UNIVERZITET U BIHAĆU
PEDAGOŠKI FAKULTET
MATEMATIKA I FIZIKA

Uloga operatora pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi

Diplomski rad

Crnkić Almira
Mentor: dr. sc. Mehmed Nurkanović

Bihać, oktobar 2008.

Sadržaj

1. Uvod

Diferentne jednadžbe su jednadžbe u kojima se kao nepoznanice javljaju funkcije definirane na nekom diskretnom skupu, odnosno funkcije čije se vrijednosti izračunavaju rekruzivno iz tog skupa. U slučaju kada je domen takvih funkcija skup prirodnih brojeva, onda su oni ustvari nizovi, pa će se u diferentnim jednadžbama kao nepoznanice uglavnom pojavljivati nizovi.

Definicija 1.1 ***Linearnom diferentnom jednadžbom k-tog reda*** *nazivamo jednadžbu oblika*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = r_n, \tag{1.1}$$

gdje su $p_i(n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ *i* r_n *funkcije realnih vrijednosti definirane za* $n \geq n_0$ *(tj. realni nizovi) i pri čemu je* $p_k(n) \neq 0$ *za sve* $n \geq n_0$.
Ako je $r_n = 0$ *za sve* $n \geq n_0$*, onda za jednadžbu (1.1) kažemo da je* ***homogena****. U suprotnom, za jednadžbu (1.1) kažemo da je* ***nehomogena****.*

Definicija 1.2 *Niz* $x_{n n_0}^{\infty}$ *ili jednostavno* x_n *je rješenje diferentne jednadžbe (1.1) ako zadovoljava tu jednadžbu.*

U narednom izlaganju će biti objašnjeno kakva je ta uloga operatora pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi. Kao što u rješavanju i analizi diferencijalnih jednadžbi značajnu ulogu igra diferencijalni i integralni račun, tako isto u rješavanju i analizi (posebno) linearnih diferentnih jednadžbi značajno mjesto zauzima diferentni račun, koji predstavlja diskretni analogon diferencijalnog i integralnog računa. U diferentnom računu bitna su dva operatora koja ćemo u prvom dijelu ovog rada definirati i za koje ćemo navesti neke osnovne osobine. Riječ je o diferentnom (diferencijskom) operatoru i translacijskom operatoru. Prvo ćemo navesti najvažnije definicije i teoreme koje će nam biti neophodni kasnije pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi. Također je važno napomenuti da su i diferentni i translacijski operatori linearni operatori. Nakon toga ćemo definisati pojam stepena padajućeg faktorijela, te pojam antidiferentnog operatora kao inverznog operatora diferentnog operatora. Poslije toga ćemo obraditi linearne diferentne jednadžbe sa varijabilnim koeficijentima, gdje ćemo uvidjeti koliko ogromnu ulogu ima operator pri rješavanju linearnih diferentnih jednadžbi.

2. Diferentni operator

Definicija 2.1 *Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne promjenljive t.* ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definišemo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t). \tag{2.1}$$

Ubuduće ćemo smatrati da je domen funkcije x skup uzastopnih brojeva. U tom slučaju promjenljivu t zamijenit ćemo oznakom n, a izraz $x(n)$ sa x_n, pa ćemo jednakost (2.1) pisati u obliku

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Uočimo da veličina koraka od jedne jedinice realno gledajući nije nikakva restrikcija. Naime, promatramo li diferentni operator $y(s+h) - y(s)$, s veličinom koraka $h > 0$, i uvedemo li smjenu $x(t) = y(th)$, imaćemo

$$y(s+h) - y(s) = y(th+h) - y(th) = x(t+1) - x(t) = \Delta x(t).$$

Uočimo da se diferentni operator može primjenjivati i na funkcije dvije ili više promjenljivih, ali je potrebno u indeksu operatora naznačiti koja će varijabla biti translatirana za jednu jedinicu. Razlike višeg reda se definiraju pomoću kompozicije diferencijalnog operatora sa samim sobom. Tako je razlika drugog reda

$$\begin{aligned}
\Delta^2 x(t) &= \Delta(\Delta x(t)) = \Delta(x(t+1) - x(t)) \\
&= (x(t+2) - x(t+1) - (x(t+1) + x(t)) \\
&= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t).
\end{aligned}$$

Razlika reda n definira se indukcijom:

$$\Delta^n x(t) = \Delta(\Delta^{n-1} x(t)) \qquad (n = 2, 3, ...),$$

to zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\Delta^n x(t) &= x(t+n) - nx(t+n-1) + \frac{n(n+1)}{2} x(t+n-2) + .. + (-1)^n x(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(t+n-k).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Definicija 2.2 ***Translacijski operator*** *(ili shift operator) definiramo jednakošću*

$$Ex(t) = x(t+1). \tag{2.3}$$

U slučaju da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, formula (2.3) se može pisati u obliku

$$Ex_n = x_{n+1}.$$

Ako sa I označimo identični operator, tj. $I(t) \equiv t$, tada imamo

$$\Delta = E - I, \tag{2.4}$$

odnosno

$$E = \Delta + I. \tag{2.5}$$

Relacije (2.4) i (2.5) su vrlo značajne i koriste se kada jedan od dva operatora, Δ ili E, treba izraziti preko onog drugog. Tako jednostavnije dolazimo do relacije (2.2):

$$\begin{aligned}\Delta^n x(t) = (E-I)^n x(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^k E^{n-k} x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(t+n-k)\end{aligned}$$

