = (u+v)^3$. Pretpostavimo da je h oblika

$$h(u) = au^2 + bu^3 + O(u^4). \tag{3.34}$$

Ako sada (3.34) zamijenimo u (3.33), dobijemo

$$a(u - 2(u + au^2 + bu^3 + O(u^4))^3)^2 + b(u - 2(u + au^2 + bu^3 + O(u^4))^3)^3 + ...$$

$$-\frac{1}{2}(au^2 + bu^3 + O(u^4)) - (u + au^2 + bu^3 + O(u^4))^3 = 0,$$

ili

$$au^2 + bu^3 - \frac{1}{2}au^2 - \frac{1}{2}bu^3 - u^3 + O(u^4) = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene s nulom, dobijemo

$$u^2: \quad a - \frac{1}{2}a = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

$$u^3: \quad b - \frac{1}{2}b - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2.$$

Dakle, centralna mnogostrukost je data grafom

$$h(u) = 2u^3 + O(u^4),$$

dok je preslikavanje ϕ u centralnoj mnogostrukosti dato sa

$$u \mapsto u - 2u^3 + O(u^4).$$

Primijetimo da je 0 fiksna tačka preslikavanja ϕ za koje je $\phi'(0) = 1, \phi''(0) = 0$ i $\phi'''(0) < 0$, odakle, prema Teoremu 2.2.4, slijedi da je tačka $(0,0)$ asimptotski stabilna u odnosu na preslikavanje $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. ■

Napomena 3.4.1.

1. *Izbor oblika preslikavanja h nije jedinstven. Može se pokazati da se bilo koje dvije centralne mnogostrukosti za datu fiksnu tačku razlikuju samo u transcedentno malim članovima.*

2. *Ako matrica J nije dijagonalna, moramo je prvo dijagonalizirati, pa tek onda tražiti centralnu mnogostrukost, kao što je pokazano u posljednjem primjeru.*

3.4.1 Centralna mnogostrukost koja ovisi o parametru

Pretpostavimo da sistem (3.26) zavisi o parametru, recimo, $\mu \in \mathbb{R}^m$. Tada sistem (3.26) ima oblik

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + f(\mu, x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= By_n + g(\mu, x_n, y_n), \end{aligned} \tag{3.35}$$

pri čemu je

$$f(0,0,0) = 0, g(0,0,0) = 0,$$

$$Df(0,0,0) = 0, Dg(0,0,0) = 0,$$

i gdje su funkcije f i g klase C^r, za neko $r \geq 3$, u nekoj okolini tačke $(x, y, \mu) = (0,0,0)$.

Prvi korak je da povećamo broj jednačina sistema (3.36) na $k + m$ zapisujući ga u obliku

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + f(\mu_n, x_n, y_n) \\ \mu_{n+1} &= \mu_n \\ y_{n+1} &= By_n + g(\mu_n, x_n, y_n). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Centralna mnogostrukost M_c sada ima oblik

$$M_c \;=\; \{(x, y, \mu) : y = h(\mu, x), |x| < \delta_1, |\mu| < \delta_2, h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0\}.$$

Uvrštavanjem y u sistem (3.36) slijedi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + f(\mu, x_n, h(\mu, x_n)) \\ y_{n+1} &= h[\mu, Ax_n + f(\mu, x_n, h(x_n, \mu))] \\ &= Bh(\mu, x_n) + g(\mu, x_n, h(\mu, x_n)), \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti slijedi funkcionalna jednadžba

$$\mathcal{F}(h(\mu, x)) = h[\mu, Ax + f(\mu, x, h(\mu, x))] - Bh(\mu, x) - g(\mu, x, h(\mu, x)) = 0. \tag{3.37}$$

Treba imati u vidu da, ako je μ jednodimenzionlan vektor, treba ga tretirati kao zavisnu varijablu, tako da će članovi poput $x\mu$ ili $y\mu$ biti posmatrani kao nelinearni članovi i apsorbovaće ih funkcije f i g. A ako je μ višedimenzionalan vektor, tada jednu komponentu biramo kao zavisnu varijablu, a preostale komponente se posmatraju kao konstante. Na primjer,može se uzeti da $h(\mu, x)$ ima oblik

$$h(\mu, x) = c_1 x^2 + c_2 x\mu + c_3 \mu^2 + ... \tag{3.38}$$

3.4.2 Primjer primjene metoda centralne mnogostrukosti na jednadžbu $x_{n+1} = \frac{Ax_n^2+Ex_{n-1}}{x_n^2+f}$

U ovom dijelu ćemo razmatrati jednadžbu

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Ex_{n-1}}{x_n^2 + f}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.39}$$

pri čemu su $A, E, f \in (0, \infty)$ i gdje su početni uvjeti x_{-1} i x_0 proizvoljni nenegativni brojevi takvi da je $x_{-1} + x_0 > 0$ (detaljnije vidjeti u [10]).

Jednadžba (3.39) je specijalan slučaj jednadžbi

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Ex_{n-1} + F}{ax_n^2 + ex_{n-1} + f}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.40}$$

i

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Bx_nx_{n-1} + Cx_{n-1}^2 + Dx_n + Ex_{n-1} + F}{ax_n^2 + bx_nx_{n-1} + cx_{n-1}^2 + dx_n + ex_{n-1} + f}, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.41}$$

Primijetimo da je jednadžba (3.39) primjer racionalne diferentne jednadžbe kojoj je pridruženo preslikavanje koje je uvijek rastuće po drugoj varijabli i promjenjljive monotonosti po prvoj varijabli (može biti rastuće ili opadajuće, zavisno od odgovarajućeg parametarskog prostora).

Tačke ekvilibrijuma jednadžbe (3.39) su pozitivna rješenja jednadžbe

$$\bar{x} = \frac{A\bar{x}^2 + E\bar{x}}{\bar{x}^2 + f,}$$

odnosno

$$\bar{x}(\bar{x}^2 - A\bar{x} - (E - f)) = 0,$$

odakle se dobije da je

$$\bar{x}_1 = 0,$$

i

$$\bar{x}_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4(E - f)}}{2},$$

pri čemu je $\bar{x}_+ > 0$ za $E \geq f - \frac{1}{4}A^2$ i $\bar{x}_- > 0$ za $f - \frac{1}{4}A^2 < E < f$ ili $0 < E = f - \frac{1}{4}A^2$.

Stavimo sada da je

$$f(u, v) = \frac{Au^2 + Ev}{u^2 + f}.$$

Tada jednadžbi (3.39)možemo pridružiti lineariziranu jednadžbu $z_{n+1} = pz_n + qz_{n-1}$, gdje je

$$p = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u(Af - vE)}{(u^2 + f)^2}, q = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{E}{u^2 + f}.$$

Lema 3.4.1. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_1 = 0$ jednadžbe (3.39) je*

i) lokalno asimptotski stabilna ako je $E < f$,

ii) repeler ako je $E > f$ i

iii) nehiperbolički ekvilibrijum ako je $E = f$.

Lema 3.4.2. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_+$ jednadžbe (3.39) je*

i) nehiperbolička tačka ako je $0 < E = f - \frac{1}{4}A^2$ (kada je $\bar{x}_+ = \bar{x}_- = \frac{A}{2}$) ili $E = f + \frac{3}{4}A^2$ (kada je $\bar{x}_+ = \bar{x}_- = \frac{3}{2}A$),

ii) lokalno asimptotski stabilna ako je $0 \le f - \frac{1}{4}A^2 < E < f$ ili $E = f$ ili $f < E < f + \frac{3}{4}A^2$,

iii) sedlasta tačka ako je $f + \frac{3}{4}A^2 < E$.

Lema 3.4.3. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_-$ jednadžbe (3.39) je*

i) nehiperbolička tačka ako je $0 < E = f - \frac{1}{4}A^2$ (kada je $\bar{x}_- = \bar{x}_+ = \frac{A}{2}$) ili $E = f$ (kada je $\bar{x}_- = \bar{x}_1 = 0$),

ii) sedlasta tačka ako je $0 \le f - \frac{1}{4}A^2 < E < f$

iii) repeler ako je $f < E < f + \frac{3}{4}A^2$ (kada je $x_- = x_1 = 0$).

Dakle, pozitivna tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.39) je nehiperbolička ako je $0 < E = f - \frac{1}{4}A^2$ ili $E = f + \frac{3}{4}A^2$. Kako bismo ispitali stabilnost tačke ekvilibrijuma u ovim slučajevima, koristićemo teoriju centralne mnogostrukosti.

Propozicija 3.4.1. *Pretpostavimo da je $0 < E = f - \frac{1}{4}A^2$. Tada je nehiperbolička tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_2 = \frac{A}{2}$ jednadžbe (3.39) polustabilna odozgo.*

Dokaz. Da bismo pokazali da je $\bar{x}_2 = \frac{A}{2}$ polustabilna, koristićemo teoriju centralne mnogostrukosti. Jednadžba (3.39) je sada oblika

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Ex_{n-1}}{x_n^2 + E + \frac{1}{4}A^2}. \tag{3.42}$$

Zamjenom promjenljive $y_n = x_n - \frac{1}{2}A$, dobijemo sljedeću jednadžbu (za $\Omega = 2E + A^2$)

$$y_{n+1} = \frac{Ay_n^2 + A^2 y_n + 2Ey_{n-1}}{2y_n^2 + 2Ay_n + \Omega}, \tag{3.43}$$

koja ima ekvilibrijum 0. Smjenom $y_{n-1} = u_n, y_n = v_n$, jednadžba (3.43) prelazi u sistem

$$\left.\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & v_n \\ v_{n+1} & = & \dfrac{Av_n^2 + A^2 v_n + 2Eu_n}{2v_n^2 + 2Av_n + \Omega}. \end{array}\right\} \tag{3.44}$$

Jakobijan J_0 za nula ekvilibrijum sistema (3.44) je

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2E}{\Omega} & \frac{A^2}{\Omega} \end{pmatrix},$$

a odgovarajuća karakteristična jednadžba ima oblik

$$\lambda^2 - \frac{A^2}{\Omega}\lambda - \frac{2E}{\Omega} = 0,$$

pa su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = -\frac{2E}{\Omega} \in (-1, 0).$$

Sada sistem (3.44) možemo zapisati u obliku

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(u_n, v_n) \\ \zeta(u_n, v_n) \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

gdje je

$$\left.\begin{array}{rcl} \gamma(u,v) & = & 0, \\ \zeta(u,v) & = & \dfrac{-v\,(2A^2v^2 + A(A^2 - 2E)v + 4AEu + 4Euv)}{\Omega(2v^2 + 2Av + \Omega)}. \end{array}\right\} \tag{3.46}$$

Neka je

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

pri čemu je P matrica koja dijagonalizira matricu J_0 definisana sa

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2E}{\Omega} \end{pmatrix},$$

tako da je

$$P^{-1} = -\frac{\Omega}{\Omega + 2E} \begin{pmatrix} -\frac{2E}{\Omega} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$P^{-1} J_0 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2E}{\Omega} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Zbog (3.47), imamo

$$\begin{aligned} u_n &= r_n + s_n \\ v_n &= r_n - \tfrac{2E}{\Omega} s_n, \end{aligned}$$

i smjenom u (3.46)

$$\begin{aligned} \gamma(u_n, v_n) &= \overline{\gamma}(r_n, s_n), \\ \zeta(u_n, v_n) &= \overline{\zeta}(r_n, s_n), \end{aligned}$$

to jest,

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}(r_n, s_n) &= 0 \\ \overline{\zeta}(r_n, s_n) &= \tfrac{(2Es_n - \Omega r_n)(2\Omega^3 r_n^2 + A\Omega^3 r_n - 4A^2 E\Omega r_n s_n + 2AE(6E + A^2)\Omega s_n - 16E^3 s_n^2)}{\Omega^2(2\Omega^2 r_n^2 + 2A\Omega^2 r_n - 8E\Omega r_n s_n - 4AE\Omega s_n + 8E^2 s_n^2 + \Omega^3)}. \end{aligned}$$

Dakle, (3.45) se sada može zapisati u obliku

$$P\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = J_0 P \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\gamma}(r_n, s_n) \\ \overline{\zeta}(r_n, s_n) \end{pmatrix}$$

ili, što je ekvivalentno,

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1} J_0 P \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + P^{-1}\begin{pmatrix} \overline{\gamma}(r_n, s_n) \\ \overline{\zeta}(r_n, s_n) \end{pmatrix}$$

a, onda, koristeći (3.48)

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2E}{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + P^{-1}\begin{pmatrix} \overline{\gamma}(r_n, s_n) \\ \overline{\zeta}(r_n, s_n) \end{pmatrix}.$$

Dakle, normalna forma sistema (3.45) je

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2E}{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}(r_n, s_n) \\ \widehat{\zeta}(r_n, s_n) \end{pmatrix},$$

gdje je

$$\widehat{\gamma}(r_n, s_n) = -\widehat{\zeta}(r_n, s_n)$$

i

$$\widehat{\gamma}(r_n, s_n) = \frac{(2Es_n - \Omega r_n)(2\Omega^3 r_n^2 + A\Omega^3 r_n - 4A^2 E\Omega r_n s_n + 2AE(\Omega + 4E)s_n - 16E^3 s_n^2)}{\Omega(\Omega + 2E)(2\Omega^2 r_n^2 + 2A\Omega^2 r_n - 8E\Omega r_n s_n - 4AE\Omega s_n + 8E^2 s_n^2 + \Omega^3)}.$$

Sada, neka je $s = \chi(r) = \psi(r) + O(r^4)$, gdje je $\psi(r) = \alpha r^2 + \beta r^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, centralna mnogostrukost. Pri tome, preslikavanje χ mora zadovoljavati jednadžbu centralne mnogostrukosti (za $\lambda_2 = -\frac{2E}{\Omega}$):

$$\chi(r + \widehat{\gamma}(r, \chi(r))) - \lambda_2 \chi(r) - \widehat{\zeta}(r, \chi(r)) = 0. \tag{3.49}$$

