Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima

Linearna diferentna jednadžba s varijabilnim koeficijentima je jednadžbi oblika

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = r_n. \tag{1}$$

Vidjeli smo da se u slučaju linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda može doći do tačne formule za njihovo rješenje, čak i u slučaju kad su te jednadžbe s varijabilnim koeficijentima. Međutim, u slučaju linearnih jednadžbi drugog i višeg reda s varijabilnim koeficijentnima ne može se uvijek tako nešto postići. Zbog toga se u takvim slučajevima koriste neki specijalni metodi za njihovo rješavanje. Tako su najčešće korišteni sljedeći metodi: *metod faktorizacije operatora, metod varijacije konstanti, metod generirajućih funkcija, metod faktorijelskih redova i Z-transformacija.*

Metod faktorizacije operatora

Ovaj metod je potpuno analogan istom metodu kao u slučaju linearnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima, gdje je imao namjenu snižavanja reda diferentne jednadžbe. Dakle, ako budemo dobre sreće da uspijemo diferentnu jednadžbu (1) napisati u obliku

$$(E - A_n)(E - B_n)\cdots(E - U_n)\, x_n = r_n, \tag{2}$$

i pri tome odredimo operatore $A_n, B_n, ..., U_n$, moguće je toj jednadžbi sniziti red za jedan.

Primjer 1 *Riješiti PPV*

$$x_{n+2} - (n+2)\, x_{n+1} + n x_n = n, \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 1. \tag{3}$$

Rješenje. Pokušat ćemo datu diferentnu jednadžbu da napišemo u obliku (2), a s obzirom da je ona drugog reda, to znači u obliku

$$(E - A_n)(E - B_n)\, x_n = n, \tag{4}$$

gdje su A_n i B_n operatori koje treba odrediti.
Lijevu stranu jednadžbe (4) sada možemo pisati kao

$$\begin{aligned}(E - A_n)(x_{n+1} - B_n x_n) &= x_{n+2} - B_{n+1}x_{n+1} - A_n x_{n+1} + A_n B_n x_n \\ &= x_{n+2} - (A_n + B_{n+1})\, x_{n+1} + A_n B_n x_n.\end{aligned}$$

Uporedivši to s lijevom stranom jednadžbe (3), dobijamo

$$A_n + B_{n+1} = n + 2, \qquad A_n B_n = n. \tag{5}$$

Iz druge jednakosti u (5) vidimo da možemo probati sa ove dvije varijante: $A_n = nI, B_n = I$ ili $A_n = I, B_n = nI$. Uvrštavanjem u (4) i upoređivanjem s (3), zaključujemo da u obzir dolazi varijanta $A_n = I, B_n = nI$. Dakle, vrijedi

$$(E - I)(E - nI)\, x_n = n.$$

Uvedimo smjenu $y_n = (E - nI)\, x_n$. Tada jednadžba (3) prelazi u diferentnu jednadžbu prvog reda

$$(E - I)\, y_n = n,$$

čije je rješenje

$$y_n = (E - I)^{-1}\, n = \Delta^{-1} n^{(1)} = \frac{n^{(2)}}{2} + c_1 = \frac{1}{2} n\,(n-1) + c_1.$$

Sada imamo

$$(E - nI)\, x_n = y_n \Leftrightarrow x_{n+1} = n x_n + \frac{1}{2} n\,(n-1) + c_1,$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda, čije je rješenje dato sa

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) x_1 + \sum_{r=1}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right)\left(\frac{1}{2} r\,(r-1)+c_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\left(r\,(r-1)\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right) + c_1\sum_{r=1}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r\,(r-1)}{r!} + c_1\,(n-1)!\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!},
\end{aligned}
$$

jer je $x_1 = 0$. Kako je $x_2 = 1$, za $n = 2$ odavde dobijamo

$$1 = x_2 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Prema tome, rješenje datog PPV je

$$x_n = \frac{(n-1)!}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r^2-r+2}{r!}, \qquad n = 3, 4, \ldots \ . \quad \clubsuit$$

Metod faktorijelskih redova

U ovom metodu pretpostavljamo da je rješenje diferentne jednadžbe u obliku tzv. *faktorijelskog reda*, odnosno, reda padajućih faktorijela

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k n^{(k)},$$

gdje su $c_k = 0$, za $k < 0$. Uvrštavanjem u datu diferentnu jednadžbu, dolazimo do relacija iz kojih možemo odrediti nepoznate koeficijente c_k (slično metodu stepenih redova u diferencijalnim jednadžbama).

Primjer 2 *Riješiti diferentnu jednadžbu*

$$(n+1)\,x_{n+2} - (3n+2)\,x_{n+1} + (2n-1)\,x_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Rješenje. Datu jednadžbu možemo pisati kao

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\,E^2 x_n - (3n+2)\,E x_n + (2n-1)\,x_n = \\
&= (n+1)\,(\Delta + I)^2\,x_n - (3n+2)\,(\Delta + I)\,x_n + (2n-1)\,x_n,
\end{aligned}
$$

odnosno,

$$(n+1)\,\Delta^2 x_n - n\Delta x_n - 2x_n = 0. \tag{6}$$

Pretpostavimo da je rješenje te diferentne jednadžbe oblika

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k n^{(k)}, \tag{7}$$

gdje su $c_k = 0$, za $k < 0$. Sada imamo

$$\Delta x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k n^{(k-1)}, \quad \Delta^2 x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k n^{(k-2)}. \tag{8}$$

Zamjenjujući (7) i (8) u (6), dobijamo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k n n^{(k-2)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k n^{(k-2)} -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k n n^{(k-1)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 c_k n^{(k)} = 0. \tag{9}$$

Koristeći od ranije nam poznatu činjenicu

$$n n^{(m)} = n^{(m+1)} + m n^{(m)},$$

(9) možemo pisati kao

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k (k-1) c_k \left[n^{(k-1)} + (k-2) n^{(k-2)} \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k (k-1) c_k n^{(k-2)}$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k \left[n^{(k)} + (k-1) n^{(k-1)} \right] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 c_k n^{(k)} = 0.$$

Promjenom indeksa u pojedinim sumama, nakon sređivanja, imamo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ (k+2)(k+1)^2 c_{k+2} - (k+2) c_k \right\} n^{(k)} = 0,$$

odakle slijedi

$$(k+2)(k+1)^2 c_{k+2} - (k+2) c_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

odnosno,

$$(k+1)^2 c_{k+2} - c_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ... \ .$$

Odavde je

$$1^2 c_2 - c_0 = 0, \quad 2^2 c_3 - c_1 = 0, \quad 3^2 c_4 - c_2 = 0, \quad 4^2 c_5 - c_3 = 0, \quad ...,$$

to jest

$$c_2 = \frac{c_0}{1^2}, \quad c_3 = \frac{c_1}{2^2}, \quad c_4 = \frac{c_2}{3^2} = \frac{c_0}{1^2 \cdot 3^2}, \quad c_5 = \frac{c_1}{2^2 \cdot 4^2}, \quad ...,$$

pa konačno se dobije opće rješenje date jednadžbe

$$x_n = c_0 \left[1 + \frac{n^{(2)}}{1^2} + \frac{n^{(4)}}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{n^{(6)}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + ... \right]$$

$$+ c_1 \left[n^{(1)} + \frac{n^{(3)}}{2^2} + \frac{n^{(5)}}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{n^{(7)}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + ... \right]. \quad \clubsuit$$

Zadaci za vježbu:
3.2.28
i
3.3.33-3.3.38