Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Linearne diferentne jednadžbe višeg reda

1. Opća teorija linearnih diferentnih jednadžbi

Definicija 1 ***Linearnom diferentnom jednadžbom*** ***k-tog reda*** *nazivamo jednadžbu oblika*

$$x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n=r_n, \tag{1}$$

gdje su $p_i(n)$ $(i=1,...,k)$ i r_n funkcije realnih vrijednosti definirane za $n\geqslant n_0$ (tj. realni nizovi) i pri čemu je $p_k(n)\neq 0$ za sve $n\geqslant n_0$.
Ako je $r_n=0$ za sve $n\geqslant n_0$, onda za jednadžbu (1) kažemo da je ***homogena****. U suprotnom, za jednadžbu (1) kažemo da je* ***nehomogena****.*

Definicija 2 *Niz $\{x_n\}_{n_0}^{\infty}$, ili jednostavno x_n, je* ***rješenje diferentne jednadžbe*** *(1) ako zadovoljava tu jednadžbu.*

Ako uz jednadžbu (1) bude zadan i uvjet početnih vrijednosti, to jest

$$x_{n_0}=a_0, x_{n_0+1}=a_1,...,x_{n_0+k-1}=a_{k-1}, \tag{2}$$

gdje su a_i realni brojevi, imat ćemo tzv. *problem početnih vrijednosti* (skr. PPV):

$$x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n=r_n, \quad (n=n_0,n_0+1,...) \tag{3}$$

$$x_{n_0}=a_0, x_{n_0+1}=a_1,...,x_{n_0+k-1}=a_{k-1}. \tag{4}$$

Teorem 3 *Problem početnih vrijednosti (3)-(4) ima jedinstveno rješenje.*

Posvetimo se sada kratkom pregledu opće teorije linearnih homogenih diferentnih jednadžbi k-tog reda oblika:

$$x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n=0 \qquad (n=n_0,n_0+1,...)\,. \tag{5}$$

Definicija 4 *Za nizove $u_n^{(1)},u_n^{(2)},\ldots,u_n^{(r)}$ se kaže da su* ***linearno zavisni*** *za $n\geqslant n_0$ ako postoje konstante $a_1,a_2,\ldots,a_r$, koje nisu sve jednake nuli, takve da je*

$$a_1u_n^{(1)}+a_2u_n^{(2)}+\ldots+a_ru_n^{(r)}=0, \quad n\geqslant n_0. \tag{6}$$

Ako je $a_j\neq 0$, za neko $j\in\{1,2,...,r\}$, tada iz (6) dobijamo

$$u_n^{(j)}=-\frac{a_1}{a_j}u_n^{(1)}-\frac{a_2}{a_j}u_n^{(2)}-\ldots-\frac{a_r}{a_j}u_n^{(r)}=-\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}u_n^{(i)}. \tag{7}$$

Uočimo da iz jednakost (7) slijedi da je svaki niz $u_n^{(j)}$, sa nenultim koeficijentom, linearna kombinacija ostalih nizova $u_n^{(i)}$ $(i\in\{1,2,...,r\}$ i $i\neq j)$. Također, vidimo da su dva niza $u_n^{(1)}$ i $u_n^{(2)}$ linearno zavisna ako je jedan višekratnik drugog, to jest $u_n^{(1)}=au_n^{(2)}$, za neku konstantu a.
Negacija linearne zavisnosti je linearna nezavisnost: za nizove $u_n^{(1)},u_n^{(2)},\ldots,u_n^{(r)}$ se kaže da su *linearno nezavisni* za $n\geqslant n_0$ ako

$$a_1u_n^{(1)}+a_2u_n^{(2)}+\ldots+a_ru_n^{(r)}=0,$$

za sve $n\geqslant n_0$, povlači da je $a_1=a_2=\ldots=a_r=0$.

Definicija 5 *Skup k linearno nezavisnih rješenja diferentne jednadžbe (5) naziva se* ***fundamentalnim skupom*** *rješenja te jednadžbe.*

Nije praktično provjeravati linearnu nezavisnost skupa rješenja koristeći definiciju. Na sreću, postoji jednostavan metod da se provjeri linearna nezavisnost rješenja, koristeći tzv. *Casoratian* $W(n)$ (determinanta analogna Wronskianu u teoriji dife-rencijalnih jednadžbi).

