UNIVEZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA
13.07.2017. godine

MATEMATIČKA ANALIZA II

ZAVRŠNI ISPIT

I Dio

Granična vrijednost funkcije

1. a) Navesti Cauchyevu definiciju granične vrijednosti funkcije u općenitoj formi. (1b)

   b) Koje su dvije bitne karakteristike ove definicije? (0,5b)

   c) Napisati definiciju za specijalnih slučaj $a = -\infty$ i $b = +\infty$ uz odgovarajuću geometrijsku interpretaciju. (0,5b)

   d) Pokazati da funkcija $\sigma(x) = sgn(x)$ nema granične vrijednosti u tački $x = 0$. (1b)

2. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. (1b)

3. Dokazatti sljedeću tvrdnju: Neka je a tačka gomilanja skupova D_f i D_g, $f(x) \leq g(x)$ za sve $x \in D_f \cap D_g$, tada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$. (1b)

4. Navesti i dokazati Cauchy-Bolzanov kriterij konvergencije funkcija. (2b)

5. a) Objasniti značenja Landauovih simbola o i O. Kad za dvije funkcije kažemo da su istog reda? (1b)

   b) Pokazati da je: 1) $a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad (x \to 0)$, 2) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad (x \to 0)$, (2b)

Neprekidnost

1. Navesti i dokazati teorem neprekidnosti složene funkcije. (2b)

2. a) Navesti sve teoreme koje se odnose na osobine neprekidnih funkcija definiranih na zatvorenom intervalu. (1,5b)

   b) Dokazati teorem koji se odnosi na ograničenost neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu. (2b)

3. Veza između neprekidnosti funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ u tački $a \in D_f$ i neprekidnosti funkcije $|f|$, s o dgovarajućim dokazima, odnosno kontraprimjerima. (1,5b)

4. a) Definicija uniformne neprekidnosti funkcije. (0,5b)

   b) Ispitati uniformnu neprekidnost funkcije $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ na svom domenu. (1,5b)

5. Navesti sve definicije neprekidnosti funkcije u tački. Koje su razlike između definicije neprekidnosti funkcije u tački i Chauchyeve definicije granične vrijednosti funkcije u tački? (1b)

Ime i prezime studenta: ....
Broj indexa: ....