Slično, korištenjem formule (2.5), dobijamo relaciju

$$\begin{aligned}E^n x(t) \;=\; (\Delta + I)^n x(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I)^k \Delta^{n-k} x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} x(t).\end{aligned}$$

Osim toga, vrijedi zanimljiva osobina da operatori Δ i E međusobno komutiraju, tj. vrijedi

$$\Delta E x(t) = E \Delta x(t).$$

Teorem 2.1

1. $\Delta^n(\Delta^m x(t)) = \Delta^m(\Delta^n x(t)) = \Delta^{m+n} x(t)$, *za sve pozitivne cijele brojeve* m *i* n.
2. $\Delta(x(t)+y(t)) = \Delta x(t) + \Delta y(t)$.
3. $\Delta(Cx(t)) = C\Delta(x(t))$, *ako je* C *konstanta.*
4. $$\begin{aligned}\Delta(x(t)y(t)) \;&=\; x(t)\Delta y(t) + Ey(t)\Delta x(t) \\ &= y(t)\Delta x(t) + Ex(t)\Delta y(t) = x(t)\Delta y(t) + y(t)\Delta x(t) + \Delta x(t)\Delta y(t).\end{aligned}$$
5. $$\Delta\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) = \frac{y(t)\Delta x(t) - x(t)\Delta y(t)}{y(t)Ey(t)}.$$

Primjedba 2.1 *Osobina 4. se može poopćiti i za slučaj razlike n-tog reda te dobiti tzv.* ***Leibnitzovu formulu*** *za razlike (diferencije):*

$$\Delta^n(x(t)y(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k x(t))(\Delta^{n-k} y(t+k)).$$

Definirajmo operatore E_1 i E_2 koji djeluju, respektivno, na $x(t)$ i $y(t)$, tj.

$$E_1(x(t)y(t)) = x(t+1)y(t), \qquad E_2(x(t)y(t)) = x(t)y(t+1).$$

Iz jednakosti

$$E_1E_2(x(t)y(t)) = x(t+1)y(t+1),$$

slijedi da je $E = E_1E_2$. Definirajmo još i operatore Δ_1 i Δ_2 tako da vrijedi

$$\Delta_i = E_i - I \qquad (i = 1, 2).$$

Zbog toga je

$$\Delta = E - I = E_1E_2 - I = (I + \Delta_1)E_2 - I = E_2 + \Delta_1 E_2 - I = \Delta_2 + \Delta_1 E_2$$

i

$$\Delta^n(x(t)y(t)) = (\Delta_2 + \Delta_1 E_2)^n (x(t)y(t)).$$

Koristeći binomni razvoj, konačno dobijamo

$$\begin{aligned} \Delta^n(x(t)y(t)) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k} \Delta_1^k E_2^k \right)(x(t)y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k x(t))(\Delta^{n-k} y(t+k)). \end{aligned}$$

Navedimo sada neke formule za izračunavanje diferencija nekih posebnih funkcija (nešto što podsjeća na tablicu izvoda osnovnih funkcija).

Teorem 2.2 *Neka je a konstanta. Tada vrijedi*

1. $\Delta a = 0.$
2. $\Delta a^t = (a-1)a^t.$
3. $\Delta \sin at = 2sin\frac{a}{2}cosa(t+\frac{1}{2}).$
4. $\Delta \cos at = -2sin\frac{a}{2}sina(t+\frac{1}{2}).$
5. $\Delta \log at = log(1+\frac{1}{t}).$

6. $\Delta \log \Gamma(t) = logt.$

Dokaz:
Prvih pet osobina se jednostavno dokazuju.

$$6. \qquad \Delta \log \Gamma(t) = \log \Gamma(t+1) - \log \Gamma(t) = \log \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = \log \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t)} = \log t.$$

■

Teorem 2.3

$$1. \qquad \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0}$$

$$2. \qquad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k \right) = x_n.$$

Neka je

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$$

polinom stepena k. Tada je

$$\begin{aligned} \Delta P_k(n) &= \Big[a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \ldots + a_k\Big] - \Big[a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k\Big] = \\ &= a_0 k n^{k-1} + \textit{članovi stepena manjeg od (k-1)}. \end{aligned}$$

Slično se može pokazati da je

$$\Delta^2 P_k(n) = a_0 k(k-1)n^{k-2} + \textit{članovi stepena manjeg od (k-2)}.$$

Nastavljajući ovaj postupak k puta, dobije se

$$\Delta^k P_k(n) = a_0 k!,$$

odnosno

$$\Delta^{k+i} P_k(n) = 0 \quad za \quad i \geq 1.$$

Slično se razmatranje može provesti i u slučaju operatora E.