Definicija 6 *Ako su $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(r)}$ rješenja diferentne jednadžbe (5), tada determinantu*

$$W(n) = \det \begin{bmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(r)} \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \cdots & x_{n+1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+r-1}^{(1)} & x_{n+r-1}^{(2)} & \cdots & x_{n+r-1}^{(r)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

nazivamo ***Casoratianom*** *tih rješenja.*

Lema 7 ***(Abelova lema)*** *Neka su $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}$ rješenja homogene dife-rentne jednadžbe (5) i neka je $W(n)$ njihov Casoratian. Tada, za $n \geqslant n_0$, vrijedi*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0). \tag{9}$$

U specijalnom slučaju, ako jednadžba (5) ima konstantne koeficijente $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tada imamo:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{(n-n_0)} W(0), \tag{10}$$

a ako je još i $n_0 = 0$, tada je

$$W(n) = (-1)^{kn} p_k^n W(0). \tag{11}$$

Formula (9) ima vrlo značajnu ulogu pri određivanju linearne (ne)zavisnosti nizova.

Posljedica 1 *Pretpostavimo da je $p_k(n) \neq 0$, za sve $n \geqslant n_0$. Tada je Casoratian $W(n) \neq 0$ za sve $n \geqslant n_0$ ako i samo ako je $W(n_0) \neq 0$.*

Uočimo da je Casoratian identički jednak nuli (tj. jednak nuli za sve $n \geqslant n_0$, za neko n_0) ili nikad nije jednak nuli, to jest različit je od nule za sve $n \geqslant n_0$. Da bismo provjerili da li je $W(n) \neq 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}^+$, dovoljno je samo provjeriti da li je $W(0) \neq 0$, ako je $n_0 = 0$. Primijetimo da uvijek možemo odabrati n_0 koji nam najviše odgovara da bismo izračunali $W(n_0)$.
Pogledajmo sada vezu između linearne nezavisnosti rješenja i njihovog Casoratiana.

Teorem 8 *Skup rješenja $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}$ homogene diferentne jednadžbe (5) je fundamentalni skup ako i samo ako je, za neko $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, Casoratian tih rješenja $W(n_0) \neq 0$.*

Teorem 9 ***(Fundamentalni (osnovni) teorem)*** *Ako je $p_k(n) \neq 0$, za sve $n \geqslant n_0$, onda jednadžba (5) ima fundamentalni skup rješenja za $n \geqslant n_0$.*

Uočimo da fundamentalnih skupova rješenja jednadžbe (5) ima beskonačno mnogo. Kako se inače formira fundamentalni skup rješenja - pitanje je koje se rješava ovisno o situaciji.

Lema 10 *Neka su $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ dva rješenja jednadžbe (5). Tada vrijedi:*
i) $x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)}$ je rješenje jednadžbe (5),
ii) $\widetilde{x}_n = a x_n^{(1)}$ je rješenje jednadžbe (5) za bilo koju konstantu a.

Teorem 11 ***(Princip superpozicije)*** *Ako su $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(r)}$ rješenja dife-rentne jednadžbe (5), tada je*

$$x_n = a_1 x_n^{(1)} + a_2 x_n^{(2)} + \ldots + a_r x_n^{(r)}$$

takođe rješenje jednadžbe (5), gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ neke konstante.

Teorem 12 *Neka je* $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$ *fundamentalni skup rješenja jednadžbe (5) i neka je* x_n *bilo koje dato rješenje jednadžbe (5). Tada postoje konstante* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *takve da je* $x_n = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i x_n^{(i)}$.

Gornja diskusija nas je dovela do definicije općeg rješenja homogene diferentne jednadžbe (5).

Definicija 13 *Neka je* $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$ *fundamentalni skup rješenja jednadžbe (5). Tada je* ***opće rješenje*** *jednadžbe (5) dato sa* $x_n = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i x_n^{(i)}$, *za proizvoljne konstante* $C_1, C_2, ...C_k$.

