Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Diferentne jednadžbe prvog reda

Definicija 1 *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, ..., \tag{1}$$

gdje je $f : I \to I$ (I interval realnih brojeva), se naziva ***autonomnom diferentnom jednadžbom prvog reda****.*

Primjer 2 *Primjeri autonomnih diferentnih jednadžbi:*

$$x_{n+1} = \frac{5x_n^2 + 3}{2x_n - 4}, \quad x_{n+1} = 2x_n^2 - 3x_n + 10, \quad x_{n+1} = 2x_n - 3. \qquad \clubsuit$$

Postoje i neautonomne diferentne jednadžbe koje su oblika

$$x_{n+1} = f(n, x_n), \qquad n = 0, 1, ... \tag{2}$$

Primjer 3 *Primjeri neautonomnih diferentnih jednadžbi:*

$$x_{n+1} = \frac{2nx_n^2 + 3n^2}{x_n - 1}, \quad x_{n+1} = (3n+5)x_n^3 - 2nx_n + \sin\frac{n\pi}{3}. \qquad \clubsuit$$

Zašto se jednadžbe (1) i (2) nazivaju baš diferentnim jednadžbama? Naime, diferentne jednadžbe su intenzivno proučavane kao diskretni analogoni diferencijalnih jednadžbi

$$x' = g(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ukoliko izvod $x'(t)$ aproksimiramo količnikom

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

za dovoljno malo h, i stavimo

$$t_n = t_0 + nh, \quad x(t_n) = x_n, \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

dobijamo

$$\Delta x_n = hg(x_n).$$

Dakle, aproksimacijom izvoda diferencijalnih jednadžbi, a što je moguće učiniti na više načina, dolazimo do novih oblika jednadžbi koje zapravo nazivamo diferentnim jednadžbama. No, primijetimo i sljedeće. Jednadžbe (1) i (2) se često nazivaju i rekurentnim jednadžbama. Međutim, ako upotrijebimo operatore iz diferentnog računa (E i Δ), npr. u jednadžbi (2), imat ćemo

$$Ex_n = f(n, x_n) \Longleftrightarrow (\Delta + I)\, x_n = f(n, x_n) \Longleftrightarrow \Delta x_n = f(n, x_n) + x_n,$$

odnosno

$$\Delta x_n = F(n, x_n), \tag{3}$$

gdje je $F(x_n) = f(x_n) + x_n$. Prisjetimo se općeg oblika diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

i odgovarajućih analogona u diferentnom računu, s jedne strane, i diferencijalnom i integralnom računu, s druge strane:

$$x \longleftrightarrow n, \quad y \longleftrightarrow x_n, \quad \frac{d}{dx} \longleftrightarrow \Delta.$$

Uočavamo analogni zapis jednadžbi (3) i (4). Jednadžba (3) sadrži diferentni operator Δ (kao što diferencijalna jednadžba (4) sadrži operator diferenciranja $\frac{d}{dx}$) pa se s pravom naziva diferentnom jednadžbom.

Rješenje diferentne jednadžbe je svaki niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava tu jednadžbu za sve $n = 0, 1, 2, ...$ Za neke klase diferentnih jednadžbi, prije svega, za neke linearne, moguće je doći do općeg rješenja. Međutim, u općenitom slučaju to je vrlo teško postići. Zbog toga ćemo se posvetiti problemu rješavanja linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda, te njihovoj primjeni u praksi.

Definicija 4 *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{5}$$

gdje su $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *poznati nizovi realnih brojeva, naziva se* ***linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda*** *(jer je na desnoj strani linearna funkcija* $f(x) = ax + b$*).*

U slučaju kada je $b_n = 0$ $(n = 0, 1, ...)$*, jednadžba (5) se naziva* ***homogenom****, dok se inače, to jest kada je* $b_n \neq 0$ *za bar jedno* $n \in \{0, 1, 2, ...\}$*, jednadžba (5) naziva* ***nehomogenom****.*

Uočimo da se u jednadžbi (5) može općenito smatrati da indeks n polazi od nekog fiksnog prirodnog broja $n_0 \geq 1$. Međutim, smjenom $z_{n-n_0} = x_n$, taj slučaj svodimo na slučaj jednadžbe (5).

Obično se jednadžbi (5) dodaje takozvani uvjet početnih vrijednosti

$$x_0 = \alpha. \tag{6}$$

Diferentna jednadžba (5), zajedno s početnim uvjetom (6), čini tzv. *problem početnih vrijednosti* (skr. PPV).

Moguće su izvjesne modifikacije jednadžbe (5) u ovisnosti o tome da li su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konstantni ili ne:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{8}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{9}$$

pri čemu su $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ poznate konstante.

Razmotrimo prvo slučaj homogene linearne jednadžbe prvog reda:

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad . \tag{10}$$

Rješenje ove jednadžbe se može jednostavno dobiti iteriranjem:

$$\begin{aligned} x_n &= a_{n-1} x_{n-1} = a_{n-1} (a_{n-2} x_{n-2}) = a_{n-1} a_{n-2} (a_{n-3} x_{n-3}) = ... = \\ &= a_{n-1} a_{n-2} ... a_0 x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) x_0. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (10) je dato sa

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) C, \tag{11}$$

gdje je C proizvoljna konstanta, dok odgovarajuće rješenje PPV ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) \alpha. \tag{12}$$