Neka je sada

$$P_k(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \ldots + a_k I. \tag{2.6}$$

Tada je

$$\begin{aligned} P_k(E)b^n &= \Big(a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \ldots + a_k I\Big)\, b^n = a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \ldots + a_k b^n \\ &= b^n \Big(a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \ldots + a_k\Big) = b^n P_k(b). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi formula

$$P_k(E)b^n = b^n P_k(b).$$

Teorem 2.4 *Neka je $P_k(E)$ polinom dat sa (2.6) i neka je $g(n)$ neka diskretna funkcija. Tada vrijedi*

$$P_k(E)(b^n g(n)) = b^n P_k(bE)g(n).$$

Znamo da u diferencijalnom računu vrijedi

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}. \tag{2.7}$$

Nažalost, diferencija stepena je komplicirana i kao rezultat nije mnogo upotrebljiva:

$$\begin{aligned}\Delta_t t^n &= (t+1)^n - t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k - t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k.\end{aligned}$$

Ipak je moguće doći do formule za diferencije koja je analogna formuli (2.7), ali je umjesto stepene funkcije t^n potrebno uvesti jednu posebnu funkciju. Sljedeća definicija uvodi takvu funkciju koja će zadovoljiti neku verziju uloge stepene funkcije za konačne razlike.

Definicija 2.3 ***Stepen padajućeg faktoriela*** *$t^{(r)}$ (čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable r, na sljedeći način:*

1. *Ako je $r = 1, 2, 3, ...,$ tada $t^{(r)} = t(t-1)\cdots(t-r+1)$.*
2. *Ako je $r = 0$, tada $t^{(0)} = 1$.*
3. *Ako je $r = -1, -2, -3, ...,$ tada $t^{(r)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}$.*
4. *Ako r nije cio broj, tada $t^{(r)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$.*

Definicija 2.4 ***Općeniti binomni koeficijent*** *$\binom{t}{r}$, $(t, r \in \boldsymbol{R})$ se definira kao*

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)}.$$

Binomni koeficijenti zadovoljavaju mnoge korisne identitete, od kojih su za nas posebno značajna sljedeća tri.

Lema 2.1

$$\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r} \qquad \textit{simetrija},$$

$$\binom{t}{r} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{izvlačenje ispred zagrade},$$

$$\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{adiciona formula.}$$

Sljedeći teorem daje rezultate u slučaju primjene diferentnog operatora na stepen padajućeg faktorijela, slične rezultatima diferenciranja stepena, te i rezultate primjene operatora Δ na opće binomne koeficijente.

Teorem 2.5

1. $\Delta_t t^{(r)} = rt^{(r-1)}$.
2. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0)$.
3. $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$.

Posljedica 2.1 *Za fiksne $k \in Z^+$ i $x \in R$, vrijedi*

1. $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$,
2. $\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{(k-n)}$,
3. $\Delta^k x^{(k)} = k! \quad .$

Potrebno je uvesti pojam operatora Δ^{-1}, koji je ustvari pravi inverzni operator diferentnog operatora Δ i koga ćemo zvati *antidiferentnim operatorom.* Zato ćemo zahtjevati da operator Δ^{-1} bude definiran na način da vrijedi

$$\Delta[\Delta^{-1}x(t)] = \Delta^{1-1}x(t) = \Delta^0 x(t) = x(t), \tag{2.8}$$

za sve t iz domena funkcije x.

Drugim riječima, $\Delta^{-1}x$ definirao bi se kao funkcija čija je razlika prvog reda upravo funkcija x.

Definicija 2.5 *Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva* ***antidiferencijom*** *ili* ***neodređenom sumom*** *od x i označava sa $\Delta^{-1}x$ ili Σx, to jest*

$$\textit{ako} \quad \textit{je} \quad \Delta X(t) = x(t), \quad \textit{tada} \quad \textit{je} \quad \Delta^{-1}x(t) = X(t).$$

U skladu s ovim razmatranjem definirajmo sada općenito Δ^{-n} $(n \in \mathbf{N})$:

$$\Delta^{-n}x(t) = \Delta^{-1}(\Delta^{-n+1}X(t)).$$

Uočimo da je antidiferentni operator ustvari analogan neodređenom intagralu iz diferencijalnog računa. Jednostavno se vidi da neodređeni integral igra sličnu ulogu u diferencijalnom računu, jer vrijedi

$$\frac{d}{dt}(\int x(t)dt) = x(t).$$

Međutim, znamo da neodređeni integral nije jedinstven, na primjer

$$\int \cos t dt = \sin t + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Kao što se vidi iz narednog primjera, ni antidiferencija nije jedinstvena.