Vrijedi napomenuti da se bilo koje rješenje jednadžbe (5) može dobiti iz općeg rješenja odgovarajućim izborom konstanti C_i. Međutim, u praksi nas znatno češće zanima rješenje problema početnih vrijednosti (PPV). Ranije smo vidjeli da je to rješenje jedinstveno. Sada ćemo pokazati kako se ono određuje ako nam je poznat fundamentalni skup rješenja. Naime, uvrštavanjem početnih uvjeta u opće rješenje

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} C_i x_n^{(i)},$$

dobijamo sistem linearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_{n_0} &= \sum_{i=1}^{k} C_i x_{n_0}^{(i)}, \\ x_{n_0+1} &= \sum_{i=1}^{k} C_i x_{n_0+1}^{(i)}, \\ &\vdots \\ x_{n_0+k-1} &= \sum_{i=1}^{k} C_i x_{n_0+k-1}^{(i)}, \end{aligned} \tag{12}$$

koji treba riješiti po nepoznanicama C_i $(i = 1, 2, ..., k)$. Taj sistem linearnih jednadžbi ima jedinstveno rješenje, jer je njegova determinanta jednaka Casoratianu $W(n_0)$ promatranog fundamentalnog skupa rješenja.
Primijetimo, također, još jednu važnu činjenicu. Riječ je o tome da diferentna jednadžba (5), prema fundamentalnom teoremu, ima fundamentalni skup rješenja od k nizova. Iz (12) slijedi da je k maksimalan broj linearno nezavisnih rješenja.

Prethodni rezultati mogu se elegantnije zapisati koristeći jezik linearne algebre.

Teorem 14 *Neka je* S *skup svih rješenja jednadžbe (5) sa operacijama "+" i "·" definiranim na sljedeći način:*
i) $(x + y)(n) = x(n) + y(n)$ *za* $x, y \in S$, $n \in \mathbb{Z}^+$,
ii) $(ax)(n) = ax(n)$ *za* $x \in S$, a *je konstanta.*
Prostor $(S, +, \cdot)$ *je linearni (vektorski) prostor dimenzije* k.

2. Linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Promatrajmo diferentnu jednadžbu k-tog reda:

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \ldots + p_k x_n = 0 \quad (n = n_0, n_0 + 1, ...) \tag{13}$$

gdje su p_i konstante i $p_k \neq 0$. Cilj je da nađemo fundamentalni skup rješenja i shodno tome opće rješenje jednadžbe (13). Procedura je relativno jednostavna. Pretpostavimo da rješenja jednadžbe (13) imaju oblik λ^n, gdje je λ kompleksan broj. Zamjenom ove vrijednsoti u jednadžbu (13) dobijamo:

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0. \tag{14}$$

Ova jednadžba se naziva ***karakterističnom jednadžbom*** diferentne jednadžbe (13), a njeni korijeni λ se nazivaju ***karakterističnim korijenima***.
Primijetimo da, zbog $p_k \neq 0$, nijedan od karakterističnih korijena nije jednak nuli. Razmotrit ćemo dva slučaja.

1. *Slučaj* ***a.*** Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *međ-sobno različiti.* Tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 15 *Ako su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ međusobno različiti, tada je skup $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ fundamentalni skup rješenja jednadžbe (13).*

Primjer 16 *Data je diferentna jednadžba*

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0 \quad (n = 0, 1, ...) .$$

a) Naći opće rješenje date jednadžbe.
b) Naći rješenje date jednadžbe uz početne uvjete $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$.

Rješenje. *a)* Odgovarajuća karakteristična jednadžba ima oblik

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

odakle se dobijaju karakteristične vrijednosti $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$, pa je fundamentalni skup rješenja $\{2^n, 5^n\}$. Opće rješenje date diferentne jednadžbe ima oblik

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 5^n. \tag{15}$$

b) Koristeći opće rješenje (15) i početne uvjete, imamo

$$n = 0 \Rightarrow 1 = x_0 = C_1 + C_2,$$
$$n = 1 \Rightarrow 2 = x_1 = 2C_1 + 5C_2.$$

Odavde se dobija $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, pa je traženo rješenje PPV: $x_n = 2^n$. ♣

2. *Slučaj* ***b.*** Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *različiti sa višestrukostima* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respektivno, pri čemu je

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = k.$$

U ovom slučaju jednadžba (13) se može zapisati kao:

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x_n = 0. \tag{16}$$

Uočimo da, ako su $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(m_i)}$ rješenja jednadžbe

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x_n = 0, \tag{17}$$

onda su ona, također, rješenja i jednadžbe (16). Pretpostavimo da možemo naći fundamentalni skup rješenja za sve jednadžbe (17), $1 \leqslant i \leqslant r$. Za očekivati je da unija ovih r fundamentalnih skupova bude fundamentalni skup rješenja jednadžbe (16).