Primjer 5 *Jednadžba*

$$x_{n+1} = 3 x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ima opće rješenje

$$x_n = C \cdot 3^n,$$

gdje je C *proizvoljna konstanta. Odgovarajuće rješenje PPV je*

$$x_n = \alpha \cdot 3^n.$$

Primjećujemo da je svako rješenje neograničeno. ♣

Primjer 6 *Jednadžba*

$$x_{n+1} - \frac{3n+1}{3n+7} x_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ima opće rješenje (prema (11))

$$\begin{aligned} x_n &= C \prod_{i=0}^{n-1} \frac{3i+1}{3i+7} = C \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{10}{16} \cdot ... \cdot \frac{3n-8}{3n-2} \cdot \frac{3n-5}{3n+1} \cdot \frac{3n-2}{3n+4} \\ &= \frac{4C}{(3n+1)(3n+4)}, \end{aligned}$$

(C - proizvoljna konstanta), iz čega se da zaključiti da $x_n \to 0$ ($n \to \infty$). ♣

Razmatrajmo sada slučaj nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda u najopćenitijem obliku (5). Jedinstveno rješenje ove jednadžbe može se naći također jednostavnim iteriranjem i primjenom matematičke indukcije. Naime,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0 + b_0, \\ x_2 &= a_1 x_1 + b_1 = a_1 (a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1, \\ x_3 &= a_2 x_2 + b_2 = a_2 (a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 = \\ &= a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2, \end{aligned}$$

iz čega se može zaključiti da za sve $n \in \mathbb{Z}^+$ vrijedi:

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r. \tag{13}$$

Pri tome smo, po definiciji, uzimali da je

$$\prod_{i=0}^{-1} a_i = 1 \text{ i } \prod_{i=n}^{n-1} a_i = 1. \tag{14}$$

Formulu (13) dokažimo principom potpune matematičke indukcije. U tu svrhu pretpostavimo da je ona tačna za neki prirodni broj $n = k > 1$. Tada iz (5), za $n = k$, to jest

$$x_{k+1} = a_k x_k + b_k,$$

koristeći formulu (13), slijedi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} a_i \right) x_0 + a_k \sum_{r=0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a_i \right) b_r + b_k \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k} a_i \right) x_0 + \sum_{r=0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{k} a_i \right) b_r + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a_i \right) b_k \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k} a_i \right) x_0 + \sum_{r=0}^{k} \left(\prod_{i=r+1}^{k} a_i \right) b_r. \end{aligned}$$

Pri tome smo koristili notaciju

$$\prod_{i=k+1}^{k} a_i = 1 \text{ i } \sum_{r=k+1}^{k} a_i = 0. \tag{15}$$

Znači, formula (13) zaista vrijedi za sve $n \in \mathbb{Z}^+$.

Naravno da će se formula (13) malo modificirati u slučaju jednadžbi (7), (8) ili (9).

Gornje razmatranje se može objediniti u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 7 *Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nizovi realnih brojeva. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbe (5) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. Takvo rješenje je oblika*

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r, \quad n = 1, 2, ..., \tag{16}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (15).

Specijalno, kada je $a_n = a$ ili $b_n = b$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, to jest kad je jednadžba (5) oblika (7), (8) ili (9), vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 8 *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbi (7), (8), odnosno (9) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. U slučaju jednadžbe (9) to je rješenje dato sa*

$$x_n = \begin{cases} \alpha + bn, & \text{ako je } a = 1, \\ \left(\alpha - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}, & \text{ako je } a \neq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2... \,. \tag{17}$$

Rješenje jednadžbe (8) ima oblik

$$x_n = \alpha a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k, \quad n = 1, 2, ..., \tag{18}$$

dok rješenje jednadžbe (7) ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b, \quad n = 1, 2, ..., \tag{19}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (15).

Primjedba 9 *Neka je $b \neq 0$. Uočimo da je, u slučaju $a = 1$, svako rješenje jednadžbe (9) neograničeno. Također, u slučaju $a \neq 1$, jednadžba (9) ima konstantno rješenje*

$$x_n = \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, ... \,. \tag{20}$$

Takvo se rješenje naziva ***ekvilibrijum rješenje*** *jednadžbe (9). Svako drugo rješenje jednadžbe (9), za $|a| < 1$, konvergira ka ekvilibrijum rješenju.*

Primjer 10 *Riješiti problem početnih vrijednosti*

$$x_{n+1} - 3x_n = e^n, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \quad x_0 = 2.$$

Rješenje. Data jednadžba je oblika (8), pa koristeći (18) i uvjet $\alpha = x_0 = 2$, dobije se da je njeno opće rješenje:

$$\begin{aligned} x_n &= 2 \cdot 3^n + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-k-1} e^k = 2 \cdot 3^n + 3^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e}{3}\right)^k = 2 \cdot 3^n + 3^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{e}{3}\right)^n}{1 - \frac{e}{3}} \\ &= 2 \cdot 3^n + \frac{3^n - e^n}{3 - e}, \quad n = 1, 2, ... \,. \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Primjer 11 *Naći rješenje diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = 2(n+1)x_n + 3^n (n+1)!, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \quad x_0 = 1.$$

Rješenje. Prema (16) imamo

$$\begin{aligned}
x_n &= \prod_{i=0}^{n-1} 2(i+1) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2(i+1)\right) 3^k (k+1)! \\
&= 2^n n! + \sum_{k=0}^{n-1} n! 2^{n-k-1} \cdot 3^k = 2^n n! + 2^{n-1} n! \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= 2^n n! + 2^{n-1} n! \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2}-1} = 2^n n! \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) \\
&= 3^n n! \quad . \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Zadaci zavježbu (iz knjige: M. Nurkanović i Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe - Teorija i zadaci s primjenam,* "PrintCom" Tuzla, Tuzla, 2016.) :
2.2.2 - 2.2.11 (urađeni zadaci)
2.3.1 - 2.3.7 (neurađeni zadaci)