Teorem 2.6 *Ako je $y(t)$ antidiferencija od $x(t)$, tada je svaka antidiferencija od $x(t)$ data sa*

$$\Delta^{-1}x(t) = y(t) + C(t), \tag{2.9}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija x i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$.

Primjedba 2.2 *Iz prethodnog teorema slijedi jedna vrlo važna osobina o vezi između diferentnog i antidiferentnog operatora. Naime, uz pretpostavku tog teorema imamo da je*

$$\Delta y(t) = x(t). \tag{2.10}$$

Zamjenom veze (2.10) u (2.9) dobijamo

$$\Delta^{-1}x(t) = \Delta^{-1}\Delta y(t) = y(t) + C(t).$$

Dakle, općenito vrijedi

$$\Delta^{-1}\Delta f(t) = f(t) + C(t), \tag{2.11}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija f i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$.

Prema tome, poredeći relacije (2.11) i (2.8) zaključujemo da je

$$\Delta\Delta^{-1} = I \quad i \quad \Delta^{-1}\Delta \neq I,$$

to jest ***zakon komutacije za operatore*** Δ *i* Δ^{-1} ***ne vrijedi****.*

Posljedica 2.2 *Neka je funkcija x definirana na skupu $a, a+1, \ldots,$ gdje je a bilo koji realan broj, a neka je funkcija y antidiferencija od x. Tada svaka antidiferencija od x ima oblik*

$$\Delta^{-1}x(t) = y(t) + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

Teorem 2.7 *Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ funkcija za koju je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi*

1. $\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t)$, $(a \neq 1)$.
2. $\Delta^{-1}\sin at = -\frac{\cos a(t-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)$, $(a \neq 2n\pi)$.
3. $\Delta^{-1}\cos at = \frac{\sin a(t-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)$, $(a \neq 2n\pi)$.
4. $\Delta^{-1}\log t = \log\Gamma(t) + C(t)$, $t > 0$.
5. $\Delta^{-1}t^{(a)} = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C(t)$, $(a \neq -1)$.
6. $\Delta^{-1}\binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + C(t)$.
7. $\Delta^{-1}\binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + C(t)$.

Teorem 2.8

1. $\Delta^{-1}(x(t) + y(t)) = \Delta^{-1}x(t) + \Delta^{-1}y(t)$.
2. $\Delta^{-1}(\alpha x(t)) = \alpha\Delta^{-1}x(t)$, *ako je α konstanta.*
3. $\Delta^{-1}(x(t)\Delta y(t)) = x(t)y(t) - \Delta^{-1}(Ey(t)\Delta x(t))$.
4. $\Delta^{-1}(Ex(t)\Delta y(t)) = x(t)y(t) - \Delta^{-1}(y(t)\Delta x(t))$.

Definirajmo sada inverzni operator translacijskog opratora.

Definicija 2.6 *Ako je X funkcija za koju je EX upravo funkcija x, tada ćemo pisati $E^{-1}x = X$, to jest*

$$\textit{ako je} \quad EX(t) = x(t), \textit{tada je} \quad E^{-1}x(t) = X(t).$$

3. Linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Promatrajmo diferentnu jednadžbu k-tog reda:

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \ldots + p_k x_n = 0 \qquad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots) \tag{3.1}$$

gdje su p_i konstante i $p_k \neq 0$. Naš cilj je da nađemo fundamentalni skup rješenja i shodno tome opće rješenje jednadžbe (3.1). Procedura je relativno jednostavna.

Pretpostavimo da rješenja jednadžbe (3.1) imaju oblik λ^n, gdje je λ kompleksan broj. Zamjenom ove vrijednosti u jednadžbu (3.1) dobijamo:

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0. \tag{3.2}$$

Ova jednadžba se naziva **karakterističnom jednadžbom** diferentne jednadžbe (3.1), a njeni korijeni λ se nazivaju **karakterističnim korijenima**.

Primjetimo da, zbog $p_k \neq 0$, nijedan od karakterističnih korijena nije jednak nuli. Razmotrit ćemo dva slučaja.

1. Slučaj ***a.*** *Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ međusobno različiti. Tada vrijedi sljedeći teorem.*

Teorem 3.1 *Ako su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ međusobno različiti, tada je skup $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ fundamentalni skup rješenja jednadžbe (3.1).*

Dokaz: Da bismo pokazali da je skup $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ fundamentalni skup rješenja, koristit ćemo Teorem 4.2 i pokazati da je $W(0) \neq 0$, gdje je $W(n)$ Casoratian tih rješenja. Naime,

$$W(0) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Ova determinanta je poznata kao *Vandernomdeova determinanta* i može se pokazati da je $W(0) = \prod_{1 \leq j \leq k} (\lambda_j - \lambda_k)$. U ovom slučaju $W(0) \neq 0$, zbog pretpostavke da su svi karakteristični korijeni međusobno različiti, a što dokazuje da je $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ fundamentalni skup rješenja jednadžbe (3.1). Iz toga slijedi da je opće rješenje jednadžbe (3.1) dato sa