Lema 17 *Skup $S_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ je fundamentalni skup rješe-nja jednadžbe (17).*

Teorem 18 *Skup $S = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ je fundamentalni skup rješenja jednadžbe (13).*

Opće rješenje jednadžbe (13) je dato sa:

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(C_{i0} + C_{i1}n + C_{i2}n^2 + \ldots + C_{im_{i-1}} n^{m_i - 1}\right). \tag{18}$$

Primjer 19 *Riješiti PPV*

$$\begin{aligned} x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 4x_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, ..., \\ x_0 &= 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Odgovarajuća karakteristična jednadžba je

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0,$$

čija su rješenja: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Opće rješenje, prema (18), date jednadžbe je

$$x_n = C_1 1^n + D_1 2^n + D_2 n 2^n = C_1 + D_1 2^n + D_2 n 2^n.$$

Iskoristimo početne uvjete kako bismo odredili konstante C_1, D_1 i D_2:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + D_1 + D_2 = 0 \\ x_1 &= C_1 + 2D_1 + 2D_2 = -1 \\ x_2 &= C_1 + 4D_1 + 8D_2 = 1. \end{aligned}$$

Odavde je

$$C_1 = 5, D_1 = -5, D_2 = 2.$$

Prema tome, traženo rješenje PPV je

$$x_n = 5 - 5 \cdot 2^n + 2n \cdot 2^n = 5 + (2n - 5) \cdot 2^n. \qquad \clubsuit$$

Pretpostavimo sada da među korijenima karakteristične jednadžbe ima **imaginarnih kompleksnih**, koji se, kao što znamo pojavljuju u parovima konjugirano kompleksnih brojeva. Pokazaćemo da svakom takvom paru odgovaraju dva realna linearno nezavisna rješenja. Neka je $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$. Tada je

$$\lambda_{1,2} = r(\cos\theta \pm i \sin\theta), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \theta \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

odakle slijedi

$$x_n = \lambda_1^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Odavde se vidi da karaktersitičnom korijenu λ_1 odgovaraju dva realna rješenja

$$x_n^{(1)} = r^n \cos n\theta, \quad x_n^{(2)} = r^n \sin n\theta, \tag{19}$$

koja su linearno nezavisna jer za njihov Casoratian vrijedi

$$W(0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r\cos\theta & r\sin\theta \end{bmatrix} = r \sin\theta \neq 0.$$

S druge strane, konjugirano kompleksnom korijenu λ_2 odgovaraju realna rješenja

$$x_n^{*(1)} = r^n \cos n\theta, \quad x_n^{*(2)} = -r^n \sin n\theta, \tag{20}$$

koja su očito linearno zavisna sa rješenjima (19). Prema tome, paru konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe odgovaraju linearno nezavisna realna rješenja oblika (19) ili (20).
Ako, međutim, konjugirano kompleksni par korijena karakteristične jednadžbe ima višestrukost m, onda su odgovarajuća fundamentalna (linearno nezavisna) rješenja:

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, nr^n \cos n\theta, nr^n \sin n\theta, ..., n^{m-1} r^n \cos n\theta, n^{m-1} r^n \sin n\theta.$$

Zaključujemo da se pronalaženjem svih fundamentalnih rješenja koja dogovaraju svim realnim korijenima i svih rješenja koja odgovaraju svim parovima konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe, dobija fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (13).

Primjer 20 *Riješiti jednadžbu*

$$3x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Rješenje. Iz karakteristične jednadžbe $3\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$ dobijamo

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Zbog toga je opće rješenje promatrane jednadžbe

$$x_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left[c_1\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right], \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

pri čemu su c_1 i c_1 proizvoljne konstante. ♣

3. Linearne nehomogene jednadžbe i metod neodređenih koeficijenata

Fokusirajmo se sada na rješavanje linearne nehomogene jednadžbe k-tog reda

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = r_n, \tag{21}$$

gdje su $p_i(n)$ $(i = 1, ..., k)$ i r_n funkcije realnih vrijednosti definirane za $n \geqslant n_0$ (tj. realni nizovi) i pri čemu je $p_k(n) \neq 0$ za sve $n \geqslant n_0$.
Nije teško izvući sljedeći **zaključak:** *Nasuprot homogenim diferentnim jednadžbama, rješenja nehomogenih diferentnih jednadžbi ne formiraju vektorski prostor. Ni suma (razlika), ni proizvod rješenja nehomogene jednadžbe nije (općenito) njeno rješenje.*

Teorem 21 *Ako su $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ rješenja jednadžbe (21), onda je $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0. \tag{22}$$

Uobičajeno je da se opće rješenje homogene jednadžbe (22) naziva ***komplementarnim rješenjem*** nehomogene jednadžbe (21) i označava se sa $x_n^{(c)}$. Bilo koje rješenje nehomogene jednadžbe (21) zvaćemo ***partikularnim rješenjem*** jednadžbe (21) i označavaćemo ga sa $x_n^{(p)}$.