Ako $\widehat{\gamma}(r,s)$ aproksimiramo Taylorovim polinomom

$$\widehat{\gamma}(r,s) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{i!}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\widehat{\gamma}(0,0) + s\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}(0,0)\right)^i + O(r^4), \tag{3.50}$$

dobijemo

$$\widehat{\gamma}(r,\chi(r)) = r^2\frac{-A\Omega^2 - 2r\Omega^2 + 2A^2r\Omega - 8Ar\alpha E^2}{\Omega^2(\Omega+2E)} + O(r^4),$$

i

$$\chi(r + \widehat{\gamma}(r,\chi(r))) = r^2\alpha + \left(\beta - \frac{2A\alpha}{\Omega+2E}\right)r^3 + O(r^4).$$

Sada iz (3.49) dobijemo sistem

$$\begin{aligned} 2A(28(2E+A^2)E+3A^4)\alpha + (2E+A^2)^2\beta &= 4(2E+A^2)(E+2A^2)\\ \alpha(4E+A^2)^2 &= A(2E+A^2), \end{aligned}$$

čije je rješenje $(\alpha,\beta) = \left(\frac{A(2E+A^2)}{(4E+A^2)^2}, \frac{2(2E+A^2)(16E^2+4A^2E+A^4)}{(4E+A^2)^2}\right)$. Dalje slijedi da je $s = \chi(r) = \psi(r) + O(r^4)$, gdje je

$$\psi(r) = \frac{A(2E+A^2)}{(4E+A^2)^2}r^2 + \frac{2(2E+A^2)(16E^2+4A^2E+A^4))}{(4E+A^2)^2}r^3.$$

Imajući u vidu Teorem 3.4.2, proučavanje stabilnosti nula ekvilibrijuma jednadžbe (3.43), odnosno, pozitivne nehiperboličke tačke $\bar{x}_2 = \frac{A}{2}$ jednadžbe (3.42), svodi se na stabilnost sljedeće jednadžbe

$$r_{n+1} = r_n + \widehat{\gamma}(r_n, s_n) = G(r_n), \tag{3.51}$$

gdje je

$$G(r) = r + \widehat{\gamma}(r,\psi(r)) = -\frac{r(4E(8E+A^2)r^2 + A(4E+A^2)^2r - (4E+A^2)^3)}{(4E+A^2)^3}.$$

Kako je $\frac{d}{dr}G(0) = 1$ i

$$\frac{d^2}{dr^2}G(0) = -\frac{2A}{A^2+4E} < 0,$$

prema Teoremu 2.2.1, nula ekvilibrijum jednadžbe (3.51) je nestabilna fiksna tačka, koja je polustabilna odozgo. Zato je, prema Teoremu 3.4.2, nula ekvilibrijum jednadžbe (3.43), odnosno, pozitivni nehiperbolički ekvilibrijum $\bar{x}_2 = \frac{A}{2}$ jednadžbe (3.42), polustabilan odozgo. □

Propozicija 3.4.2. *Pretpostavimo da je $E = f + \frac{3}{4}A^2$. Tada je pozitivna tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_2 = \bar{x}_+ = \frac{3}{2}A$ jednadžbe (3.39) lokalno asimptotski stabilna.*

Dokaz. Da bismo pokazali da je $\bar{x}_2$ lokalni sink, poslužićemo se teorijom centralne mnogostrukosti. Kako je $E = f + \frac{3}{4}A^2$, jednadžba (3.39) ima oblik

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Ex_{n-1}}{x_n^2 + E - \frac{3}{4}A^2}. \tag{3.52}$$

Zamjenom varijable $y_n = x_n - \frac{3}{2}A$, dobijemo jednadžbu (za $\Phi = 3A^2 + E$)

$$y_{n+1} = \frac{-Ay_n^2 - 3A^2y_n + 2Ey_{n-1}}{2y_n^2 + 6Ay_n + \Phi}, \tag{3.53}$$

koja ima nula ekvilibrijum. Sada, uvođenjem smjene $y_{n-1} = u_n, y_n = v_n$, jednadžba (3.53) prelazi u sistem

$$\left.\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & v_n \\ v_{n+1} & = & \dfrac{-Av_n^2 - 3A^2v_n + 2Eu_n}{2v_n^2 + 6Av_n + \Phi}. \end{array}\right\} \tag{3.54}$$

Matrica Jakobijana J_0 sistema (3.54) u tački nula je

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2E}{\Phi} & \frac{-3A^2}{\Phi} \end{pmatrix},$$

pa je odgovarajuća karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + \frac{3A^2}{\Phi}\lambda - \frac{2E}{\Phi} = 0.$$

Odavde se dobiju svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = -1 \quad i \quad \lambda_2 = \frac{2E}{\Phi} \in (0,1).$$

Sistem (3.54) se može zapisati u obliku

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(u_n, v_n) \\ \zeta(u_n, v_n) \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

gdje je

$$\left.\begin{array}{rcl} \gamma(u,v) & = & 0 \\ \zeta(u,v) & = & v\dfrac{18A^3v + 6A^2v^2 - Av\Phi - 12AuE - 4uvE}{\Phi(\Phi + 6Av + 2v^2)}. \end{array}\right\} \tag{3.56}$$

Neka je

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

pri čemu je P matrica koja dijagonalizira matricu J_0 definisana sa

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{2E}{\Phi} \end{pmatrix},$$

tako da je

$$P^{-1} = \frac{\Phi}{\Phi + 2E} \begin{pmatrix} \frac{2E}{\Phi} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$P^{-1} J_0 P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{2E}{\Phi} \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Normalna forma sistema (3.55), koja se dobije na isti način kao i u dokazu Propozicije 3.4.1, je

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{2E}{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}(r_n, s_n) \\ \widehat{\zeta}(r_n, s_n) \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

gdje je

$$\widehat{\gamma}(r_n, s_n) = -\widehat{\zeta}(r_n, s_n),$$

i

$$\widehat{\gamma}(r_n, s_n) = \frac{\Phi r_n - 2E s_n}{\Phi(\Phi + 2E)} \frac{-2\Phi^3 r_n^2 + 16e^3 s_n^2 + 5A\Phi^3 r_n + 2A\Phi E(\Phi + 12E)s_n + 12A^2\Phi E r_n s_n}{2\Phi^2 r_n^2 + 8E^2 s_n^2 - 6A\Phi^2 r_n + 12A\Phi E s_n - 8\Phi E r_n s_n + \Phi^3}.$$

Sada, neka je $s = \chi(r) = \psi(r) + O(r^4)$, gdje je $\psi(r) = \alpha r^2 + \beta r^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, centralna mnogostrukost. Pri tome, preslikavanje χ mora zadovoljavati jednadžbu centralne mnogostrukosti (za $\lambda_2 = \frac{2E}{\Phi}$):

$$\chi(-r + \widehat{\gamma}(r, \chi(r))) - \lambda_2 \chi(r) - \widehat{\zeta}(r, \chi(r)) = 0. \tag{3.60}$$

Zbog (3.50) imamo da je

$$\widehat{\gamma}(r, \chi(r)) = -\frac{5A\Phi^2 r^2 + 2(\Phi(-\Phi + 15A^2) - 4A\alpha E(\Phi - 3E))r^3}{\Phi^2(\Phi + 2E)} + O(r^4)$$

i

$$\chi(-r + \widehat{\gamma}(r, \chi(r))) = \frac{\alpha(\Phi + 2E)r^2 + (10A\alpha - (\Phi + 2E)\beta)r^3}{\Phi + 2E} + O(r^4).$$

Zatim, iz (3.60) dobijemo sistem

$$\begin{aligned} 2A(6E - 5\Phi)(\Phi + 2E)\alpha + \Phi(\Phi + 2E)^2\beta &= 2\Phi(\Phi - 15A^2), \\ \alpha(\Phi^2 - 4E^2) &= 5A\Phi, \end{aligned}$$

čije rješenje je $(\alpha, \beta) = \left(\frac{5}{3}\frac{2E+3A^2}{A(4E+3A^2)}, \frac{26}{3}\frac{2E+3A^2}{(4E+3A^2)^2}\right)$.

Sada je $s = \chi(r) = \psi(r) + O(r^4)$, pri čemu je

$$\psi(r) = \frac{5}{3}\frac{2E+3A^2}{A(4E+3A^2)}r^2 + \frac{26}{3}\frac{2E+3A^2}{(4E+3A^2)^2}r^3.$$

Prema Teoremu 3.4.2, ispitivanje stabilnosti nula ekvilibrijuma jednadžbe (3.53), odnosno pozitivnog nehiperboličkog ekvilibrijuma $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}A$ jednadžbe (3.52), svodi se na ispitivanje stabilnosti jednadžbe

$$r_{n+1} = -r_n + \widehat{\gamma}(r_n, s_n) = G(r_n), \tag{3.61}$$

gdje je

$$G(r) = -r + \widehat{\gamma}(r, \psi(r)) = -\frac{r\,(4(-E+18A^2)r^2 + 15A(4E+3A^2)r + 3(4E+3A^2)^2)}{3(4E+3A^2)^2}.$$

Kako je $\frac{d}{dr}G(0) = -1$, $\frac{d^2}{dr^2}G(0) = -\frac{10A}{4E+3A^2}$ i $\frac{d^3}{dr^3}G(0) = -\frac{8(18A^2-E)}{(4E+3A^2)^2}$, to je odgovarajući Schwarzian oblika

$$SG(0) = -\frac{d^3}{dr^3}G(0) - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}G(0)\right)^2 = -\frac{2}{4E+3A^2} < 0,$$

pa prema Teoremu 2.2.4, nula ekvilibrijum jednadžbe (3.61) je sink. Prema tome, na osnovu Teorema 3.4.2, nula ekvilibrijum jednadžbe (3.53), odnosno pozitivni nehiperbolički ekvilibrijum $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}A$ jednadžbe (3.52) je sink. □

Koristeći dobijeni rezultat može se izvesti zaključak i o globalnoj stabilnosti.

Teorem 3.4.4. *Ako je $E = f + \frac{3}{4}A^2$, tada je pozitivni ekvilibrijum $\bar{x}_2 = \bar{x}_+ = \frac{3}{2}A$ globalno asimptotski stabilan na $(0, +\infty)$.*

Dokaz. Za detalje vidjeti [10]. □

3.5 KAM metod

Ovdje ćemo posmatrati specijalnu klasu preslikavanja koja imaju osobinu da čuvaju površinu (v.[8]).

Definicija 3.5.1. *Za preslikavanje $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kažemo da je preslikavanje koje čuva površinu ako njegova Jakobijeva matrica J_F zadovoljava uvjet*

$$\det J_F(x) = 1$$

za sve $x \in \mathbb{R}^2$.

U slučaju linearnog preslikavanja $x \mapsto Ax$, uvjet za očuvanje površine je ekvivalentan sa

$$\det A = 1.$$

Budući da je determinanta kvadratne matrice jednaka proizvodu njenih svojstvenih vrijednosti λ_1 i λ_2, posljednji uvjet je ekvivalentan sa

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Ovaj uvjet dovodi nas do tri, kvalitativno različita, slučaja:

1. Sedlo: λ_1 i λ_2 su realni brojevi istog znaka i vrijedi: $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.
2. Parabolički: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ili $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
3. Eliptički: λ_1 i λ_2 su konjugovano-kompleksni brojevi i $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Slučaj sedla je hiperbolički i na osnovu linearizacije se može ustanoviti nestabilnost. Linearizacija, takodjer, daje informacije o lokalnoj stabilnosti i nestabilnosti mnogostrukosti. Ostala dva slučaja su nehiperbolička i linearizacija ne dovodi do takvih rezultata. Eliptički slučaj je jedan od najfrekventnijih slučajeva koji se susreću u nekim konzervativnim mehaničkim sistemima i koji pokazuju neku stabilnost i vrlo komplicirane dinamike. Stabilnost takve tačke ekvilibrijuma se ustanovljuje pojednostavljivanjem nelinearnih članova i upotrebom koordinatnih transformacija i njihovim prevođenjem u tzv. normalni oblik, na osnovu čega se onda stabilnost (ili nestabilnost) može neposredno ustanoviti.

Par (x, y) se može poistovijetiti sa kompleksnim brojem $z = x + iy$. Prisjetimo se da je tada $\overline{z} = x - iy$ i

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2.$$

Zamjenom nezavisnih varijabli x i y sa z i $\overline{z}$, funkcija $F(x, y)$ se može posmatrati kao neka nova funkcija $\hat{F}(z, \overline{z})$:

$$F(x, y) = F(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}) = \hat{F}(z, \overline{z}).$$

Kako bismo izbjegli uvođejenje novih oznaka, koristićemo oznaku $F(z, \overline{z})$ umjesto $\hat{F}(z, \overline{z})$.

Teorem 3.5.1. ***(Birkhoffov normalni oblik)*** *Promatrajmo sistem diferentnih jednadžbi*

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}, \tag{3.62}$$

gdje je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jedno C^n preslikavanje koje čuva površinu, sa eliptičkom fiksnom tačkom u koordinatnom početku i svojstvenim vrijednostima λ i $\overline{\lambda}$. Osim toga, pretpostavimo da postoji prirodni broj $l \in \{4, ..., n+1\}$ takav da je

$$\lambda^k \neq 1 \;\; za \;\; k = 3, 4, ...l.$$

Neka je $r = \left[\frac{l}{2}\right]$ cijeli dio od $\frac{l}{2}$. Tada postoji glatka funkcija $g(z, \overline{z})$ čije derivacije do reda $r-1$ iščezavaju za $z = 0$ i postoji realan polinom

$$\alpha(\omega) = \alpha_1\omega + \alpha_2\omega^2 + ... + \alpha_r\omega^r$$

takav da se preslikavanje F može transformisati u normalan oblik odgovarajućom smjenom kompleksnih koordinata

$$z \mapsto F(z, \overline{z}) = \lambda z e^{i\alpha(z\overline{z})} + g(z, \overline{z}).$$

Tada se pomoću tri transformacije koordinata, koje će biti opisane, sistem (3.62) transformiše u tzv. Birkhoffov normalni oblik:

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_l \\ O_l \end{pmatrix}, \tag{3.63}$$

gdje je

$$\omega = \sum_{k=0}^{M} \gamma_k (r_n^2 + s_n^2)^k, M = \left[\frac{l}{2}\right] - 1, \tag{3.64}$$

i pri čemu O_l označava konvergentni stepeni red po r_n i s_n sa članovima reda većeg ili jednakog l koji se poništavaju zajedno sa njihovim izvodima u koordinatnom početku, a $[x]$ je najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x.