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \tag{3.4}$$

gdje je a_i kompleksan broj. ■

Primjer 3.1 *Data je diferentna jednadžba*

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3.5}$$

1. *Naći opće rješenje date jednadžbe.*
2. *Naći rješenje date jednadžbe uz početne uvjete $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$.*

Rješenje:

1. Odgovarajuća karakteristična jednadžba ima oblik

   $$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

   odakle se dobijaju karakteristične vrijednosti $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, pa je fundamentalni skup rješenja $\{2^n, 5^n\}$. Opće rješenje date diferentne jednadžbe ima oblik

   $$x_n = C_1 2^n + C_2 5^n. \tag{3.6}$$

2. Koristeći opće rješenje (3.6) i početne uvjete, imamo

   $$\begin{aligned} n &= 0 \Rightarrow 1 = x_0 = C_1 + C_2, \\ n &= 1 \Rightarrow 2 = X_1 = 2C_1 + 5C_2. \end{aligned}$$

   Odavde se dobija $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, pa je traženo rješenje PPV: $x_n = 2^n$.

♣

2. Slučaj ***b.*** *Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ različiti sa višestrukostima $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respektivno, pri čemu je*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = k.$$

U ovom slučaju jednadžba (3.1) se može zapisati kao :

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x_n = 0. \tag{3.7}$$

Uočimo da, ako su $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(m_i)}$ rješenja jednadžbe

$$(E-\lambda_i)^{m_i} x_n = 0, \tag{3.8}$$

onda su ona, također, rješenja i jednadžbe (3.7). Naime, ako je $\xi_n^{(t)}$ rješenje jednadžbe (3.8), to jest vrijedi $(E-\lambda_i)^{m_i}\xi_n^{(t)} = 0$, tada imamo

$$\begin{aligned} & (E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\cdots(E-\lambda_r)^{m_r}\xi_n^{(t)} \\ = & (E-\lambda_1)^{m_1}\cdots(E-\lambda_{i-1})^{m_i-1}(E-\lambda_{i-1})^{m_i+1}\cdots(E-\lambda_r)^{m_r}(E-\lambda_i)^{m_i}\xi_n^{(t)} \\ = & \; 0\ . \end{aligned}$$

Pretpostavimo da možemo naći fundamentalni skup rješenja za sve jednadžbe (3.8), $1 \le i \le r$. Za očekivati je da unija ovih r fundamentalnih skupova bude fundamentalni skup rješenja jednadžbe (3.7).

Sljedeća lema će nam pomoći da pokažemo da to zaista vrijedi.

Lema 3.1 *Skup* $S_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ *je fundamentalni skup rješenja jednadžbe (3.8).*

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da je $n^s\lambda_i^n$, $1 \le s \le m_i - 1$ rješenje jednadžbe (3.8). Naime, prema osobini operatora E i osobini diferentnog operatora

$$\Delta^m(n^k) = 0$$

za sve $m > k$, imamo:

$$\begin{aligned} (E-\lambda_i)^{m_i}(n^s\lambda_i^n) &= \lambda_i^n(\lambda_i E - \lambda_i)^{m_i}(n^s) \\ &= \lambda_i^{n+m_i}(E-I)^{m_i}(n^s) \\ &= \lambda_i^{n+m_i}\Delta^{m_i}(n^s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Kako je $\lambda_i \neq 0$, te budući da je i skup $\{1, n, n^2, \ldots, n^{m_i-1}\}$ linearno nezavisan za sve $n \ge n_0$, sa bilo kojim $n_0 \ge 0$, to je i skup S_i je linearno nezavisan. ■

Na osnovu prethodnog, sada smo u mogućnosti da nađemo fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (3.1) (dokaz ćemo izostaviti zbog kompliciranosti).

Teorem 3.2 *Skup*

$$S = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$$

je fundamentalni skup rješenja jednadžbe (3.1).

Posljedica 3.1 *Opće rješenje jednadžbe (3.1) je dato sa:*

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n (C_{i0} + C_{i1}n + C_{i2}n^2 + \ldots + C_{im_{i-1}}n^{m_i-1}. \tag{3.9}$$

Dokaz: Slijedi neposredno iz Leme 2.1 i Teorema 2.2. ■

Primjer 3.2 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 4x_n = 0$$

$$x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Rješenje: Odgovarajuća karakteristična jednadžba je

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0,$$

a karakteristični korijeni su $\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Opće rješenje je:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 2^n + C_2 n 2^n + D_1 1^n \\ &= C_1 2^n + C_2 n 2^n + D_1. \end{aligned}$$

Da bismo odredili konstante C_1,C_2 i D_1, koristimo početne vrijednosti

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + D_1 = 0 \\ x_1 &= 2C_1 + 2C_2 + D_1 = -1 \\ x_2 &= 4C_1 + 8C_2 + D_1 = 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo

$$\begin{aligned} C_1 &= -5, \\ C_2 &= 2, \\ D_1 &= 5. \end{aligned}$$

Prema tome, traženo rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} x_n &= -5 \cdot 2^n + n2^{n+1} + 5 \\ &= (2n-5) \cdot 2^n + 5. \end{aligned}$$