Teorem 22 *Bilo koje (tj. opće) rješenje jednadžbe (21) može se napisati kao*

$$x_n = x_n^{(p)} + x_n^{(c)} = x_n^{(p)} + \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^{(i)}, \tag{23}$$

gdje je $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$ fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (22).

U mnogim slučajevima jako je teško naći opće rješenje nehomogene jednadžbe. No, situacija je nešto povoljnija kada su u pitanju linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Za takve slučajeve preostaje još samo pronaći način kako se određuje partikularno rješenje $x_n^{(p)}$. Postoje različiti metodi za njihovo određivanje i naredno izlaganje bit će posvećeno upravo nekim od tih metoda. Riječ je o sljedećim metodima: *metod neodređenih koeficijenata*, *metod varijacije konstanti*, *metod operatora*, *metod generirajućih funkcij*a i *metod Z-transformacije*. Metod Z-transformacije, zbog svoje specifičnosti, bit će izložen nešto kasnije u posebnom poglavlju.
Metod neodređenih koeficijenata za izračunavanje partikularnog rješenja $x_n^{(p)}$ jednadžbe (21) je jedan od jednostavnijih metoda i zbog toga ćemo upravo njemu prvo posvetiti pažnju. Analogno istoj situaciji kao kod diferencijalnih jednadžbi, i ovdje se, u osnovi, metod sastoji u tome da se inteligentno pretpostavi oblik partikularnog rješenja, s nepoznatim (neodređenim) koeficijentima, a zatim da se ta funkcija (niz) zamijeni u diferentnoj jednadžbi (21) i tako odrede nepoznati koeficijenti. Naravno da se ovaj metod ne može efikasno upotrijebiti u svim situacijama, to jest za potpuno proizvoljan niz r_n. Ipak, ovim metodom mogu biti uspostavljena neka pravila za određivanje partikularnog rješenja ako je r_n linaerna kombinacija izraza koji su oblika

$$a^n, \sin(bn), \cos(bn), \text{ ili } n^k \tag{24}$$

ili njihovih proizvoda

$$a^n\sin(bn), a^n n^k, a^n n^k\cos(bn). \tag{25}$$

A) Slučaj kada je niz r_n oblika

$$r_n = P_m(n)\, a^n,$$

gdje je $P_m(n)$ polinom po n stepena m.

A1) Ako a nije korijen karakteristične jednadžbe diferentne jednadžbe (22), tada partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ tražimo u obliku

$$x_n^{(p)} = Q_m(n)\, a^n,$$

gdje je $Q_m(n)$ polinom stepena m, čije koeficijente treba odrediti.

A2) Ako je a korijen karakteristične jednadžbe diferentne jednadžbe (22) višestrukosti ν, tada partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ tražimo u obliku

$$x_n^{(p)} = n^{\nu} Q_m(n)\, a^n.$$

B) Slučaj kada je niz r_n oblika

$$r_n = \left[P_r(n)\cos(nb) + P_s(n)\sin(nb)\right] a^n.$$

Neka je $m = \max\{r, s\}$.

B1) Ako se $a^n \cos(nb)$ i $a^n \sin(nb)$ ne pojavljuju u (općem) rješenju $x_n^{(c)}$ homogene diferentne jednadžbe (22), tada se partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ traži u obliku

$$x_n^{(p)} = \left[Q_m^1(n)\cos(nb) + Q_m^2(n)\sin(nb)\right] a^n,$$

gdje su Q_m^1 i Q_m^2 polinomi stepena m s neodređenim koeficijentima.

B2) Ako se $a^n \cos(nb)$ ili $a^n \sin(nb)$ pojavljuju u (općem) rješenju $x_n^{(c)}$ homogene diferentne jednadžbe (22) s višestrukošću ν, tada se partikularno rješenje $x_n^{(p)}$ traži u obliku

$$x_n^{(p)} = n^{\nu}\left[Q_m^1(n)\cos(nb) + Q_m^2(n)\sin(nb)\right] a^n.$$

Napomenimo još da se u izrazu niza r_n stepen a^n može i da ne pojavi, pa se tada i ne uključuje ni u partikularno rješenje. Također napomenimo da se prethodno razmatranje može primijeniti i za slučaj kada se niz r_n može predstaviti u obliku zbira nizova koji se bitno razlikuju. Naime, ako je $r_n = r_n^{(1)} + ... + r_n^{(m)}$, tada se partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (21) traži u obliku zbira $x_n^{(p)} = x_n^{(p_1)} + ... + x_n^{(p_m)}$, pri čemu je $x_n^{(p_i)}$ partikularno rješenje jednadžbe $P_k(E)x_n = r_n^{(i)}$ $(i = 1, ..., m)$.