Brojevi $\gamma_1, ..., \gamma_k$ nazivaju se twist koeficijenti.

Koristeći Teorem 3.5.1 možemo ustanoviti glavni rezultat stabilnosti za eliptičku fiksnu tačku, poznat kao KAM teorem (ili Kolmogorov-Arnold-Mosorov teorem).

Teorem 3.5.2. *[8]**(KAM teorem)** Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje koje čuva površinu sa eliptičkom fiksnom tačkom u koordinatnom početku koje zadovoljava uvjete Teorema 3.5.1. Ako polinom $\alpha(|z|^2)$ nije identički jednak nuli, tada je koordinatni početak stabilna tačka ekvilibrijuma. Drugim riječima, ako za neko $k \in \{1, ..., M\}$ imamo da je $\gamma_k \neq 0$ u (3.64), tada je koordinatni početak stabilna fiksna tačka.*

Primjer 3.5.1. *[8] (Mayov host-parazitoidni model) Posmatrajmo sistem*

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{\alpha X_n}{1 + \beta Y_n} \\ Y_{n+1} &= \frac{\beta X_n Y_n}{1 + \beta Y_n}, n = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{3.65}$$

gdje su α i β pozitivni brojevi, a početni uvjeti X_0 i Y_0 su proizvoljni pozitivni brojevi. Ispitati stabilnost pozitivne tačke ekvilibrijuma datog sistema.
Kada je $\alpha \in (1,\infty)$ i $\beta \in (0,\infty)$, ovaj sistem predstavlja specijalan slučaj host-parazitoidnog modela kojeg je istarživao May.

Rješenje. Sistem (3.65) ima nula ekvilibrijum, a za $\alpha > 1$ ima i pozitivni ekvilibrijum $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha-1}{\beta})$. Kako je $f(x,y) = \dfrac{\alpha x}{1+\beta y}$, a $g(x,y) = \dfrac{\beta xy}{1+\beta y}$, to je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\alpha}{1+\beta y}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\alpha\beta x}{(1+\beta y)^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\beta}{1+\beta y}, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\beta x}{(1+\beta y)^2}.$$

Matrica Jakobijana u tački ekvilibrijuma $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha-1}{\beta})$ je

$$J_F\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Odgovarajuća katrakteristična jednadžba je $\alpha\lambda^2-(\alpha+1)\lambda+\alpha = 0$, pa su svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = \dfrac{\alpha+1 \pm \sqrt{(1-\alpha)(3\alpha+1)}}{2\alpha}$. Zbog $\alpha > 1$, svojstvene vrijednosti su konjugovano-kompleksni brojevi za koje vrijedi $|\lambda_{1,2}| = 1$. Dakle, $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha-1}{\beta})$ je nehiperbolički ekvilibrijum eliptičkog tipa.

Zamjenom promjenljivih $x_n = X_n, y_n = \beta Y_n$, sistem (3.65) postaje

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha x_n}{1+y_n} \\ y_{n+1} &= \frac{x_n y_n}{1+y_n}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Zato ćemo u nastavku, bez gubitka općenitosti, smatrati da je $\beta = 1$ i ispitivati ponašanje rješenja sistema (3.66). Eliminacijom x_n na desnoj strani sistema, dobijamo

$$x_{n+1} = \alpha\frac{y_{n+1}}{y_n}, \quad n = 0,1,..., \tag{3.67}$$

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n^2}{(1+y_n)y_{n-1}}, \quad n = 1,2,.... \tag{3.68}$$

U nastavku ćemo, također, pretpostaviti da je $\alpha \geq 1$. Jednadžba (3.68) ima jedinstven pozitivan ekvilibrijum $\overline{y} = \alpha - 1$. Međutim, ova jednadžba ne generiše preslikavanje koje čuva površinu, što možemo zaključiti određivanjem determinante matrice Jakobijana. Zamjenom promjenjivih

$$y_n = (\alpha - 1)e^{u_n},$$

jednadžba (3.68) postaje

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + \ln \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)e^{u_n}}, \tag{3.69}$$

što je ekvivalentno sa preslikavanjem koje čuva površinu

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - v_n + \ln \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)e^{u_n}} \\ v_{n+1} &= u_n, \quad n = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{3.70}$$

Pozitivna tačka ekvilibrijuma $(\alpha, \alpha - 1)$ sistema (3.66) odgovara tački ekvilibrijuma $(0, 0)$ sistema (3.70).

Linearizirana jednadžba, pridružena jednadžbi (3.69) za tačku $(0, 0)$, glasi

$$z_{n+1} - \frac{\alpha + 1}{\alpha} z_n + z_{n-1} = 0, n = 1, 2, ... \tag{3.71}$$

Odgovarajuća karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 - \frac{\alpha + 1}{\alpha}\lambda + 1 = 0,$$

ima dva konjugovano-kompleksna korijena koji leže na jediničnom disku

$$\lambda_\pm = \frac{\alpha + 1}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{(1 - \alpha)(3\alpha + 1)}}{2\alpha}.$$

Dakle, nula je eliptička tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.69). Kako bismo odredili karakter stabilnosti nula ekvilibrijuma, koristićemo KAM teoriju. Postupak se svodi na određivanje Birkhoffove normalne forme sistema (3.70). To se postiže uzastopnom primjenom sljedeće tri transformacije (v.[8]).

Prva transformacija

Linearna zamjena promjenljivih

$$\begin{aligned} u_n &= x_n + y_n \\ v_n &= \overline{\lambda} x_n + \lambda y_n \end{aligned} \tag{3.72}$$

transformiše sistem (3.70) u

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n - \tfrac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left((\lambda - 1)^2 (x_n + y_n) - \lambda \ln \tfrac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)e^{x_n + y_n}} \right) \\ y_{n+1} &= \overline{\lambda} y_n + \tfrac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left((\overline{\lambda} - 1)^2 (x_n + y_n) - \overline{\lambda} \ln \tfrac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)e^{x_n + y_n}} \right) \end{aligned} \tag{3.73}$$

za $n = 0, 1, ...$ Razvijanjem funkcije $\ln \frac{\alpha}{1+(\alpha-1)e^{x_n+y_n}}$ po stepenima od $x_n + y_n$ i zadržavanjem članova do trećeg reda u razvoju, dobijemo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n + \sigma \left(\tfrac{(x_n+y_n)^2}{2} - \tfrac{\alpha-2}{\alpha} \tfrac{(x_n+y_n)^3}{3!} \right) + O((x_n + y_n)^4) \\ y_{n+1} &= \overline{\lambda} y_n + \overline{\sigma} \left(\tfrac{(x_n+y_n)^2}{2} - \tfrac{\alpha-2}{\alpha} \tfrac{(x_n+y_n)^3}{3!} \right) + O((x_n + y_n)^4), \end{aligned} \tag{3.74}$$

za $n = 0, 1, ...,$ gdje je

$$\sigma = \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}.$$

Druga transformacija

Zamjenom promjenljivih

$$\begin{aligned} x_n &= \xi_n + \phi_2(\xi_n, \eta_n) + \phi_3(\xi_n, \eta_n) \\ y_n &= \eta_n + \psi_2(\xi_n, \eta_n) + \psi_3(\xi_n, \eta_n), \end{aligned} \tag{3.75}$$

pri čemu je

$$\phi_k(\xi_n, \eta_n) = \sum_{m=0}^{k} a_{km} \xi_n^{k-m} \eta_n^m \quad i \quad \psi_k(\xi_n, \eta_n) = \sum_{m=0}^{k} \overline{a_{km}} \xi_n^m \eta_n^{k-m}, \qquad k = 2, 3$$

i

$$\begin{aligned} a_{20} &= \tfrac{-1}{(\lambda-1)(\lambda-\overline{\lambda})} \tfrac{\alpha-1}{2\alpha^2} \\ a_{21} &= \tfrac{\lambda}{(\lambda-1)(\lambda-\overline{\lambda})} \tfrac{\alpha-1}{\alpha^2} \\ a_{22} &= \tfrac{-\lambda}{(\overline{\lambda}^2-\lambda)(\lambda-\overline{\lambda})} \tfrac{\alpha-1}{2\alpha^2} \\ a_{30} &= \tfrac{-\lambda}{(\lambda^2-1)^2} \tfrac{\alpha-1}{\alpha} (a_{20} + \overline{a_{22}} - \tfrac{\alpha-2}{5\alpha}) \\ a_{31} &= 0 \\ a_{32} &= \tfrac{\lambda^3}{(\lambda^2-1)^2} \tfrac{\alpha-1}{\alpha^2} (a_{22} + \overline{a_{20}} + 2Re(a_{21}) - \tfrac{\alpha-2}{2\alpha}) \\ a_{33} &= \tfrac{-\lambda}{(\lambda^2-1)(\overline{\lambda}^4-1)} \tfrac{\alpha-1}{\alpha^2} (a_{22} + \overline{a_{20}} - \tfrac{\alpha-2}{6\alpha}) \end{aligned}$$

sistem (3.74) postaje

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \lambda \xi_n + \alpha_2 \xi_n^2 \eta_n + O_4(\xi_n, \eta_n) \\ \eta_{n+1} &= \overline{\lambda} \eta_n + \overline{\alpha}_2 \xi_n \eta_n^2 + O_4(\xi_n, \eta_n), \end{aligned} \tag{3.76}$$

gdje je

$$\alpha_2 = \frac{\alpha - 1}{2\alpha(2\alpha + 1)} \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\sqrt{(\alpha - 1)(3\alpha + 1)}} \right),$$

a $O_4(\xi_n, \eta_n)$ je izraz koji sadrži članove najmanje četvrtog stepena od ξ_n i η_n. Koeficijenti $a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{30}, ...$ određuju se pomoću metoda neodređenih koeficijenata, zamjenom (3.75) i (3.76) u (3.74) i izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće članove, do 3. stepena.

Treća transformacija

Zamjenom promjenljivih

$$\begin{aligned} \xi_n &= r_n + is_n \\ \eta_n &= r_n - is_n, \end{aligned} \tag{3.77}$$

sistem (3.76) se transformiše u

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \zeta_1 r_n - \zeta_2 s_n + O_4(r_n, s_n) \\ s_{n+1} &= \zeta_2 r_n + \zeta_1 s_n + O_4(r_n, s_n) \end{aligned} \tag{3.78}$$

za $n = 0, 1, ...$, gdje je $O_4(r_n, s_n)$ izraz koji sadrži članove najmanje četvrtog stepena po r_n i s_n i

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= Re(\lambda) + Re(\alpha_2)(r_n^2 + s_n^2) \\ \zeta_2 &= Im(\lambda) + Im(\alpha_2)(r_n^2 + s_n^2). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Osim toga, (3.78) se može zapisati kao

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \cos\omega r_n - \sin\omega s_n + O_4(r_n, s_n) \\ s_{n+1} &= \sin\omega r_n + \cos\omega s_n + O_4(r_n, s_n), \end{aligned} \tag{3.80}$$

gdje je

$$\omega = \gamma_0 + \gamma_1(r_n^2 + s_n^2)$$

i

$$\cos\gamma_0 = Re(\lambda) \quad \text{i} \quad \gamma_1 = \frac{-1}{\sin\gamma_0} Re(\alpha_2) \tag{3.81}$$

Koeficijenti γ_0 i γ_1 su twist koeficijenti i mogu se odrediti izjednačavanjem formula (3.78) i (3.80) i razvijanjem (3.78) po stepenima od $r_n^2 + s_n^2$, zadržavajući članove najviše 3. reda u razvoju. Sistem (3.80) je Birkhoffov normalni oblik za sistem (3.70) i dok twist koeficijenti, dati sa (3.81), nisu svi jednaki nuli, polinom

$$\omega(|z|^2) = \gamma_0 + \gamma_1 |z|^2$$

nije identički jednak nuli oko ishodišta. Prema tome, primjenom KAM teorema, zaključujemo da je ishodište stabilna tačka ekvilibrijuma za sistem (3.70).

■

3.5.1 Primjer primjene KAM metoda na jednadžbu $x_{n+1} = \frac{Ax_n^3+B}{ax_{n-1}}$

Uz pomoć KAM metoda, ovdje ćemo ispitati stabilnost pozitivne eliptičke tačke ekvilibrijuma diferentne jednadžbe

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^3 + B}{ax_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.82}$$

pri čemu su parametri A, B, a, kao i početni uvjeti x_{-1}, x_0 pozitivni brojevi. Specifičnost ove jednadžbe ogleda se u tome što za nju nismo bili u mogućnosti pronaći invarijantu i na taj način doći do zaključka o stabilnosti rješenja (v.[15]).

Jednadžba (3.82) je specijalan slučaj jednadžbe

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^k + B}{ax_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.83}$$

gdje je k fiksan broj iz skupa $\{1, 2, 3, ...\}$. Specijalan slučaj jednadžbe (3.83), za $k = 1, A = a = 1$, je Lynessova jednadžba, koja je razmatrana u Sekciji 2.3 ovog rada ili jednadžba

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + F}{ex_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.84}$$

koja je razmatrana u [6]. Ove jednadžbe su razmatrane ili pomoću KAM teorije ili kombinacijom algebarskih i geometrijskih tehnika.

