Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima - Metod generirajućih funkcija

Definicija 1 *Funkciju*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

gdje navedeni stepeni red konvergira u nekoj oblasti, nazivamo ***generirajućom funkcijom*** *niza* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Primjer 2 *a) Funkcija* $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ *je generirajuća funkcija niza binomnih koeficijenata reda* n*, koji je konačan niz.*

b) Funkcija $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x| < 1$, *je generirajuća funkcija beskonačnog konstantnog niza* $(1, 1, 1, ...)$.

c) Funkcija $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$, $|x| < 1$, *je generirajuća funkcija niza* $(1, -1, 1, -1, ...)$. ♣

Navedimo sada neke mogućnosti izvođenja operacija sa generirajućim funkcijama.

1. Sabiranje. Ako su $g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i $g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ generirajuće funkcije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, tada je

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

generirajuća funkcija niza $\{c_n\}$, gdje je $c_n = a_n + b_n$, $n = 0, 1, 2, ...$.

2. Množenje konstantom. Ako je $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ generirajuća funkcija niza $\{a_n\}$, a c neka konstanta, tada je

$$f(x) = cg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ca_k x^k$$

generirajuća funkcija niza $\{ca_n\}$.

3. Linearna kombinacija. Ako su $g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i $g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ generirajuće funkcije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, a α i β konstante, tada je

$$g(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$$

generirajuća funkcija niza $\{c_n\}$, gdje je $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$, $n = 0, 1, 2, ...$.

4. Translacija. Ako je $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ generirajuća funkcija niza $\{a_n\}$, tada je

$$x^n g(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n} x^k$$

generirajuća funkcija niza $(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, a_0, a_1, a_2, ...)$.

Očito je funkcija

$$\frac{g(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} = x^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} x^k$$

generirajuća funkcija niza $(a_n, a_{n+1}, ...)$.

5. Smjena promjenljive. Neka je $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ generirajuća funkcija niza $\{a_n\}$, a c neka konstanta. Tada vrijedi

$$g(cx) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (cx)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^k a_k x^k,$$

što znači da je $g(cx)$ generirajuća funkcija niza $\{c^n a_n\}$.

6. Množenje. Ako su $g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i $g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ generirajuće funkcije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, tada je

$$\begin{aligned} f(x) = g_1(x) g_2(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \end{aligned}$$

generirajuća funkcija niza $\{c_n\}$, gdje je $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$ (kažemo da je niz $\{c_n\}$ *konvolucija* nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$).

Specijalno, ako je $g_2(x) = \frac{1}{1-x}$, dobijamo da je

$$g_1(x) \frac{1}{1-x} = a_0 + (a_0 + a_1) x + (a_0 + a_1 + a_2) x^2 + ...$$

generirajuća funkcija $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n = 0, 1, 2, ...)$ parcijalnih suma niza $\{a_n\}$.

7. Diferenciranje. Neka je $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ generirajuća funkcija niza $\{a_n\}$. Tada je

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

generirajuća funkcija niza $\{n a_n\}$.

8. Integracija. Ako je $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ generirajuća funkcija niza $\{a_n\}$, tada je

$$\int_0^x g(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

generirajuća funkcija niza $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n+1} a_n\right\}$.

9. Eksponencijalne generirajuće funkcije.

Definicija 3 *Funkciju* $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k$ *nazivamo* ***eksponencijalnom gene-rirajućom funkcijom*** *niza* $\{a_n\}$.

Ako su $g_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k$ i $g_2(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}x^k$ eksponencijalne generirajuće funkcije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, tada je

$$f(x)=g_1(x)\,g_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}\right\}x^n$$

eksponencijalna generirajuća funkcija niza $\{c_n\}$, gdje je $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$, za $n=0,1,2,...$ (kažemo da je niz $\{c_n\}$ *binomna konvolucija* nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$).