♣

Pretpostavimo sada da među korijenima karakteristične jednadžbe ima **kompleksnih**, koji se, kao što znamo pojavljuju u parovima konjugirano kompleksnih brojeva. Pokazaćemo da svakom takvom paru odgovaraju dva realna linearno nezavisna rješenja. Neka je $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$. Tada je

$$\lambda_{1,2} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta), \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \theta \neq k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

odakle slijedi

$$x_n = \lambda_1^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Odavde se vidi da karakterističnom korijenu λ_1 odgovara dva realna rješenja

$$x_n^{(1)} = r^n \cos n\theta, \quad x_n^{(2)} = r^n \sin n\theta, \tag{3.10}$$

koja su linearno nezavisna. Zaista, za njihov Casoratian vrijedi

$$W(0) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r\cos\theta & r\sin\theta \end{bmatrix} = r\sin\theta \neq 0.$$

S druge strane, konjugirano komplesnom korijenu λ_2 odgovaraju realna rješenja

$$x_n^{*(1)} = r^n \cos n\theta, \quad x_n^{*(2)} = -r^n \sin n\theta, \tag{3.11}$$

koja su očito linearno zavisna sa rješenjima (3.10). Prema tome, paru konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe odgovaraju linearno nezavisna realna rješenja oblika (3.10) ili (3.11).

Ako, međutim, konjugirano kompleksni par korijena karakteristične jednadžbe ima viestrukost m, onda su odgovarajuća fundamentalna (linearno nezavisna) rješenja:

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin\theta, nr^n \cos n\theta, nr^n \sin\theta, \dots, n^{m-1}r^n \cos n\theta, n^{m-1}r^n \sin\theta.$$

Zaključujemo da se pronalaženjem svih fundamentalnih rješenja koja odgovaraju svim realnim korijenima i svih rješenja koja odgovaraju svim parovima konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe , dobija fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (3.1).

Primjer 3.3 *Riješiti jednadžbu*

$$3x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Rješenje: Iz karakteristične jednadžbe $3\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$ dobijamo

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Zbog toga je opće rješenje promatrane jednadžbe

$$x_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left[c_1\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

pri čemu su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. ♣

4. Linearne nehomogene jednadžbe

Do sada smo razmatrali linearne homogene diferentne jednadžbe, a u slučaju takvih jednadžbi s konstantnim koeficijentima pokazali smo kako se konstruira njihovo opće rješenje. Otvorenim je ostalo pitanje rješavanja linearnih nehomogenih jednadžbi. Zbog toga ćemo se sada fokusirati na rješavanje linearne nehomogene jednadžbe k-tog reda

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = r_n, \tag{4.1}$$

gdje su, kako smo to na početku ovog poglavlja istakli, $p_i(n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ i r_n funkcije realnih vrijednosti definirane za $n \geq n_0$ (tj. realni nizovi) i pri čemu je $p_k(n) \neq 0$ za sve $n \geq n_0$.

Logično je, naravno, kao i u slučaju homogene jednadžbe, postaviti sljedeće pitanje: Da li rješenja jednadžbe (4.1) formiraju vektorski prostor? Drugim riječima, da li je linearna kombinacija dva rješenja jednadžbe (4.1), također, rješenje jednadžbe (4.1)?

Odgovor na ova pitanja daje sljedeći primjer.

Primjer 4.1 *Promatrajmo jednadžbu*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 3 \cdot 2^n.$$

1. *Pokazati da su* $x_n^{(1)} = -(3n-1) \cdot 2^{n-1}$ *i* $x_n^{(2)} = -3n \cdot 2^{n-1}$ *rješenja date jednadžbe.*

2. *Pokazati da* $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ *nije rješenje date jednadžbe .*

3. *Pokazati da* $x_n = Cn(2^{n-1})$ *nije rješenje date jednadžbe, gdje je* C *konstanta.*

Rješenje:

1. Neposrednim uvrštavanjem nizova $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ u datu jednadžbu, vidi se da su to zaista njena rješenja.

2. Imamo $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)} = 2^{n-1}$. Zamjenjujući ovo u datu jednadžbu, dobijamo
$$2^{n+1} - 5 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{n-1} = 2^n(2 - 5 + 3) = 0 \neq 3 \cdot 2^n.$$
3. Zamjenom x_n u datu jednadžbu, lahko se vidi da taj niz nije njeno rješenje.

♣

Iz prethodnog primjera može se izvući sljedeći **zaključak**.

1. Nasuprot homogenim diferentnim jednadžbama, rješenja nehomogenih diferentnih jednadžbi ne formiraju vektorski prostor. Ni suma (razlika), ni proizvod rješenja nehomogene jednadžbe nije (općenito) njeno rješenje.
2. Iz dijela 2. vidi se da razlika rješenja $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ nehomogene jednadžbe je zapravo rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe.