Zamjenom

$$x_n = \sqrt{\frac{B}{a}} w_n,$$

jednadžba (3.82) postaje

$$w_{n+1} = \frac{\frac{A}{a}\sqrt{\frac{B}{a}} w_n^3 + 1}{w_{n-1}},$$

odnosno (za $\alpha = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{B}{a}}$)

$$w_{n+1} = \frac{\alpha w_n^3 + 1}{w_{n-1}}. \tag{3.85}$$

Tačke ekvilibrijuma jednadžbe (3.85) su pozitivna rješenja jednadžbe

$$\overline{w} = \frac{\alpha \overline{w}^3 + 1}{\overline{w}},$$

odnosno

$$\alpha \overline{w}^3 - \overline{w}^2 + 1 = 0. \tag{3.86}$$

Stavimo $g(w) = \alpha w^3 - w^2 + 1$. Očigledno je da funkcija g ima lokalni maksimum $g_{max} = 1$ za $w = 0$ i lokalni minimum za $w = \frac{2}{3\alpha}$. Također, vidimo da jednadžba (3.86):

a) nema pozitivnih korijena ako je $g(\frac{2}{3\alpha}) > 0$, ili, što je ekvivalentno, ako je $\alpha > \frac{2}{3\sqrt{3}}$

b) ima jedan pozitivan korijen ako je $g(\frac{2}{3\alpha}) = 0$, ili, što je ekvivalentno, ako je $\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

c) ima dva pozitivna korijena ako je $g(\frac{2}{3\alpha}) < 0$, ili, što je ekvivalentno, ako je $0 < \alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Ovo, zapravo, znači da jednadžba (3.85):

a_1) nema pozitivnih tačaka ekvilibrijuma za $\alpha > \frac{2}{3\sqrt{3}}$

b_1) ima jedinstven pozitivan ekvlibrijum $E = E_1 = E_2 = \sqrt{3}$ za $\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

c_1) ima dvije pozitivne tačke ekvilibrijuma E_1 i E_2 ($1 < E_1 < \frac{2}{3\alpha}$ i $E_2 > \frac{2}{3\alpha} > \sqrt{3}$) za $0 < \alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Ovdje ćemo pokazati da je tačka ekvilibrijuma $E = E_1$ za $0 < \alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ eliptička tačka preslikavanja koje čuva površinu, jer svojstvene vrijednosti matrice Jakobijana $J_T(E_1)$ su čisto imaginarni konjugovano-kompleksni brojevi λ i $\overline{\lambda}$. To znači da jednadžba (3.85) ima vrlo specifičnu dinamiku i da je upravo KAM teorija odgovarajući alat za ispitivanje dinamike ove jednadžbe, jer ćemo pokazati da je preslikavanje T, koje odgovara jednadžbi (3.85), preslikavanje koje čuva površinu.

Teorem 3.5.3. *[15]*

i) Ako je $\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, jednadžba (3.85) ima jedinstvenu pozitivnu tačku ekvilibrijuma $E_{nh} = \sqrt{3}$, koja je nehiperbolička paraboličkog tipa.

ii) Ako je $\alpha \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$, tada jednadžba (3.85) ima dvije pozitivne tačke ekvilibrijuma :

a) $E = E_1, 1 < E < \frac{2}{3\alpha}$, koja je nehiperbolička eliptičkog tipa i koja je stabilna

b) $E_2 > \frac{2}{3\alpha} > \sqrt{3}$, koja je sedlo.

Dokaz. Za tačku ekvilibrijuma E jednadžbe (3.85) i $0 < \alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, koristićemo zamjenu

$$\begin{aligned} x_n &= \ln \tfrac{w_n}{E} \\ y_n &= x_{n-1}, \end{aligned}$$

koja jednadžbu (3.85) transformiše u sistem

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= -y_n + \ln(\alpha E^3 e^{3x_n} + 1) - 2\ln E \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}\right\} n = 0, 1, ... \tag{3.87}$$

Tada se tačka ekvilibrijuma E transformiše u $(0, 0)$.

Preslikavanje T, koje odgovara sistemu (3.87), ima oblik

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + \ln(\alpha E^3 e^{3x} + 1) - 2\ln E \\ x \end{pmatrix},$$

dok matrica Jakobijana preslikavanja T u tački (x, y) ima oblik

$$J_T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha E^3 e^{3x}}{\alpha E^3 e^{3x} + 1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nije teško zaključiti da je

$$\det J_T(x, y) = 1,$$

to jest, preslikavanje T je preslikavanje koje čuva površinu. To znači da možemo primijeniti KAM teoriju na sistem (3.87).

Primijetimo da je

$$J_0 = J_T(0, 0) = \begin{pmatrix} 3\alpha E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba u tački $(0, 0)$ je

$$\lambda^2 - 3\alpha E\lambda + 1 = 0,$$

sa karakterističnim korijenima

$$\lambda = \frac{3\alpha E + \sqrt{9\alpha^2 E^2 - 4}}{2}, \quad \overline{\lambda} = \frac{3\alpha E - \sqrt{9\alpha^2 E^2 - 4}}{2}.$$

Za ekvilibrijum $E = E_1 = E_2 = \sqrt{3}$, kada je $\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, imamo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (E je nehiperbolički ekvilibrijum paraboličkog tipa). U ovom slučaju ne možemo primijeniti KAM teoriju. Ako je $0 < \alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, tada za ekvilibrijum $E = E_1 < E_2$, imamo da je $E_1 < \frac{2}{3\alpha}$, što implicira da je $4 - 9\alpha^2 E_2^2 > 0$ i

$$\lambda(E_2) = \frac{3\alpha E_2 + i\sqrt{4 - 9\alpha^2 E_2^2}}{2}, \quad \overline{\lambda}(E_2) = \frac{3\alpha E_2 - i\sqrt{4 - 9\alpha^2 E_2^2}}{2}.$$

To znači da je E nehiperbolički ekvilibrijum eliptičkog tipa i u ovom slučaju možemo primijeniti KAM teoriju.

Slično, za ekvilibrijum E_2 imamo da je $E_2 > \frac{2}{3\alpha}$, što implicira da je $4-9\alpha^2E_3^2 < 0$ i

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{3\alpha E_3 + \sqrt{9\alpha^2E_3^2-4}}{2} > \frac{3\alpha E_3}{2} > 1\\ \overline{\lambda} &= \frac{3\alpha E_3 - \sqrt{9\alpha^2E_3^2-4}}{2} < \frac{3\alpha E_3}{2} < 1,\end{aligned}$$

pa je ekvilibrijum E_2 sedlasta tačka.

Sada ćemo primijeniti KAM teoriju za ekvilibrijum $E = E_1, E_1 < \frac{2}{3\alpha}, \alpha \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$. Očigledno je $|\lambda(E)| = 1, (\lambda(E))^3 \neq 1, (\lambda(E))^4 \neq 1$ za $\alpha \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$. Ustvari,

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{9}{2}\alpha^2E^2 - 1 + \frac{3}{2}i\alpha E\sqrt{4-9\alpha^2E^2},\\ \lambda^3 &= \frac{9}{2}\alpha E(3\alpha^2E^2-1) + \frac{1}{2}i(3\alpha E-1)(3\alpha E+1)\sqrt{4-9\alpha^2E^2},\\ \lambda^4 &= \frac{1}{2}(81\alpha^4E^4 - 36\alpha^2E^2+3) + \frac{3}{2}\alpha E(9\alpha^2E^2-2)i\sqrt{4-9\alpha^2E^2}.\end{aligned}$$

Ako je $3\alpha E - 1 = 0$, tada je jasno da je $\lambda^3 = -1$, i slično, ako je $9\alpha^2E^2 - 2 = 0$, tada $\lambda^4 = -1$.

Dakle, pretpostavke Teorema 3.5.1 su zadovoljene za $l = 4$ i mi ćemo pronaći Birkhoffov normalni oblik za sistem (3.87), koristeći niz transformacija koje smo ranije opisali.

Prva transformacija:

Primijetimo da je matrica lineariziranog sistema u ishodištu

$$J_0 = \begin{pmatrix} 3\alpha E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dok matrica pripadajućih svojstvenih vektora, koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima λ i $\overline{\lambda}$ matrice J_0, je

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \overline{\lambda} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Da bismo dobili Birkhoffov normalni oblik za sistem (3.87), desnu stranu jednadžbi sistema (3.87) ćemo razviti u okolini tačke ekvilibrijuma $(0,0)$ do reda $l-1=3$, pa ćemo dobiti

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \tfrac{3(E-1)(E+1)}{E^2}x_n - y_n + \tfrac{9(E-1)(E+1)}{2E^4}(x_n^2 + \tfrac{2-E^2}{E^2}x_n^3) + O_4,\\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned} \tag{3.88}$$

Smjenom promjenljivih

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ \overline{\lambda} u_n + \lambda v_n \end{pmatrix},$$

sistem (3.88) postaje

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda u_n + \sigma((u_n+v_n)^2 + \tfrac{2-E^2}{E^2}(u_n+v_n)^3) + O_4, \\ v_{n+1} &= \overline{\lambda} v_n + \overline{\sigma}((u_n+v_n)^2 + \tfrac{2-E^2}{E^2}(u_n+v_n)^3) + O_4, \end{aligned} \tag{3.89}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} \cdot \frac{9(E-1)(E+1)}{2E^4} = \frac{\frac{3\alpha E + i\sqrt{4-9\alpha^2E^2}}{2}}{i\sqrt{4-9\alpha^2E^2}} \cdot \frac{9\alpha}{2E} \\ &= \tfrac{9\alpha}{4E\sqrt{4-9\alpha^2E^2}}(\sqrt{4-9\alpha^2E^2} - 3iE\alpha). \end{aligned}$$

Druga transformacija:

Cilj druge transformacije je da se dobiju nelinearni članovi do reda $l-1$ u normalnoj formi. Zamjenom promjenljivih

$$u_n = \xi_n + \sum_{k=0}^{2} a_{2k}\xi_n^{2-k}\eta_n^k + \sum_{k=0}^{3} a_{3k}\xi_n^{3-k}\eta_n^k \tag{3.90}$$

$$v_n = \eta_n + \sum_{k=0}^{2} \overline{a_{2k}}\xi_n^{k}\eta_n^{2-k} + \sum_{k=0}^{3} \overline{a_{3k}}\xi_n^{k}\eta_n^{3-k}, \tag{3.91}$$

pri čemu je

$$a_{20} = \frac{\sigma}{\lambda(\lambda-1)}, \quad a_{21} = \frac{2\sigma}{1-\lambda}, \quad a_{22} = \frac{\sigma}{\overline{\lambda}^2 - \lambda},$$

$$a_{20} = \frac{\frac{9\alpha}{E\sqrt{4-9\alpha^2E^2}}\left(-\sqrt{4-9\alpha^2E^2} - i(3\alpha E - 2)\right)}{-4(3E\alpha - 2)},$$

$$a_{21} = \frac{\frac{9\alpha}{E\sqrt{4-9\alpha^2E^2}}}{-2(3\alpha E - 2)}\left(\sqrt{4-9\alpha^2E^2} - i(3\alpha E - 2)\right),$$

$$a_{22} = \frac{\frac{9\alpha}{2E\sqrt{4-9\alpha^2E^2}}\left(\sqrt{4-9\alpha^2E^2}(3\alpha E - 1) - 3i(3\alpha E + 1)(\alpha E - \frac{2}{3})\right)}{-2(3\alpha E - 2)(3\alpha E + 1)},$$

$$\begin{aligned} a_{20}+\overline{a_{22}} &= \frac{9\alpha}{2E(3\alpha E-2)(3\alpha E+1)}, \\ a_{21}+\overline{a_{21}} &= \frac{9\alpha}{E(2-3\alpha E)}, \end{aligned}$$

sistem (3.89) se svodi na oblik

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= (\lambda\xi_n+\alpha_2\xi_n^2\eta_n)+O_4 \\ \eta_{n+1} &= (\overline{\lambda}\eta_n+\overline{\alpha}_2\xi_n\eta_n^2)+O_4 \end{aligned} \tag{3.92}$$

gdje je

$$\alpha_2 = 2(a_{21}+\overline{a_{21}})\sigma+2(a_{20}+\overline{a_{22}})\sigma+(1-2E\alpha)\sigma.$$

Koristeći činjenicu da je $\alpha=\frac{E^2-1}{E^3}$, dobijamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\alpha_2) &= \left(\frac{18\alpha}{E(2-3\alpha E)}+\frac{9\alpha}{E(3\alpha E-2)(3\alpha E+1)}+\frac{2-E^2}{E^2}\right)\left(\frac{9\alpha}{4E}\right) \\ &= \frac{-9(E-1)(E+1)(2E^6+20E^4-39E^2+18)}{2E^6(4E^2-3)(E^2-3)}. \end{aligned}$$

Treća transformacija:

Zamjenom promjenljivih

$$\begin{aligned} \xi_n &= r_n+is_n \\ \eta_n &= r_n-is_n, \end{aligned}$$

sistem (3.92) se transformiše u

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mu_1 r_n-\mu_2 s_n+O_4 \\ s_{n+1} &= \mu_2 r_n+\mu_1 s_n+O_4 \end{aligned} \tag{3.93}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathrm{Re}(\lambda)+\mathrm{Re}(\alpha_2)(r_n^2+s_n^2) \\ \mu_2 &= \mathrm{Im}(\lambda)+\mathrm{Im}(\alpha_2)(r_n^2+s_n^2). \end{aligned}$$

Kako sistem (3.93) može biti zapisan u obliku

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \cos\omega r_n-\sin\omega s_n+O_4 \\ s_{n+1} &= \sin\omega r_n+\cos\omega s_n+O_4, \end{aligned} \tag{3.94}$$

gdje je

$$\omega=\gamma_0+\gamma_1(r_n^2+s_n^2)$$

to za twist koeficijente γ_0 i γ_1 dobijemo

$$\cos\gamma_0=\mathrm{Re}(\lambda)=\frac{3\alpha E}{2}=\frac{3(E-1)(E+1)}{2E^2}\in(0,1) \quad \text{i} \quad \gamma_1=-\frac{\mathrm{Re}(\alpha_2)}{\sin\gamma_0}.$$

Sistem (3.94) je Birkhoffova normalna forma sistema (3.88). Kako $1 < E < \frac{2}{3\alpha}$ implicira

$$\begin{aligned} 2E^6 + 20E^4 - 39E^2 + 18 &= (20E^4 - 40E^2 + 20) + E^2 + 2(E^6 - 1) \\ &= 20(E-1)^2(E+1)^2 + E^2 + 2(E^6 - 1) > 0, \end{aligned}$$

zaključujemo da je $\gamma_1 \neq 0$. Prema tome, polinom

$$\alpha(|z|^2) = \gamma_0 + \gamma_1 |z|^2 = \omega$$

nije identički jednak nuli u ishodištu, pa je tačka ekvilibrijuma $E = E_1$, prema KAM teoremu, stabilna za $\alpha \in (0, \frac{2}{3\sqrt{3}})$.