Primjer 4 *Metodom generirajućih funkcija riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=1-3n+n^2+2^n.$$

Rješenje. Neka je $g(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_nt^n$ generirajuća funkcija niza $\{x_n\}$. Množeći datu diferentnu jednadžbu sa t^n i sumirajući od 0 do ∞, dobijamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+2}t^n-3\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}t^n+2\sum_{n=0}^{\infty}x_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-3n+n^2+2^n\right)t^n,$$

odnosno,

$$\begin{aligned}&(x_2+x_3t+...)-3(x_1+x_2t+...)+2(x_0+x_1t+...)=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}t^n-3\sum_{n=0}^{\infty}nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}n^2t^n+\sum_{n=0}^{\infty}2^nt^n,\end{aligned}$$

što se može pisati u obliku

$$\frac{g(t)-x_1t-x_0}{t^2}-3\frac{g(t)-x_0}{t}+2g(t)=\frac{1}{1-t}-3\frac{t}{(1-t)^2}+\frac{(1+t)t}{(1-t)^3}+\frac{1}{1-2t}.$$

Odavde slijedi da je

$$\begin{aligned}g(t)=&(x_1-3x_0)\frac{t}{(1-t)(1-2t)}+x_0\frac{1}{(1-t)(1-2t)}+\frac{t^2}{(1-t)^2(1-2t)}\\&-3\frac{t^3}{(1-t)^3(1-2t)}+\frac{t^3(1+t)}{(1-t)^4(1-2t)}-\frac{t^2}{(1-t)(1-2t)^2}.\end{aligned}$$

Nakon rastavljanja na parcijalne razlomke, imamo

$$\begin{aligned}g(t)=&\frac{2x_0-x_1}{1-t}+\frac{x_1-x_0+2}{1-2t}-\frac{5}{3}\frac{t}{(1-t)^2}+\frac{t(t+1)}{(1-t)^3}\\&-\frac{1}{3}\frac{t(t^2+4t+1)}{(1-t)^4}+\frac{1}{2}\frac{2t}{(1-2t)^2}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad \frac{t}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nt^n,\quad \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2t^n,$$
$$\frac{t(t^2+4t+1)}{(1-t)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n^3t^n,\quad \frac{1}{1-2t}=\sum_{n=0}^{\infty}2^nt^n,\quad \frac{2t}{(1-2t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n2^nt^n,$$

to se dobije da je

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n &= (2x_0 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} t^n + (x_1 - x_0 + 2) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n - \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n t^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 t^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n^3 t^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n 2^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2x_0 - x_1 + (x_1 - x_0 + 2)\, 2^n - \frac{5}{3} n + n^2 - \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n 2^n \right) t^n,\end{aligned}$$

pa je

$$x_n = 2x_0 - x_1 + (x_1 - x_0 + 2)\, 2^n - \frac{5}{3} n + n^2 - \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n 2^n.$$

Uzmemo li da je $2x_0 - x_1 = C_1$, i $x_1 - x_0 + 2 = C_2$, konačno se dobija opće rješenje promatrane jednadžbe

$$x_n = C_1 + C_2 2^n - \frac{5}{3} n + n^2 - \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n 2^n. \quad \clubsuit$$

Primijetimo da se u Definiciji 1 i Definiciji 3 generirajuća (i eksponencijalna generirajuća) funkcija može definirati i općenito za niz funkcija $\{a_n(t)\} = (a_0(t), a_1(t), a_2(t), \ldots)$. Na taj način, uzimajući specijalno $a_k(t) = (f(t))^k$ za neku funkciju $f(t)$, dobijamo odgovarajuću generirajuću funkciju

$$g(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f(t))^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (f(t)\, x)^k = \frac{1}{1 - f(t)\, x},$$

za $|f(t)\, x| < 1$. Ovo se može iskoristiti i za dobijanje drugih zanimljivih generirajućih funkcija. Tako, koristeći diferenciranje,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 - f(t)\, x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} (f(t))^k x^k, \\ \frac{f(t)}{(1 - f(t)\, x)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, (f(t))^k x^{k-1}, \\ \frac{x f(t)}{(1 - f(t)\, x)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, (f(t))^k x^k,\end{aligned}$$

dobijamo da je $\frac{xf(t)}{(1-f(t)x)^2}$ generirajuća funkcija za niz $\{n\, (f(t))^n\}$.
Slično zaključujemo da je

$$e^{f(t)x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f(t))^k x^k}{k!}$$

generirajuća funkcija za niz $\{(f(t))^n\}$.

Ovo ćemo sada iskoristiti da uvedemo pojmove kao što su *Bernoullievi polinomi* i *Bernoullievi brojevi*, koji će nam omogućiti da dođemo do još jedne važne formule za određivanje antidiferencije od t^n.