Na taj način može se iskazati općenitiji rezultat.

Teorem 4.1 *Ako su $x_n^{(1)}$ i $x_n^{(2)}$ rješenja jednadžbe (4.1), onda je $x_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe.*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0. \tag{4.2}$$

Dokaz: Oduzimanjem jednakosti

$$\begin{aligned} x_{n+k}^{(1)} + p_1(n)x_{n+k-1}^{(1)} + \ldots + p_k(n)x_n^{(1)} &= r_n, \\ x_{n+k}^{(2)} + p_1(n)x_{n+k-1}^{(2)} + \ldots + p_k(n)x_n^{(2)} &= r_n, \end{aligned}$$

dobija se

$$\begin{aligned} 0 &= \left[x_{n+k}^{(1)} - x_{n+k}^{(2)}\right] + p_1(n)\left[x_{n+k-1}^{(1)} - x_{n+k-1}^{(2)}\right] + \ldots + p_k(n)\left[x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\right] \\ &= x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n. \end{aligned}$$

■

Uobičajeno je da se opće rješenje homogene jednadžbe (4.2) naziva **komplementarnim rješenjem** nehomogene jednadžbe (4.1) i označava se sa $x_n^{(c)}$.

Bilo koje rješenje nehomogene jednadžbe (4.1) zvaćemo **partikularnim rješenjem** jednadžbe (4.1) i označavaćemo ga sa $x_n^{(p)}$.

Budući da odranije znamo kako se određuje komplementarno rješenje nehomogene jednadžbe (4.1), to je sada moguće znati i njeno opće rješenje.

Teorem 4.2 *Bilo koje (tj. opće) rješenje jednadžbe (4.1) može se napisati kao*

$$x_n = x_n^{(p)} + x_n^{(c)} = x_n^{(p)} + \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^{(i)}, \tag{4.3}$$

gdje je $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$ *fundamentalni skup rješenja homogene jednadžbe (4.2).*

Dokaz: Primjetimo da je $x_n - x_n^{(p)}$ rješenje homogene jednadžbe (4.2). Prema tome,

$$x_n - x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^{(i)}$$

za neke konstante a_i. ■

U mnogim slučajevima jako je teško naći opće rješenje nehomogene jednadžbe. No, situacija je nešto povoljnija kada su u pitanju linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Za takve slučajeve preostaje još samo pronaći način kako se određuje partikularno rješenje $x_n^{(p)}$. Postoje različiti metodi za njihovo određivanje i naredno izlaganje biće posvećeno upravo nekim od tih metoda. Riječ je o sljedećim metodama: *metod varijacije konstanti i metod operatora.*

5. Metod varijacije konstanti

Metod varijacije konstanti se uglavnom koristi u slučaju neautonomne diferentne jednadžbe, to jest jednadžbe s nekonstantnim koeficijentima, oblika (4.1), iako se uspješno koristi i u slučaju linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. U ovom metodu polazi se od komplementarnog rješenja promatrane nehomogene jednadžbe

$$x_n^{(c)} = \sum_{i=1}^{k} C_i x_n^{(i)},$$

gdje su C_i konstante a $x_n^{(i)}$ čine fundamentalni skup rješenja odgovarajuće homogene jednadžbe. Pretpostavit ćemo da su C_i nizovi (funkcije od n), odnosno $C_i = u_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, tako da

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} x_n^{(i)} \tag{5.1}$$

bude rješenje nehomogene diferentne jednadžbe (4.1). Drugim rječima partikularno rješenje jednadžbe (4.1) tražićemo u obliku (5.1), gdje su $u_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ nepoznati nizovi koje treba odrediti. Prethodno se prisjetimo da se jednadžba (4.1) može pisati u obliku

$$P_k(E)x_n = r_n,$$

gdje je

$$P_k(E) = E^k + p_1(n)E^{k-1} + p_2(n)E^{k-2} + \ldots + p_k(n)I.$$

Međutim, kako je $E = \Delta + I$, jednadžba (4.1) se može pisati i u obliku

$$Q_k(\Delta)x_n = r_n, \tag{5.2}$$

gdje je

$$Q_k(\Delta) = \Delta^k + q_1(n)\Delta^{k-1} + q_2(n)\Delta^{k-2} + \ldots + q_k(n)I,$$

a $q_i(n)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ su funkcije od $p_i(n)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Da bismo odredili nizove $u_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ potrebno je (5.1) uvrstiti u (5.2). U tu svrhu moramo naći razlike za $x_n^{(p)}$ do k-tog reda zaključno. U svakom koraku primjene diferentnog operatora izjednačićemo s nulom sume u kojima se pojavljuju razlike $\Delta u_n^{(i)}$ nepoznatih nizova $u_n^{(i)}$ (dakle, kao u slučaju kada su ti nizovi konstantni). Prema teoremu 4^o, imamo