□

3.6 Neimark-Sackerova bifurkacija

U ovoj sekciji pažnju ćemo usmjeriti na bifurkacije dvodimenzionalnih preslikavanja kada su svojstvene vrijednosti konjugovano-kompleksni brojevi na jediničnom krugu (v.[2],[8]). Posmatrajmo linearni sistem

$$z_{n+1} = \rho \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} z_n. \tag{3.95}$$

Kako parametar ρ prolazi kroz 1, ovaj sistem prolazi specifičnu bifurkaciju (promjena u globalnom ponašanju) sljedećeg tipa: za $\rho \neq 1$ ne postoji invarijanta (osim trivijalne, koja je zadovoljena u fiksnoj tački), dok za $\rho = 1$ postoji jednoparametarska familija invarijanti, koje su zatvorene krive. U nelinearnom slučaju, pandan ovom fenomenu je tzv. bifurkacija dvostrukog perioda, koja je, također, poznata kao Andronov-Hopfova ili Neimark-Sackerova bifurkacija.

Dakle, Neimark-Sackerova bifurkacija se pojavljuje u diskretnim dinamičkim sistemima koji ovise o parametru ρ, sa fiksnom tačkom čiji Jakobijan ima par konjugovano-kompleksnih svojstvenih vrijednosti $\mu(\rho)$ i $\overline{\mu(\rho)}$ na jediničnoj kružnici.

Sada ćemo razmotriti jedan ilustrativan primjer.

Primjer 3.6.1. *[8] Posmatrajmo sistem*

$$x_{n+1} = (\rho - x_n^2 - y_n^2) \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} x_n. \tag{3.96}$$

Ispitati stabilnost tačke ekvilibrijuma.

Rješenje. Ishodište je tačka ekvilibrijuma ovog sistema za sve vrijednosti parametra ρ. Linearizirani sitem u okolini ishodišta je sistem (3.95). Matrica Jakobijana u ishodištu je

$$J(0,0) = \rho \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

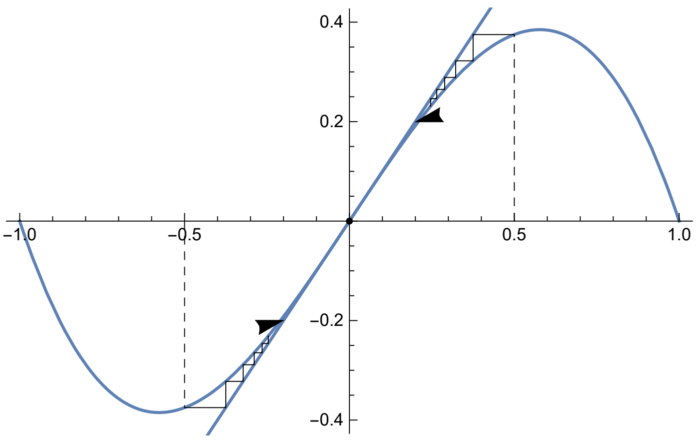
pa su svojstvene vrijednosti $\mu_{1,2}(\rho) = \rho e^{\pm i\omega}$. Stoga, za $\rho = 1$, svojstvene vrijednosti pripadaju jediničnoj kružnici, što je jasan znak pojave Neimark-Sackerove bifurkacije. Očigledno, ishodište je asimptotski stabilna tačka ako je $-1 < \rho < 1$.

Da bismo istražili bifurkacije, transformisaćemo sistem u polarne koordinate. Ako stavimo $x_n = r_n \cos\theta_n, y_n = r_n \sin\theta_n$, imaćemo

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \rho r_n - r_n^3 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo sistem sa razdvojenim varijablama, za kojeg je očigledno da postoji invarijantna kružnica radijusa $r = \sqrt{\rho - 1}$. Dakle, ova invarijantna kružnica se pojavljuje kada ρ prolazi kroz vrijednost 1.

Kad je $\rho = 1$, preslikavanje $r \mapsto r - r^3$ je jednodimenzionalno i stabilnost se može ispitati pomoću metoda iz prve sekcije, pa se da zaključiti da je ishodište asimptotski stabilno i u ovom slučaju.



Slika 3.2: Za $\rho = 1$ dijagram paukove mreže za jednodimenzionalno preslikavanje $r \mapsto r - r^3$ pokazuje da je 0 asimptotski stabilan ekvilibrijum

Kako ρ raste i postaje veće od 1, ishodište gubi stabilnost i stvara jednu atraktivnu (asimptotski stabilnu) kružnicu radijusa $r = \sqrt{\rho - 1}$. Dinamika na ovoj kružnici je određena preslikavanjem $\theta \mapsto \theta + \omega$, što je rotacija za ugao ω u smjeru suprotnom kretanju kazaljki na satu. ■

Teorem 3.6.1. *[8] Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i*

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\lambda, x) \longmapsto F(\lambda, x)$$

neka četiri puta neprekidno-diferencijabilna funkcija, koja zadovoljava sljedeće uvjete.

(i) $F(\lambda, 0) = 0$ *za svako* λ *u blizini neke fiksne tačke* λ_0.

(ii) Jakobijan $J_F(\lambda, 0)$ *funkcije F od x, ima dvije konjugovano-kompleksne svojstvene vrijednosti* $\mu(\lambda)$ *i* $\overline{\mu(\lambda)}$, *za svako* λ *u blizini* λ_0 *i* $|\mu(\lambda_0)| = 1$.

(iii) $\frac{d}{d\lambda}|\mu(\lambda)| = d(\lambda_0) \neq 0$ *za* $\lambda = \lambda_0$.

(iv) $\mu^k(\lambda_0) \neq 1$ *za* $k = 1, 2, 3, 4$.

Tada postoji glatka funkcija $\mathcal{F}(\lambda, x)$, *tako da je za svako* $\lambda \in U_{\lambda_0}$

$$F(\lambda, x) = \mathcal{F}(\lambda, x) + O(\|x^5\|),$$

pri čemu je funkcija $\mathcal{F}(\lambda, x)$ *u polarnim koordinatama data sa*

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mu(\lambda)|r - a(\lambda)r^3 \\ \theta + \omega(\lambda) + b(\lambda)r^2 \end{pmatrix}. \tag{3.97}$$

Ovdje su $a(\lambda), b(\lambda)$ *i* $\omega(\lambda)$ *glatke funkcije sa sljedećim osobinama.*

(a) Ako je $a(\lambda_0) > 0$ *i* $d(\lambda_0) > 0$ $(d(\lambda_0) < 0)$, *tada postoji okolina U ishodišta i* $\delta > 0$ *tako da za* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ *i* $x_0 \in U$, ω*-granični skup od* x_0 *je ishodište, ako je* $\lambda < \lambda_0$ $(\lambda > \lambda_0)$, *a pripada zatvorenoj invarijantnoj* C^1 *krivoj* $\Gamma(\lambda)$ *koja okružuje ishodište za* $\lambda > \lambda_0$ $(\lambda < \lambda_0)$. *Pored toga,* $\Gamma(\lambda_0) = 0$.

(b) Ako je $a(\lambda_0) < 0$ *i* $d(\lambda_0) > 0$ $(d(\lambda_0) < 0)$, *tada postoji okolina U ishodišta i* $\delta > 0$ *tako da za* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ *i* $x_0 \in U$, α*-granični skup od* x_0 *je ishodište ako je* $\lambda > \lambda_0$ $(\lambda < \lambda_0)$, *a pripada zatvorenoj invarijantnoj* C^1 *krivoj* $\Gamma(\lambda)$ *koja okružuje ishodište za* $\lambda < \lambda_0$ $(\lambda > \lambda_0)$. *Pored toga,* $\Gamma(\lambda_0) = 0$.

3.6.1 Primjer primejene Neimark-Sackerove bifurkacije na jednu homogenu racionalnu diferentnu jednadžbu 2. reda s kvadratnim članovima

U ovom dijelu ćemo ispitivati lokalni i globalni karakter tačaka ekvilibrijuma, kao i egzistenciju periodičnih rješenja minimalnog perioda dva, jednadžbe

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n^2 + Bx_nx_{n-1} + Cx_{n-1}^2}{ax_n^2 + bx_nx_{n-1} + cx_{n-1}^2}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.98}$$

gdje su parametri A, B, C, a, b, c pozitivni brojevi i pri čemu su početni uvjeti x_{-1} i x_0 proizvoljni nenegativni brojevi takvi da je $x_{-1} + x_0 > 0$ (v. [4]).

Očigledno je da jednadžba (3.98) ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = \frac{A+B+C}{a+b+c}$. Ako stavimo

$$f(u, v) = \frac{Au^2 + Buv + Cv^2}{au^2 + buv + cv^2},$$

tada će linearizirana jednadžba pridružena jednadžbi (3.98), za tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$, biti oblika

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1},$$

gdje je

$$p = -q = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{Ab - Ba + 2(Ac - Ca) + Bc - Cb}{(A + B + C)(a + b + c)}.$$

Teorem 3.6.2. *[4] Jednadžba (3.98) ima jedinstven pozitivan ekvilibrijum.*

i) Ako je

$$A(a + 3b + 5c) + B(-a + b + 3c) > C(3a + b - c)$$

i

$$A(c - a) < (2a + b)B + (3a + 2b + c)C,$$

tada je tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilna.

ii) Ako je $A(a+3b+5c)+B(-a+b+3c) < C(3a+b-c)$, tada je tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ sedlasta tačka.

iii) Ako je $A(c - a) > (2a + b)B + (3a + 2b + c)C$, tada je tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ repeler.

iv) Ako je $A(a + 3b + 5c) + B(-a + b + 3c) = C(3a + b - c)$, tada je tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ nehiperbolička, sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_{1,2} \in \{-1, \frac{1}{2}\}$. A ako je $A(c-a) = (2a+b)B + (3a+2b+c)C$, tada je $\bar{x}$ nehiperbolička tačka ekvilibrijuma sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Dokaz. Karakteristična jednadžba za tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ ima oblik

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0. \tag{3.99}$$

i) Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ je lokalno asimptotski stabilna, ako vrijedi

$$|p| < 1 - q < 2 \Leftrightarrow |p| < 1 + p < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < p < 1$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A(a + 3b + 5c) + B(-a + b + 3c) > C(3a + b - c) \\ \wedge \\ A(c - a) < (2a + b)B + (3a + 2b + c)C \end{array} \right\}$$

ii) Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ je sedlo, ako vrijedi

$$\begin{aligned}\{|p| > |1-q| \wedge p^2 + 4q > 0\} \quad &\Leftrightarrow \quad \{p^2 > (1+p)^2 \wedge p(p-4) > 0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{p < -\tfrac{1}{2} \wedge p(p-4) > 0\right\},\end{aligned}$$

to jest,

$$p < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A(a+3b+5c) + B(-a+b+3c) < C(3a+b-c).$$

iii) Ekvilibrijum je repeler ako je

$$\begin{aligned}\{|p||1-q| \wedge |q| > 1\} \quad &\Leftrightarrow \quad \{p^2 < (1+p)^2 \wedge |p| > 1\} \Leftrightarrow \{p > -\tfrac{1}{2} \wedge |p| > 1\} \\ &\Leftrightarrow \quad p > 1 \Leftrightarrow A(c-a) > (2a+b)B + (3a+2b+c)C.\end{aligned}$$

iv) Ekvilibrijum $\bar{x}$ je nehiperbolički ako je

$$\{|p| = |1-q| \vee (q = -1 \wedge |p| \leq 2)\} \Leftrightarrow (p = -\frac{1}{2} \vee p = 1)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A(a+3b+5c) + B(-a+b+3c) = C(3a+b-c) \\ \vee \\ A(c-a) = (2a+b)B + (3a+2b+c)C \end{array} \right\}.$$

Ako je $p = 1$, to jest, ako je $A(c-a) = (2a+b)B + (3a+2b+c)C$, tada karakteristična jednadžba (3.99) postaje

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Ako je $p = -\frac{1}{2}$, to jest, ako je $A(a+3b+5c) + B(-a+b+3c) = C(3a+b-c)$, karakteristična jednadžba (3.99) ima oblik

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0,$$

čije su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

□

Promatrajmo, sada, jednadžbu (3.98) kada je $B = C = 0$ i pretpostavimo da je $A = 1$, to jest, promatrajmo jednadžbu

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{ax_n^2 + bx_nx_{n-1} + cx_{n-1}^2}. \tag{3.100}$$

Ova jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = \dfrac{1}{a+b+c}$.

Lema 3.6.1. *[4] Ako je $a > c$, tada je tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilna. Ako je $a = c$, tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ nehiperbolički sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. A ako je $a < c$, tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ repeler.*

Razmotrimo, sada, bifurkaciju fiksne tačke preslikavanja pridruženog jednadžbi (3.100), u slučaju kada su svojstvene vrijednosti konjugovano-kompleksni brojevi koji leže na jediničnoj kružnici. Ovdje ćemo koristiti Teorem 3.6.1.