Tabela 3.1 Oblici partikularnog rješenja

Oblik niza r_n	**Oblik partikularnog rješenja $x_n^{(p)}$**
a^n	$C_1 a^n$
n^k	$\sum\limits_{i=0}^{k} C_i n^i$
$n^k a^n$	$\left(\sum\limits_{i=0}^{k} C_i n^i\right) a^n$
$\sin bn, \cos bn$	$C_1 \sin bn + C_2 \cos bn$
$a^n \sin bn, a^n \cos bn$	$(C_1 \sin bn + C_2 \cos bn)a^n$
$a^n n^k \sin bn, a^n n^k \cos bn$	$\left(\sum\limits_{i=0}^{k} C_i n^i\right) a^n \sin(bn) + \left(\sum\limits_{i=0}^{k} D_i n^i\right) a^n \cos(bn)$

Primjer 23 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = n3^n. \tag{26}$$

Rješenje. Karakteristični korijeni homogene jednadžbe su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -4$, pa je

$$x_n^{(c)} = C_1 + C_2 \left(-4\right)^n.$$

Ova situacija spada u okvire slučaja A1. Zbog toga imamo

$$x_n^{(p)} = \left(a_1 + a_2 n\right) 3^n.$$

Zamjenom ove relacije u (26) dobijamo

$$\begin{aligned} a_1 3^{n+2} + a_2(n+2)3^{n+2} + 3a_1 3^{n+1} + 3a_2(n+1)3^{n+1} - 4a_1 3^n - 4a_2 n 3^n = n3^n \\ \Leftrightarrow (14a_1 + 27a_2 + 14a_2 n)3^n = n3^n. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} 14a_1 + 27a_2 &= 0, \\ 14a_2 &= 1, \end{aligned}$$

ili $a_1 = -\dfrac{27}{196}$, $a_2 = \dfrac{1}{14}$. Partikularno rješenje date jednadžbe je

$$x_n^{(p)} = \left(-\frac{27}{196} + \frac{1}{14} n\right) 3^n,$$

a njeno opće rješenje je

$$x_n = C_1 + C_2 \left(-4\right)^n + \left(-\frac{27}{196} + \frac{1}{14} n\right) 3^n. \qquad \clubsuit$$

Primjer 24 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} + 9x_n = 5 \cdot 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{27}$$

Rješenje. Karakteristična jednadžba odgovarajuće homogene jednadžbe je

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Karakteristični korijeni su:

$$\lambda_1 = -3i, \quad \lambda_2 = 3i$$

Dakle, $r = 3$ i $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, pa je

$$x_n^{(c)} = 3^n \left[C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

Primijetimo da se $r_n = 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ pojavljuje u $x_n^{(c)}$. To je slučaj B2), prema kojem je

$$x_n^{(p)} = n \left[a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] 3^n, \tag{28}$$

gdje su a i b koeficijenti koje treba odrediti. Zamjenom (28) u (27), dobijamo

$$\begin{aligned} (n+2) \left[a \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + b \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right)\right] \cdot 3^{n+2} + \\ + 9n \left[a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \cdot 3^n = 5 \cdot 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Također, zamjenom $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ i $\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ i poređe-njem koeficijenata koji stoje uz kosinus, dobijamo $a = 0$. Analogno, poređenjem koeficijenata koji stoje uz sinus, dobijamo $b = -\frac{5}{18}$.
Zamjenom ovih vrijednosti nazad u (28), dobijamo

$$x_n^{(p)} = -\frac{5}{18} n 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

a opće rješenje jednadžbe (27) je

$$x_n = \left[C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{5}{18} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \cdot 3^n. \qquad \clubsuit$$

Primjer 25 *Vidjeti zad. 3.2.23*

Zadaci za vježbu:
3.3.1-3.3.12
i
3.3.15-3.3.22 (samo metod neodređenih koeficijenata)