Definicija 5 ***Bernoullievi polinomi*** $B_n(t)$ *su definirani jednakošću*

$$\frac{x e^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(t)}{k!} x^k, \tag{1}$$

drugim riječima, $\dfrac{x e^{tx}}{e^x - 1}$ *je eksponencijalna generirajuća funkcija za niz* $B_n(t)$.

Definicija 6 ***Bernoullievi brojevi*** *B_n su vrijednosti Bernoullievih polinoma $B_n(t)$ u $t=0$, to jest $B_n = B_n(0)$.*

Odredimo sada prvih nekoliko Bernoullievih polinoma. Pomnožimo prvo jednakost (1) sa $\dfrac{e^x-1}{x}$:

$$e^{tx} = \frac{e^x-1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^k.$$

Razvijajući eksponencijalne funkcije na obje strane posljednje jednakosti u njihove Taylorove redove u okolini tačke 0 i grupirajući članove istih stepena od x, dobijamo

$$\begin{aligned}
&1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + ... \\
&= \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...\right)\left(B_0(t) + \frac{B_1(t)}{1!}x + \frac{B_2(t)}{2!}x^2 + ...\right) \\
&= B_0(t) + \left(\frac{B_1(t)}{1!} + \frac{B_0(t)}{2!}\right)x + \left(\frac{B_2(t)}{2!} + \frac{B_1(t)}{2!1!} + \frac{B_0(t)}{3!}\right)x^2 + ... \quad .
\end{aligned}$$

Upoređivanjem koeficijenata uz iste stepene od x, imamo

$$B_0(t) = 1, \qquad B_1(t) + \frac{B_0(t)}{2} = t, \qquad \frac{B_2(t)}{2} + \frac{B_1(t)}{2} + \frac{B_0(t)}{6} = \frac{t^2}{2}, \cdots \quad .$$

Odavde se dobija prvih nekoliko Bernoullievih polinoma

$$B_0(t) = 1, \qquad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6},$$

$$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \cdots \quad .$$

S druge strane, prva četiri Bernoullieva broja su

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0. \tag{2}$$

Navedimo sada i nekoliko osnovnih osobina ovih polinoma.

Teorem 7 *Osobine Bernoullievih polinoma:*
(a) $B_n'(t) = nB_{n-1}(t) \quad (n \geq 1)$,
(b) $\Delta_t B_n(t) = nt^{n-1} \quad (n \geq 0)$,
(c) $B_n = B_n(0) = B_n(1) \quad (n \neq 1)$,
(d) $B_{2m+1} = 0 \quad (m \geq 1)$.

Uočimo da iz tvrdnje *(a)* prethodnog teorema slijedi da je svaki $B_n(t)$ polinom stepena n. Također, iz tvrdnje *(b)* neposredno slijedi sljedeća važna činjenica.

Posljedica 1 *Ako je $n = 0, 1, 2, ...,$ tada je*

$$\Delta^{-1}t^n = \frac{1}{n+1}B_{n+1}(t) + C(t),$$

gdje je $\Delta C(t) = 0$.

Ova se posljedica može vrlo efektno iskoristiti za izračunavanje konačne sume oblika $\sum\limits_{i=1}^{n-1} i^k$. Naime, prema Teoremu **??**, imamo

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k = \left[\Delta^{-1}t^k\right]_1^n = \left[\frac{1}{k+1}B_{k+1}(t)\right]_1^n = \frac{1}{k+1}\left[B_{k+1}(n) - B_{k+1}\right]. \tag{3}$$

Metod generirajućih funkcija u slučaju linearnih diferentnih jednadžbi s *varijabilnim koeficijentima* primjenjuje se na već opisani način kao i u slučaju jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Često se događa da generirajuća funkcija za rješenje diferentne jednadžbe zadovoljava određenu diferencijalnu jednadžbu koja je rješiva i čije je rješenje izraženo pomoću srodnih funkcija. Ovo je obrnuta procedura od procedure iznalaženja rješenja diferencijalne jednadžbe u obliku stepenog reda. Važno je istaknuti da se primjenom ovog metoda dobija **samo jedno partikularno rješenje** diferentne jednadžbe. Ostala rješenja koja pripadaju fundamentalnom skupu treba tražiti na neki drugi način. Objasnimo to u slučaju linearne diferentne jednadžbe drugog reda. Uočimo prvo da iz Abelove leme slijedi da za Casoratian rješenja homogene diferentne jednadžbe drugog reda

$$x_{n+2} + p_1(n)\, x_{n+1} + p_2(n)\, x_n = 0 \tag{4}$$

vrijedi

$$W(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} p_2(i) \right) W(0). \tag{5}$$