Neka je $F(\lambda, x)$ preslikavanje koje ima fiksnu tačku u koordinatnom početku sa kompleksnim svojstvenim vrijednostima $\mu(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$ i $\overline{\mu(\lambda)} = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$ za koje vrijedi $(\alpha(\lambda))^2 + (\beta(\lambda))^2 = 1$ i $\beta(\lambda) \neq 0$. Da bismo mogli linearni dio ovog preslikavanja staviti u Jordanovu kanonsku formu, možemo pretpostaviti da je F, u blizini ishodišta, oblika

$$F(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & -\beta(\lambda) \\ \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(\lambda, x_1, x_2) \\ g_2(\lambda, x_1, x_2) \end{pmatrix}. \tag{3.101}$$

Tada je koeficijent $a(\lambda_0)$ u jednakosti (3.97), u polarnim koordinatama, jednak

$$a(\lambda_0) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1 - 2\mu(\lambda_0))\overline{\mu(\lambda_0)}^2}{1 - \mu(\lambda_0)} \xi_{11}\xi_{20} \right) + \frac{1}{2}|\xi_{11}|^2 + |\xi_{02}|^2 - \mathrm{Re}\left(\overline{\mu(\lambda_0)}\xi_{21} \right), \tag{3.102}$$

pri čemu je

$$\xi_{20} = \frac{1}{8}(A + iB), \tag{3.103}$$

gdje je

$$A = \frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$B = \frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\xi_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_2^2} + i\left(\frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_2^2} \right) \right), \tag{3.104}$$

$$\xi_{02} = \frac{1}{8}(C + iD), \tag{3.105}$$

pri čemu je

$$C = \frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$D=\frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 g_2(0,0)}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 g_1(0,0)}{\partial x_1\partial x_2}$$

i

$$\xi_{21}=\frac{1}{16}(E+iF) \tag{3.106}$$

gdje je

$$E=\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_2^3},$$
$$F=\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1\partial x_2^2}-\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^2\partial x_2}-\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_2^3}.$$

Teorem 3.6.3. *[4] Neka je*

$$a_0=c \quad i \quad \bar{x}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Tada postoji okolina U tačke ekvilibrijuma $\bar{x}$ i $a,\rho>0$ tako da za $|a-a_0|<\rho$ i $x_{-1},x_0\in U$, ω-granični skup rješenja jednadžbe (3.100), sa početnim uvjetima x_{-1},x_0, je tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ ako je $a>a_0$ i pripada zatvorenoj invarijantnoj C^1 krivoj $\Gamma(a)$ koja okružuje $\bar{x}$ ako je $a<a_0$. Osim toga, $\Gamma(a_0)=0$.

Dokaz. Kako bismo primijenili Teorem 3.6.1, uvodimo smjenu promjenljivih $y_n=x_n-\bar{x}$. Tada je nova jednadžba data sa

$$y_{n+1}=\frac{(y_n+\bar{x})^2}{a(y_n+\bar{x})^2+b(y_n+\bar{x})(y_{n-1}+\bar{x})+c(y_{n-1}+\bar{x})^2}-\bar{x}.$$

Stavimo $u_n=y_{n-1}$ i $v_n=y_n$ za $n=0,1,\ldots$. Tada će prethodna jednadžba biti ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= \frac{(v_n+\bar{x})^2}{a(v_n+\bar{x})^2+b(u_n+\bar{x})(v_n+\bar{x})+c(u_n+\bar{x})^2}-\bar{x} \end{aligned}. \tag{3.107}$$

Neka je F funkcija definisana sa

$$F(u,v)=\begin{pmatrix} v \\ \dfrac{(v+\bar{x})^2}{a(v+\bar{x})^2+b(u+\bar{x})(v+\bar{x})+c(u+\bar{x})^2}-\bar{x}\end{pmatrix}.$$

Tada $F(u,v)$ ima jedinstvenu fiksnu tačku $(0,0)$ i Jakobijan matrica preslikavanja $F(u,v)$ je data sa

$$J_F(u,v)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R & S\end{pmatrix},$$

gdje je

$$\begin{aligned} R &= \frac{-(bv+2cu+b\bar{x}+2c\bar{x})(v+\bar{x})^2}{(buv+2av\bar{x}+bu\bar{x}+bv\bar{x}+2cu\bar{x}+av^2+cu^2+a\bar{x}^2+b\bar{x}^2+c\bar{x}^2)^2}, \\ S &= \frac{(bv+2cu+b\bar{x}+2c\bar{x})(v+\bar{x})(u+\bar{x})}{(buv+2av\bar{x}+bu\bar{x}+bv\bar{x}+2cu\bar{x}+av^2+cu^2+a\bar{x}^2+b\bar{x}^2+c\bar{x}^2)^2}, \end{aligned}$$

i

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(b+2c)}{a+b+c} & \frac{b+2c}{a+b+c} \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $J_F(0,0)$ su $\mu(a)$ i $\overline{\mu(a)}$:

$$\mu_{\pm}(a) = \frac{b+2c \pm i\sqrt{(b+2c)(4a+3b+2c)}}{2(a+b+c)}.$$

Kako je $\mu(a) = \alpha(a) + i\beta(a)$ i $\overline{\mu(a)} = \alpha(a) - i\beta(a)$, imamo da je

$$\alpha(a) = \frac{b+2c}{2(a+b+c)} \quad \text{i} \quad \beta(a) = \frac{\sqrt{(b+2c)(4a+3b+2c)}}{2(a+b+c)}.$$

Pretpostavimo da preslikavanje $F(u,v)$ u blizini ishodišta ima oblik

$$F(a,u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(b+2c)}{a+b+c} & \frac{b+2c}{a+b+c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(a,u,v) \\ f_2(a,u,v) \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{pmatrix} v \\ \frac{(v+\bar{x})^2}{a(v+\bar{x})^2+b(u+\bar{x})(v+\bar{x})+c(u+\bar{x})^2} - \bar{x} \end{pmatrix} = F(a,u,v), \tag{3.108}$$

odakle je

$$\begin{aligned} f_1(a,u,v) &= 0, \\ f_2(a,u,v) &= \frac{(v+\bar{x})^2}{a(v+\bar{x})^2+b(u+\bar{x})(v+\bar{x})+c(u+\bar{x})^2} - \bar{x} + \frac{b+2c}{a+b+c}u - \frac{b+2c}{a+b+c}v \end{aligned}.$$

Neka je $a_0 = c$. Za $a = a_0$ dobijamo

$$\bar{x} = \frac{1}{b+2c} \quad \text{i} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice $J_F(0,0)$ su $\mu_{\pm}(a_0) = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, dok svojstveni vektori, koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\mu(a_0)$ i $\overline{\mu(a_0)}$, su $v(a_0)$ i $\overline{v(a_0)}$, gdje je

$$v(a_0) = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, 1 \right).$$

Primijetimo da je

$$|\mu(a_0)| = 1, \mu(a_0) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \mu^2(a_0) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mu^3(a_0) = -1, \mu^4(a_0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Za $a = a_0$ i $\bar{x} = \frac{1}{b+2c}$, (3.108) ima oblik

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix},$$

gdje je

$$h_1(u,v) = f_1(a,u,v) = 0$$

i

$$\begin{aligned} h_2(u,v) &= f_2(a,u,v) \\ &= \frac{(bu + cu + cv + 2bcuv + +bcu^2 + bcv^2 + b^2uv + 2c^2u^2 + 2c^2v^2)(u-v)}{bu + bv + 2cu + 2cv + 2bcuv + bcu^2 + bcv^2 + b^2uv + +2c^2u^2 + 2c^2v^2 + 1}. \end{aligned}$$

Stoga (za $a = a_0$), sistem (3.107) ekvivalentan je sa

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(u_n, v_n) \\ h_2(u_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Neka je

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Sada je (3.107) ekvivalentno sa

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} + P^{-1} H \left(P \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \right),$$

gdje je

$$H\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix}.$$

Neka je

$$G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \end{pmatrix} = P^{-1}H\left(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right).$$

Sada, ako stavimo $u_1 = u(b+2c)+1$, $v_1 = (b+2c)(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\sqrt{3})+1$, onda je

$$g_1(u,v) = \frac{1}{2}v\sqrt{3} - \frac{1}{b+2c} - \frac{1}{2}u + \frac{u_1^2}{cu_1^2 + cv_1^2 + bu_1v_1},$$

$$g_2(u,v) = -\frac{\sqrt{3}}{3}g_1(u,v).$$

Direktnim računom dobijamo

$$(g_1)_{uu} = -\frac{b+3c}{2}, (g_1)_{uv} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, (g_1)_{vv} = \frac{3}{2}(b+c),$$

$$(g_1)_{uuu} = \frac{3}{4}(b+4c)(b+2c), (g_1)_{uuv} = \frac{\sqrt{3}}{4}b(b+2c),$$

$$(g_1)_{uvv} = -\frac{3}{4}(b+4c)(b+2c), (g_1)_{vvv} = -\frac{9\sqrt{3}}{4}b(b+2c),$$

$$(g_2)_{uu} = \frac{\sqrt{3}(b+3c)}{6}, (g_2)_{uv} = -\frac{1}{2}c, (g_2)_{vv} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c),$$

$$(g_2)_{uuu} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(b+4c)(b+2c), (g_2)_{uuv} = -\frac{1}{4}b(b+2c),$$

$$(g_2)_{uvv} = \frac{\sqrt{3}}{4}(b+4c)(b+2c), (g_2)_{vvv} = \frac{9}{4}b(b+2c)$$

i, osim toga,

$$\begin{aligned} \xi_{20} &= -\tfrac{1}{4}(b+2c-i\tfrac{\sqrt{3}}{3}b), \xi_{11} = b(1-i\tfrac{\sqrt{3}}{3}), \\ \xi_{02} &= \tfrac{1}{4}\left(-(b+c)+i\tfrac{\sqrt{3}}{3}(b+3c)\right), \\ \xi_{21} &= \tfrac{(b+2c)b}{8}(1+i\sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(\lambda_0) &= \mathrm{Re}\left[\left(i\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{3}{2}\right)\left(1-i\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\tfrac{b}{4}\left(b+2c-i\tfrac{\sqrt{3}}{3}b\right)\right]+\tfrac{2}{3}b^2\\
&+ \tfrac{1}{12}(b^2+3bc+3c^2)-\mathrm{Re}\left(\frac{(b+2c)b}{4}\right)\\
&= \tfrac{b}{4}(b+2c)+\tfrac{2}{3}b^2+\tfrac{1}{12}(b^2+3bc+3c^2)=\tfrac{1}{4}(3bc+4b^2+c^2)>0.
\end{aligned}$$

Možemo uočiti da je

$$|\mu(a)|=\alpha^2(a)+\beta^2(a)=\frac{(b+2c)^2}{4(a+b+c)^2}+\frac{(b+2c)(4a+3b+2c)}{4(a+b+c)^2}=\frac{b+2c}{a+b+c},$$

pa je onda

$$\left(\frac{d}{da}|\mu(a)|\right)_{a=a_0}=\left(\frac{d}{da}\left(\frac{b+2c}{a+b+c}\right)\right)_{a=a_0}=\left(\frac{-(b+2c)}{(a+b+c)^2}\right)_{a=a_0}=\frac{-1}{b+2c}<0.$$

Dakle, sve pretpostavke Teorema 3.6.1 su ispunjene, pa tačnost tvrdnje Teorema 3.6.3 slijedi direktno. □

3.7 Metod monotonih preslikavanja

U ovoj sekciji biće prikazana primjena Metoda monotonih preslikavanja na jednadžbu

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{ax_n^2+ex_{n-1}+f},\qquad n=0,1,..., \tag{3.109}$$

gdje su parametri a, e i f nenegativni brojevi sa $a+e+f>0$, a početni uvjeti x_{-1}, x_0 su proizvoljni nenegativni brojevi, koji zadovoljavaju uvjet $x_{-1}+x_0>0$ (v.[5]).

Prije svega, navešćemo nekoliko razultata koji vrijede za diferentnu jednadžbu drugog reda u općem slučaju.

Teorem 3.7.1. *Neka je I skup realnih brojeva i $f : I\times I\to I$ funkcija, koja je nerastuća po prvoj varijabli i neopadajuća po drugoj varijabli. Tada, za svako rješenje $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ jednadžbe*

$$x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1}),\qquad x_{-1},x_0\in I,\qquad =0,1,... \tag{3.110}$$

podnizovi $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{x_{2n-1}\}_{n=0}^{\infty}$, parnih i neparnih članova rješenja zadovoljavaju tačno jedan od uvjeta:

(i) oba su eventualno rastući,

(ii) oba su eventualno opadajući,

(iii) jedan od njih je monotono rastući, dok je drugi monotono opadajući.

Posljedica Teorema 3.7.1 je da svako ograničeno rješenje jednadžbe (3.110) konvergira ekvilibrijumu ili rješenju perioda dva ili tački na granici gdje jednadžba nije definirana.

Razmotrimo parcijalno uredjenje $\preceq$ na $\mathbb{R}^2$. Za dvije tačke $x, y \in \mathbb{R}^2$ reći ćemo da su u relaciji ako je $x \preceq y$ ili $y \preceq x$. Također, stroga nejednakost između tačaka može biti definisana kao $x \prec y$ i $x \neq y$.

Neka je preslikavanje T, $T : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ na nepraznom skupu $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ neprekidna funkcija. Preslikavanje T je monotono ako iz $x \preceq y$ slijedi $T(x) \preceq T(y)$, za sve $x, y \in \mathcal{R}$, a preslikavanje T je strogo monotono na $\mathcal{R}$ ako $x \prec y$ implicira $T(x) \prec T(y)$, za sve $x, y \in \mathcal{R}$. Očigledno, biti u realciji je invarijanta pod iteracijom strogo monotonog preslikavanja.

Mi ćemo ovdje koristiti *jugo-istočno (se)* uređenje definirano sa $(x_1, y_1) \preceq_{se} (x_2, y_2)$ ako je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \geq y_2$. Za preslikavanje T, definirano na nepraznom skupu $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, koje je monotono u odnosu na SE uređenje, kažemo da je kompetitivno preslikavanje.

Neka je T diferncijabilno preslikavanje na nepraznom skupu $\mathcal{A}$. Dovoljan uvjet da T bude strogo monotono u odnosu na jugo-istočno uređenje je da Jakobijan matrica u tački x ima sljedeću znakovnu konfiguraciju

$$sign(J_T(x)) = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}.$$

Za $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ i $x \in \mathbb{R}^2$, definišemo rastojanje x od $\mathcal{A}$ kao $dist(x, \mathcal{A}) := \inf\{\|x - y\| : y \in \mathcal{A}\}$.

Za $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, sa $\mathcal{Q}_l(x_1, x_2)$, $l = 1, 2, 3, 4$ označićemo četiri uobičajena kvadranta, npr. $\mathcal{Q}_1(x_1, x_2) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2\}$.

