Prof. dr. Mehmed Nurkanović

L I N E A R N A   A L G E B R A (FIZKA)

Pitanja i zadaci za završni dio ispita

(Odgovori na većinu pitanja mogu se naći u knjizi - udžbeniku: M. Nurkanović, O. Kurtanović: *Matematika za ekonomiste*, PrintCom, Tuzla, 2013.)

1. a) Objasniti pojam matrice. Operacije s matricama. Navesti sva odgovarajuća pravila (uvjete pod kojim se određena operacija može izvesti, tekstualno pravilo izvođenja operacije i odgovarajuću formulu).

   b) Osobine skupa svih matrica formata $m \times n$ (pojam vektorskog prostora). Osobine pri množenju matrica.

   c) Navesti definiciju transponirane matrice kao i osobine transponiranja matrice. Naći proizvode $A^T B$ i $A^T B^T$ ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

2. a) Objasniti pojam determinante i navesti razliku između pojmova matrice i determinante.

   b) Objasniti Sarrusovo pravilo i kada se ono može upotrijebiti. Navesti teorem o Laplaceovom razvoju pri izračunavanju determinanti (objasniti pojmove minora i algebarskog komplementa).

   c) Izračunati determinantu: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

3. a) Navesti sve osobine determinanti uz navođenje odgovarajućih primjera.

   b) Koristeći samo osobine determinanti naći vrijednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & -9 & 6 \end{vmatrix}$.

4. a) Definicija inverzne matrice (objasniti detaljno i pojmove kofaktorske i adjungirane matrice).

   b) Osobine inverzne matrice (s dokazima) i formula za izračunavanje inverzne matrice.

   c) Odrediti nepoznatu matricu X iz jednadžbe: $XA = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

5. a) Definicija linearne neovisnosti i linearne ovisnosti matrica.

   b) Ispitati linearnu (ne)ovisnost matrica:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. a) Pojam ranga matrice. Objasniti način izračunavanja ranga matrice.

   b) Odrediti rang matrice: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

7. a) Napisati opći oblik sistema od m linearnih algebarskih jednadžni sa n nepoznanica. Objasniti pojam saglasnosti rješenja tog sistema. Koliko rješenja može imati taj sistem?

   b) Kronecker-Capellijev teorem - formulacija - bez dokaza. Napisati kada sistem ima jedinstveno rješenje i kada nema jedinstveno rješenje.

   c) Dat je sistem algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7. \end{aligned}$$

   Ispitati saglasnost datog sistema i ako je saglasan, riješiti ga Gaussovim i matričnim metodom.

8. a) Cramerov teorem - formulacija i dokaz.

   b) Cramerovim metodom riješiti sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= -3 \\ 5x - 2y + 4z &= 9 \\ 3x - 5y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

9. Pojam homogenog sistema linearnih algebarskih jednadžbi (napisati opći oblik). Objasniti pojam trivijalnog i netrivijalnog rješenja ovog sistema. Kada homogeni sistem ima i netrivijalnih rješenja (odakle to slijedi)?

10. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori kvadratne matrice, karakteristična jednadžba, pojam spektra i spektralnog radijusa (detaljna objašnjenja i izvođenja).