Neka je $x_n^{(1)}$ nenulto rješenje jednadžbe (4) i neka $x_n^{(2)}$ označava neko drugo rješenje. Očigledno je da vrijedi

$$\Delta \frac{x_n^{(2)}}{x_n^{(1)}} = \frac{x_n^{(1)} \Delta x_n^{(2)} - x_n^{(2)} \Delta x_n^{(1)}}{x_n^{(1)} x_{n+1}^{(1)}} = \frac{W(n)}{x_n^{(1)} x_{n+1}^{(1)}},$$

odakle slijedi

$$x_n^{(2)} = x_n^{(1)} \Delta^{-1} \left(\frac{W(n)}{x_n^{(1)} x_{n+1}^{(1)}} \right), \tag{6}$$

što predstavlja formulu po kojoj se određuje drugo partikularno rješenje jednadžbe (4) na osnovu jednog poznatog rješenja.

Primjer 8 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$2(n+2)x_{n+2} - (3+2n)x_{n+1} + x_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Rješenje. Neka je generirajuća funkcija

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n.$$

Pomnožimo svaki član date diferentne jednadžbe sa t^n, a zatim sumirajmo po n u granicama od 0 do ∞:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, x_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)\, x_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n = 0.$$

Izvršimo sada promjenu indeksa u prve dvije sume:

$$2 \sum_{n=2}^{\infty} n x_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, x_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n = 0. \tag{7}$$

Budući da je $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n t^{n-1}$, to je prva suma u (7) oblika

$$2 \sum_{n=2}^{\infty} n x_n t^{n-2} = 2 \frac{g'(t) - x_1}{t}.$$

Druga suma je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, x_n t^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n x_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^{n-1} = 2g'(t) + \frac{g(t) - x_0}{t}.$$

Zamjenjujući dobijene izraze u (7), imamo

$$2\frac{g'(t)-x_1}{t}-2g'(t)-\frac{g(t)-x_0}{t}+g(t)=0,$$

odnosno,

$$g'(t)-\frac{1}{2}g(t)=\frac{2x_1-x_0}{2(1-t)}.$$

Specijalno za $2x_1=x_0$ posljednja diferencijalna jednadžba ima rješenje

$$g(t)=e^{\frac{t}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}t^n.$$

Dakle,

$$x_n=\frac{1}{2^n n!},\qquad n=0,1,2,\ldots\ .$$

Na ovaj način dobili smo jedno partikularno rješenje date jednadžbe. Kako je u pitanju jednadžba drugog reda, neophodno je naći još jedno njeno partikularno rješenje koje će biti linearno nezavisno dobijenom. Na taj način bismo dobili fundamentalni skup rješenja date jednadžbe. Kao prvo, datu jednadžbu napišimo u obliku

$$x_{n+2}-\frac{(3+2n)}{2(n+2)}x_{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}x_n=0,\qquad n=0,1,2,\ldots\ .$$

Prema (5), imamo

$$W(n)=\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2(i+2)}\right)W(0),$$

pa možemo odabrati da je $W(n)=\dfrac{1}{2^n(n+1)!}$ (budući da je $W(0)$ konstanta, to se može se uzeti da je ona jednaka 1, jer tražimo drugo rješenje kao partikularno). Sada, prema (6), dobijamo traženo drugo partikularno rješenje

$$y_n=\frac{1}{2^n n!}\Delta^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2^n(n+1)!}}{\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}}\right)=\frac{1}{2^n n!}\Delta^{-1}\left(2^{n+1}n!\right)$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}k!\ .$$

Prema tome, opće rješenje date jednadžbe je

$$x_n=\frac{c_1}{2^n n!}+\frac{c_2}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}k!\ ,\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. ♣

Zadaci za vježbu:
3.2.29-3.2.32
i
3.3.33-3.3.38