Bazen privlačenja fiksne tačke $(\bar{x}, \bar{y})$ preslikavanja T, u oznaci $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}))$, definisaćemo kao skup svih početnih tačaka (x_0, y_0) za koje niz iteracija $T^n((x_0, y_0))$ konvergira ka $(\bar{x}, \bar{y})$. Slično definiramo i bazen privlačenja periodične tačke perioda p.

Teorem 3.7.2. *Neka je T kompetitivno preslikavanje na pravouglom području $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^2$. Neka je $\bar{x} \in \mathcal{R}$ fiksna tačka preslikavanja T tako da je $\Delta := \mathcal{R} \cap int(\mathcal{Q}_1(\bar{x}) \cup \mathcal{Q}_3(\bar{x}))$ neprazan i neka je T strogo kompetitivno preslikavanje na Δ. Pretpostavimo da su sljedeće tvrdnje tačne.*

(a) Preslikavanje T ima C^1 produženje u nekoj okolini tačke $\bar{x}$.

(b) Jakobijan $J_T(\bar{x})$ preslikavanja T u $\bar{x}$ ima svojstvene vrijednosti λ, μ, tako da je $0 < |\lambda| < \mu$, pri čemu je $|\lambda| < 1$, a svosjtveni prostor E^λ, koji zavisi od λ, nije nijedna od koordinatnih osa.

Tada postoji kriva $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ kroz $\bar{x}$ koja je invarijantna i postoji podskup bazena privlačenja tačke $\bar{x}$, tako da je $\mathcal{C}$ tangencijalna kriva svojstvenog prostora E^{λ} tačke $\bar{x}$, i $\mathcal{C}$ je graf strogo rastuće neprekidne funkcije po prvoj koordinati na nekom intervalu. Bilo koja krajnja tačka krive $\mathcal{C}$ u untrašnjosti skupa $\mathcal{R}$ je ili fiksna tačka ili tačka minimalnog perioda dva. U posljednjem slučaju, skup krajnjih tačaka krive $\mathcal{C}$ je orbita minimalnog perioda dva preslikavanja T.

Teorem 3.7.3. *(A) Neka su zadovoljene pretpostavke Teorema 3.7.2 i neka je $\mathcal{C}$ kriva čija je egzsitencija obezbijeđena u Teoremu 3.7.2. Ako krajnje tačke krive $\mathcal{C}$ pripadaju $\partial\mathcal{R}$, tada $\mathcal{C}$ dijeli $\mathcal{R}$ na dvije povezane komponente:*

$$\mathcal{W}_{-} := \{x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C} : \exists y \in \mathcal{C}, x \preceq_{se} y\} \text{ i}$$

$$\mathcal{W}_{+} := \{x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C} : \exists y \in \mathcal{C}, y \preceq_{se} x\},$$

tako da vrijedi:

(i) $\mathcal{W}_{-}$ je invarijantno i $dist(T^n(x), \mathcal{Q}_2(\bar{x})) \to 0$, kada $n \to \infty$ za svako $x \in \mathcal{W}_{-}$;

(ii) $\mathcal{W}_{+}$ je invarijantno i $dist(T^n(x), \mathcal{Q}_4(\bar{x})) \to 0$, kada $n \to \infty$ za svako $x \in \mathcal{W}_{+}$.

(B) Ako je, pored pretpostavki iz (A), $\bar{x}$ unutrašnja tačka od $\mathcal{R}$ i T je iz C^2 strogo kompetitivno preslikavanje u okolini tačke $\bar{x}$, tada T nema periodičnih tačaka na granici skupa $\mathcal{Q}_1(\bar{x}) \cup \mathcal{Q}_3(\bar{x})$ osim $\bar{x}$ i vrijede sljedeće tvrdnje.

(iii) Za svako $x \in \mathcal{W}_{-}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $T^n(x) \in \mathcal{Q}_2(\bar{x})$ za $n \geq n_0$.

(iv) Za svako $x \in \mathcal{W}_{+}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $T^n(x) \in \mathcal{Q}_4(\bar{x})$ za $n \geq n_0$.

Ako je T preslikavanje na skupu $\mathcal{R}$ i ako je $\bar{x}$ fiksna tačka preslikavanja T, stabilni skup $\mathcal{W}^s(\bar{x})$ od $\bar{x}$ je skup $\{x \in \mathcal{R} : T^n(x) \to \bar{x}\}$, dok je nestabilni skup $\mathcal{W}^u(\bar{x})$ od $\bar{x}$ skup $\{x \in \mathcal{R} : \exists \{x_n\}_{n=-\infty}^{0} \subset \mathcal{R}, T(x_n) = x_{n+1}, x_0 = x, \lim\limits_{n \to -\infty} x_n = \bar{x}\}$.

Teorem 3.7.4. *Uz pretpostavke Teorema 3.7.3, dio (B), neka je još $\mu > 1$ i svojstveni prostor E^{μ}, koji zavisi od μ, nije niti jedna od koordinatnih osa. Ako kriva $\mathcal{C}$ iz Teorema 3.7.2 ima krajnje tačke u $\partial\mathcal{R}$, tada je $\mathcal{C}$ stabilni skup $\mathcal{W}^s(\bar{x})$ od $\bar{x}$, a nestabilni skup $\mathcal{W}^u(\bar{x})$ od $\bar{x}$ je kriva u $\mathcal{R}$ koja je tangencijalna kriva za prostor E^{μ} od $\bar{x}$ i takva da je ona graf strogo opadajuće funkcije po prvoj koordinati na nekom intervalu. Bilo koja krajnja tačka skupa $\mathcal{W}^u(\bar{x})$ u $\mathcal{R}$ je fiksna tačka preslikavanja T.*

Odredimo, sada, tačke ekvilibrijuma jednadžbe (3.109). One zadovoljavaju jednadžbu

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{a\bar{x}^2 + e\bar{x} + f}, \tag{3.111}$$

odnosno

$$\bar{x}(a\bar{x}^2 + e\bar{x} + f - 1) = 0,$$

odakle slijedi

$$\bar{x} = 0 \quad \text{ili} \quad a\bar{x}^2 + e\bar{x} + f - 1 = 0.$$

Stoga, vrijedi

(i) Nula ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ postoji za sve vrijednosti parametara.

(ii) Ako je $f \geq 1$, tada nema pozitivnih tačaka ekvilbrijuma.

(iii) Ako je $f < 1$, tada postoji pozitivna tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_+ = \frac{1}{2a}(-e + \sqrt{e^2 - 4a(f-1)})$.

Ako uvedemo oznaku

$$h(u, v) = \frac{v}{au^2 + ev + f},$$

tada jednadžbi (3.109) možemo pridružiti lineariziniranu jednadžbu:

$$z_{n+1} = pz_n + qz_{n-1},$$

gdje je

$$p = \frac{\partial h}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{-2a\bar{x}^2}{(a\bar{x}^2 + e\bar{x} + f)^2}, \quad q = \frac{\partial h}{\partial v}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{a\bar{x}^2 + f}{(a\bar{x}^2 + e\bar{x} + f)^2}.$$

Ako je $\bar{x} \neq 0$, iz (3.111), dobijamo:

$$p = -2a\bar{x}^2 \quad \text{i} \quad q = a\bar{x}^2 + f.$$

Sljedeća dva rezultata slijede iz standardne analize lokalne stabilnosti.

Propozicija 3.7.1. *[5]*

(i) Ako je $f > 1$, tada je ekvilibrijum, $\bar{x} = 0$, lokalno asimptotski stabilan.

(ii) Ako je $f = 1$, tada je ekvilibrijum, $\bar{x} = 0$, nehiperbolički.

(iii) Ako je $f < 1$, tada je ekvilibrijum, $\bar{x} = 0$, repeler.

Dokaz. Kako je $p = \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = 0$ i $q = \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = \frac{1}{f}$, to su, u tački ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$, svojstvene vrijednosti $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{f}}$, odakle slijedi tačnost navedenih tvrdnji. □

Propozicija 3.7.2. *[5] Neka je $f < 1$.*

(a) Za $a < \frac{3e^2}{4(1-f)}$, tačka ekvilibrijuma $\bar{x}_+$ je lokalno asimptotski stabilna.

(b) Za $a = \frac{3e^2}{4(1-f)}$*, tačka ekvilibrijuma* $\bar{x}_+$ *je nehiperbolička.*

(c) Za $a > \frac{3e^2}{4(1-f)}$*, tačka ekvilibrijuma* $\bar{x}_+$ *je sedlasta tačka.*

Dokaz. (a) Prvo ćemo provjeriti uvjete za lokalnu asimptotsku stabilnost:
1°

$$\begin{aligned}|p| < 1 - q &\Leftrightarrow 2a\bar{x}^2 < 1 - a\bar{x}^2 - f\\ &\Leftrightarrow 3(2e^2 - 2e\sqrt{e^2 - 4a(f-1)} - 4a(f-1)) < 0\\ &\Leftrightarrow 3e\sqrt{e^2 - 4a(f-1)} > 3e^2 - 4a(f-1)\\ &\Leftrightarrow (1-f)(3e^2 - 4a(1-f)) > 0\\ &\Leftrightarrow a < \frac{3e^2}{4(1-f)}.\end{aligned}$$

2° $1 - q < 2 \Leftrightarrow 1 - a\bar{x}^2 - f < 2 \Leftrightarrow -a\bar{x}^2 - 1 + f < 0$,
što je zadovoljeno za $f < 1$.
(b) Sada ćemo provjeriti uvjete pod kojima je ekvilibrijum $\bar{x}_+$ nehiperbolički:

$$|p| = |1 - q| \Leftrightarrow 2a\bar{x}^2 = |1 - a\bar{x}^2 - f| \Rightarrow (1 - a\bar{x} - f)^2 = 4a^2\bar{x}^4$$

$$\Leftrightarrow 1 - f - 3a\bar{x}^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3e^2}{4(1-f)}.$$

(c) Konačno, provjerićemo uvjete pod kojima je $\bar{x}_+$ sedlasta tačka:

$$|p| > |1 - q| \Leftrightarrow -2a\bar{x}^2 < 1 - a\bar{x}^2 - f < 2a\bar{x}^2.$$

Kako je $-a\bar{x}^2 - 1 + f < 0$ za $f < 1$, dobijamo

$$1 - a\bar{x}^2 - f < 2a\bar{x}^2 \Leftrightarrow -3e^2 + 3e\sqrt{e^2 - 4a(f-1)} + 4a(f-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (f-1)(3e^2 + 4a(f-1)) > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3e^2}{4(1-f)},$$

što je uvijek zadovoljeno. □

Sada ćemo prezentovati egzistenciju i lokalnu stabilnost rješenja minimalnog perioda dva jednadžbe (3.109).

Teorem 3.7.5. *[5] Pretpostavimo da je* $f < 1$*.*

(i) Jednadžba (3.109) ima rješenja minimalnog perioda dva

$$\left\{0, \frac{1-f}{e}, 0, \frac{1-f}{e}, ...\right\} \quad i \quad \left\{\frac{1-f}{e}, 0, \frac{1-f}{e}, 0, ...\right\},$$

za sve pozitivne vrijednosti parametara a i e.

(ii) Ako je $\frac{3e^2}{4(1-f)} < a < \frac{e^2}{1-f}$*, tada jednadžba (3.109) ima rješenja minimalnog perioda dva*

$$\{\phi, \psi, \phi, \psi, ...\} \quad i \quad \{\psi, \phi, \psi, \phi, ...\} \quad (\phi \neq \psi, \phi > 0, \psi > 0),$$

pri čemu je

$$\phi = \frac{1}{2a}\left(e + \sqrt{4a(1-f) - 3e^2}\right), \quad \psi = \frac{1}{2a}\left(e - \sqrt{4a(1-f) - 3e^2}\right).$$

Smjenom $x_{n-1} = u_n, x_n = v_n$, jednadžba (3.109) prelazi u sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= \frac{u_n}{av_n^2 + eu_n + f}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Preslikavanje T, pridruženo sistemu (3.112), je oblika

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ h(u,v) \end{pmatrix},$$

gdje je $h(u,v) = \dfrac{u}{av^2 + eu + f}$. Druga iteracija preslikavanja T je

$$T^2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} v \\ h(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(u,v) \\ h(v, h(u,v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(u,v) \\ H(u,v) \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$H(u,v) = \frac{v}{ah^2(u,v) + ev + f},$$

i preslikavanje T^2 je kompetitivno.

Teorem 3.7.6. *[5] Pretpostavimo da je* $f < 1$.

(i) Orbite mimimalnog perioda dva $\{0, \frac{1-f}{e}, 0, \frac{1-f}{e}, ...\}$ *i* $\{\frac{1-f}{e}, 0, \frac{1-f}{e}, 0, ...\}$ *preslikavanja* T *su*

a. lokalno asimptotski stabilne, ako je $a > \frac{e^2}{1-f}$,

b. nehiperboličke, za $a = \frac{e^2}{1-f}$,

c. sedlasta tačka, ako je $a < \frac{e^2}{1-f}$.

(ii) Ako je $\frac{3e^2}{4(1-f)} < a < \frac{e^2}{1-f}$*, tada su orbite minimalnog perioda dva preslikavanja* T *date sa*

$$\{\phi, \psi, \phi, \psi, ...\} \quad i \quad \{\psi, \phi, \psi, \phi, ...\} \quad (\phi \neq \psi, \phi > 0, \psi > 0), \tag{3.113}$$

pri čemu ϕ *i* ψ *zadovoljavaju (3.113), lokalno asimptotski stabilne.*

Sada ćemo navesti tvrdnje koje govore o globalnoj dinamici nehiperboličkog ekvilibrijuma. Za ostale slučajeve pogledati [5].

Lema 3.7.1. *[5] Pretpostavimo da je $f < 1$. Tada*

(a) $\lim_{n\to\infty} T^{2n}(b,0) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right)$, $\lim_{n\to\infty} T^{2n+1}(b,0) = \left(0, \frac{1-f}{e}\right)$ *za svako $b > 0$.*

(b) $\lim_{n\to\infty} T^{2n}(0,c) = \left(0, \frac{1-f}{e}\right)$, $\lim_{n\to\infty} T^{2n+1}(0,c) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right)$, *za svako $c > 0$.*

Teorem 3.7.7. *[5] Ako je $f < 1$ i $a = \frac{3e^2}{4(1-f)}$, tada jednadžba (3.109) ima dvije tačke ekvilibrijuma: $\bar{x}_0 = 0$, koja je repeler i $\bar{x}_+ = \frac{1}{2a}(-e + \sqrt{e^2 - 4a(f-1)})$, koja je nehiperbolička tačka, i, također, ima rješenja minimalnog perioda dva $(0, \frac{1-f}{e})$ i $(\frac{1-f}{e}, 0)$, koje su sedlaste tačke. Bazen privlačenja $\mathcal{B}((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ tačke $(\bar{x}_+, \bar{x}_+)$ je skup*

$$\mathcal{B}((\bar{x}_+, \bar{x}_+)) = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$$

i

(i) ako je $x_{-1} = 0$ i $x_0 > 0$, onda je $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{1-f}{e}$;

(ii) ako je $x_{-1} > 0$ i $x_0 = 0$, onda je $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{1-f}{e}$ i $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$.

Dokaz. Prema Lemi 3.7.1, jasno je da je stabilna mnogostrukost tačke $(0, \frac{1-f}{e})$ u odnosu na preslikavanje T^2

$$\mathcal{W}^s\left(0, \frac{1-f}{e}\right) = \{(x,y) : x = 0, y > 0\},$$

dok je stabilna mnogostrukost tačke $(\frac{1-f}{e}, 0)$

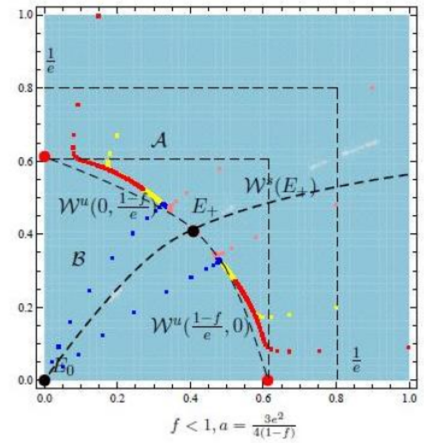
$$\mathcal{W}^s\left(\frac{1-f}{e}, 0\right) = \{(x,y) : x > 0, y = 0\},$$

i svaka od ovih mnogostrukosti je jedinstvena. Nestabilni skup $\mathcal{W}^u(0, \frac{1-f}{e})$ je kriva u $\mathcal{R}$, koja je graf strogo opadajuće funkcije po prvoj koordinati, na nekom intervalu. Krajnja tačka skupa $\mathcal{W}^u(0, \frac{1-f}{e})$ u $\mathcal{R}$ je fiksna tačka $(\bar{x}_+, \bar{x}_+)$. Egzistencija skupa $\mathcal{W}^u(0, \frac{1-f}{e})$ sa navedenim svojstvima slijedi iz Teorema 3.7.4 . Slično, nestabilni skup $\mathcal{W}^u(\frac{1-f}{e}, 0)$ je kriva u $\mathcal{R}$ takva da je ona graf strogo opadajuće funkcije po prvoj koordinati na nekom intervalu, čija krajnja tačka u $\mathcal{R}$ je, također, fiksna tačka $(\bar{x}_+, \bar{x}_+)$. Neka je, sada, $\mathcal{A} = (0, \frac{1}{e}) \times (0, \frac{1}{e})$ i $\mathcal{B} = (0, \frac{1-f}{e}) \times (0, \frac{1-f}{e})$. Kako je $\mathcal{A}$

atraktivan skup, druga iteracija $T^2(u_0, v_0)$ je unutar skupa $\mathcal{A}$. Ako $(u_0, v_0) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, tada postoji $(0, u_y) \in \mathcal{W}^s(0, \frac{1-f}{e})$, $(\frac{1-f}{e} < u_y < \frac{1}{e})$ i $(u_x, 0) \in \mathcal{W}^s(\frac{1-f}{e}, 0)$, $(\frac{1-f}{e} < u_y < \frac{1}{e})$, tako da je

$$(0, u_y) \preceq_{se} (u_0, v_0) \preceq_{se} (u_x, 0).$$

S obzirom da je preslikavanje T^2 kompetitivno, dobijamo



Slika 3.3: Globalna dinamika jednadžbe (3.109) za $f < 1, a = \frac{3e^2}{4(1-f)}$

$$T^2(0, u_y) \preceq_{se} T^2(u_0, v_0) \preceq_{se} T^2(u_x, 0).$$

Induktivnim zaključivanjem, slijedi

$$T^{2n}(0, u_y) \preceq_{se} T^{2n}(u_0, v_0) \preceq_{se} T^{2n}(u_x, 0), \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(0, u_y) = \left(0, \frac{1-f}{e}\right) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_x, 0) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right),$$

imamo da je $T^{2n}(u_0, v_0)$ eventualno unutar $\mathcal{B}$. Za $(u, v) \in \mathcal{B}$ postoje $(u_{u_1}, v_{u_1}) \in \mathcal{W}^u(0, \frac{1-f}{e})$ i $(u_{u_2}, v_{u_2}) \in \mathcal{W}^u(\frac{1-f}{e}, 0)$, tako da je

$$(u_{u_1}, v_{u_1}) \preceq_{se} (u, v) \preceq_{se} (u_{u_2}, v_{u_2}),$$

i za koje vrijedi

$$T^{2n}(u_{u_1}, v_{u_1}) \preceq_{se} T^{2n}(u, v) \preceq_{se} T^{2n}(u_{u_2}, v_{u_2}).$$

Kako je $(0,0)$ repeler i

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_{u_1}, v_{u_1}) = (\bar{x}_+, \bar{x}_+) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_{u_2}, v_{u_2}) = (\bar{x}_+, \bar{x}_+),$$

to, onda, mora biti

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u, v) = (\bar{x}_+, \bar{x}_+).$$

To znači da, ako je $x_{-1} > 0$ i $x_0 > 0$, onda

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(x_{-1}, x_0) = (\bar{x}_+, \bar{x}_+),$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}_+.$$

□

Teorem 3.7.8. *[5] Ako je $f < 1$ i $a = \frac{e^2}{1-f}$, tada jednadžba (3.109) ima dvije tačke ekvilibrijuma: $\bar{x}_0 = 0$, koja je repeler i $\bar{x}_+ = \frac{1}{2a}(-e + \sqrt{e^2 - 4a(1-f)})$, koja je unutrašnja sedlasta tačka, i, također, ima rješenja minimalnog perioda dva $(0, \frac{1-f}{e})$ i $(\frac{1-f}{e}, 0)$, koje su nehiperboličke tačke. Nadalje, postoji skup $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} = [0,\infty) \times [0,\infty)$, tako da je $(\bar{x}_0, \bar{x}_0) = (0,0) \in \mathcal{C}$, i $\mathcal{W}^s((\bar{x}_+, \bar{x}_+)) = \mathcal{C} \setminus (0,0)$ je invarijantan podskup bazena privlačenja tačke $(\bar{x}_+, \bar{x}_+)$. Skup $\mathcal{C}$ je graf strogo rastuće neprekidne funkcije po prvoj varijabli na nekom intervalu i razlaže $\mathcal{R} \setminus (0,0)$ na dvije povezane i invarijantne komponente $\mathcal{W}_-((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ i $\mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ za koje vrijedi*

(i) ako je $(x_{-1}, x_0) \in \mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$, onda je $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \dfrac{1-f}{e}$;

(ii) ako je $(x_{-1}, x_0) \in \mathcal{W}_-((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$, onda je $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \dfrac{1-f}{e}$ i $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$.

Dokaz. Egzistencija skupa $\mathcal{C}$ je obezbijeđena na osnovu Teorema 3.7.2 i 3.7.3. Pretpostavimo da $(u_0, v_0) \in \mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$.

Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{Q}_4((\bar{x}_+, \bar{x}_+)) \cap \mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$. Ako $(u_0, v_0) \in \mathcal{G}$, tada postoji $(u_u, v_u) \in \mathcal{W}^u((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ i $(v_x, 0), v_x > \frac{1-f}{e}$, tako da je

$$(u_u, v_u) \preceq_{se} (u_0, v_0) \preceq_{se} (v_x, 0).$$

Preslikavanje T^2 je kompetitivno. Stoga imamo da vrijedi

$$T^2(u_u, v_u) \preceq_{se} T^2(u_0, v_0) \preceq_{se} T^2(v_x, 0).$$

Induktivno, zaključujemo da vrijedi

$$T^{2n}(u_u, v_u) \preceq_{se} T^{2n}(u_0, v_0) \preceq_{se} T^{2n}(v_x, 0), \quad n = 0, 1, ...$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_u, v_u) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} T^{2n}(v_x, 0) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right),$$

to je onda i

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_0, v_0) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right),$$

a to znači da je

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{1-f}{e}.$$

Neka je $\mathcal{F} = \mathcal{Q}_3((\bar{x}_+, \bar{x}_+)) \cap \mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$. Ako $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$, tada postoji $(u_s, v_s) \in \mathcal{W}^s((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ i $(v_x, 0)$, $\frac{1-f}{e} > v_x > 0$, tako da je

$$(u_s, v_s) \preceq_{se} (u_0, v_0) \preceq_{se} (v_x, 0),$$

odakle slijedi da je

$$T^{2n}(u_s, v_s) \preceq_{se} T^{2n}(u_0, v_0) \preceq_{se} T^{2n}(v_x, 0), \quad n = 0, 1, ...$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_s, v_s) = (\bar{x}_+, \bar{x}_+) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} T^{2n}(v_x, 0) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right),$$

to postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je

$$(u_{2n}, v_{2n}) = T^{2n}(u_0, v_0) \in \mathcal{G}, \quad \text{za sve} \quad n \geq N,$$

to jest, sva rješenja, za koje je $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$, eventualno ulaze u $\mathcal{G}$.

Slično, neka je $\mathcal{H} = \mathcal{Q}_1((\bar{x}_+, \bar{x}_+)) \cap \mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$. Ako $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}$, tada postoji $(u_s, v_s) \in \mathcal{W}^s((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ i $(v_x, 0)$, $\frac{1-f}{e} < v_x$, tako da je

$$(u_s, v_s) \preceq_{se} (u_0, v_0) \preceq_{se} (v_x, 0),$$

što implicira da, također, sva rješenja, za koja je $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}$, eventualno ulaze u $\mathcal{G}$. S obzirom na jedinstvenost stabilne mnogostrukosti $\mathcal{W}_+((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$, ne može biti $\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_0, v_0) = (\bar{x}_+, \bar{x}_+)$. Koristeći dokaz za regiju $\mathcal{G}$, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}(u_0, v_0) = \left(\frac{1-f}{e}, 0\right), \quad (u_0, v_0) \in \mathcal{F},$$

to jest,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{1-f}{e}, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0.$$

Dokaz za slučaj kada je $(u_0, v_0) \in \mathcal{W}_-((\bar{x}_+, \bar{x}_+))$ izvodi se analogno. $\square$

Literatura

[1] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations - Third Edition*, Springer, New York, 2005.

[2] S. Elaydi, *Discrete chaos*, Chapman&HALL/CRC, Boca Raton-New York, 2000.

[3] M.Garić-Demirović, M.R.S. Kulenović and M. Nurkanović, Basins of Attraction of Certain Homogeneous Second Order Quadratic Fractional Difference Equation, *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, 13 (1-2)(2015), 35-50.

[4] M.Garić-Demirović, M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Stability, Periodicity and Neimark-Sacker Bifurcation of Ceratin Homogeneous Fractional Difference Equations, *International Journal of Difference Equations*, Vol. 12, No. 1, (2017), 27-53.

[5] S. Jašarević Hrustić, M.R.S. Kulenović and M. Nurkanović, Global Dynamics and Bifurcations of Certain Second Order Rational Difference Equation with Quadratic Terms, *Qualititive Theory of Dynamical Systems*, 15 (1) (2016), 283-307.

[6] S. Jašarević Hrustić, M.R.S. Kulenović, Z. Nurkanović and E. Pilav, Birkhoff normal forms, KAM theory and symmetries for certain second order rational difference equation with quadratic term, *Int. J. Difference Equ.*, 10 (20159, 181-199.

[7] M.R.S. Kulenović and G. Ladas, *Dynamics of second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures*, Chapman&HALL/CRC, Boca Raton-New York, 2001.

[8] M.R.S. Kulenović and O. Merino, *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*, Chapman&HALL/CRC, Boca Raton-London, 2002.

[9] M.R.S. Kulenović, S. Moranjkić, M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Global Asymptotic Stability and Neimark-Sacker Bifurcation of Certain Mix monotone Difference Equation, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2018. Article ID 7052935, 22 pages.

[10] M.R.S. Kulenović, M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Global dynamics of certain mix monotone difference equation via center manifold theory and theory of monotone maps, *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol. 15 (28), N0. 23, (2019), 129-154.

[11] C. Mylona, N. Psarros, G. Papaschinopoulos and c. Schinas, Stability of the Non-Hyperbolic Zero Equilibrium of Two Close-to-Symetric Systems of Difference Equations with Exponential Terms, *Symmetry* **2018**, 10, 188.

[12] M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2018.

[13] M. Nurkanović, *Asimptotsko ponašanje rješenja nekih dvodimenzionalnih sistema diferentnih jednadžbi*, Doktorska disertacija, PMF, Sarajevo, 2002.

[14] M. Nurkanović, *Diskretni dinamički sistemi*, Skripta, PMF, Tuzla, 2022.

[15] M. Nurkanović and Z. Nurkanović, Birkhoff normal forms, KAM theory, periodicity and symmetries for certain rational difference equation with cubic terms, *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol. 12 (25), No. 2, (2016), 217-231.

[16] N. Psarros, G. Papaschinopoulos and C. Schinas, Semistability of two systems of difference equations using centre manifold theory, *Math. Meth. Appl. Sci* **2016**.