$$
\begin{aligned}
x_n^{(p)} &= \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} x_n^{(i)}, \\
\Delta x_n^{(p)} &= \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} \Delta x_n^{(i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)}}_{0}, \\
\Delta^2 x_n^{(p)} &= \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} \Delta^2 x_n^{(i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \Delta x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)}}_{0}, \\
&\vdots \\
\Delta^{k-1} x_n^{(p)} &= \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} \Delta^{k-1} x_n^{(i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \Delta^{k-2} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)}}_{0}, \\
\Delta^{k} x_n^{(p)} &= \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} \Delta^{k} x_n^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} \Delta^{k-1} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)}.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Pomnožimo li redom jednakosti (5.3) sa $q_k(n), q_{k-1}(n), \ldots, q_1(n), 1$ i sve ih saberemo, dobijamo

$$
Q_k(\Delta) x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} u_n^{(i)} (Q_k(\Delta) x_n^{(i)}) + \sum_{i=1}^{k} \Delta^{k-1} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)}.
$$

S obzirom da su $x_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ rješenja odgovarajuće homogene jednadžbe, imamo da je $Q_k(\Delta) x_n^{(i)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Zbog $Q_k(\Delta) x_n = r_n$, preostaje

$$
\sum_{i=1}^{k} \Delta^{k-1} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)} = r_n.
$$

Na taj način dobili smo sljedeći sistem diferentnih jednadžbi s nepoznatim nizovima $u_n^{(i)}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)} &= 0, \\
\sum_{i=1}^{k} \Delta x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)} &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \Delta^{k-2} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)} &= 0, \\
\sum_{i=1}^{k} \Delta^{k-1} x_{n+1}^{(i)} \Delta u_n^{(i)} &= r_n.
\end{aligned}$$

Taj sistem se može promatrati kao sistem linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznanicama $\Delta u_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Determinanta ovog sistema je Casoratian fundamentalnog skupa rješenja odgovarajuće homogene diferentne jednadžbe (to jest različita je od nule), pa sistem ima jedinstveno rješenje

$$\Delta u_n^{(i)} = \varphi_n^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

iz čega slijedi

$$u_n^{(i)} = \Delta^{-1} \varphi_n^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Uvrstivši nađene nizove $u_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ u pretpostavljeno rješenje (5.1), dobijamo partikularno rješenje (3.1), a time i njeno opće rješenje.

Primjer 5.1 *Metodom varijacije konstanti riješiti diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1 - 3n + n^2 + 2^n.$$

Rješenje: Komplementarno rješenje, tj. opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe je $x_n^{(c)} = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$. Prema metodu varijacije konstanti, partikularno rješenje date jednadžbe tražimo u obliku

$$x_n = u_n^{(1)} + u_n^{(2)} \cdot 2^n,$$

gdje su $u_n^{(1)}$ i $u_n^{(2)}$ nizovi koje treba odrediti.

Odredimo Δx_n:

$$\begin{aligned}
\Delta x_n &= u_{n+1}^{(1)} + u_{n+1}^{(2)} \cdot 2^{n+1} - u_n^{(1)} - u_n^{(2)} \cdot 2^n = \\
&= \Delta u_n^{(1)} + 2 \cdot 2^n \Delta u_n^{(2)} + 2^n u_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Prvi uvjet je

$$\Delta u_n^{(1)} + 2 \cdot 2^n \Delta u_n^{(2)} = 0 \tag{5.5}$$

pa ostaje

$$\Delta x_n = 2^n u_n^{(2)}.$$

Potražimo sada $\Delta^2 x_n$:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 x_n &= 2 \cdot 2^n u_{n+1}^{(2)} - 2^n u_n^{(2)} - 2^n u_n^{(2)} + 2^n u_n^{(2)} = \\
&= 2 \cdot 2^n \Delta u_n^{(2)} + 2^n u_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$(E^2 - 3E + 2I)x_n = (\Delta^2 + 2\Delta + I - 3\Delta - 3I + 2I)x_n = (\Delta^2 - \Delta)x_n,$$

drugi uvjet je:

$$(\Delta^2 - \Delta)x_n = 1 - 3n + n^2 + 2^n,$$

odnosno,

$$2 \cdot 2^n \Delta u_n^{(2)} = 1 - 3n + n^2 + 2^n. \tag{5.6}$$

Iz sistema jednadžbi (5.5) i (5.6) određujemo $\Delta u_n^{(1)}$ i $\Delta u_n^{(2)}$:

$$\Delta u_n^{(1)} = -1 + 3n - n^2 - 2^n, \quad \Delta u_n^{(2)} = \frac{1}{2^{n+1}} - 3 \cdot \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n^2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}.$$

Zbog linearnosti operatora Δ^{-1} imamo

$$u_n^{(1)} = -\Delta^{-1}(1) + 3\Delta^{-1}(n) - \Delta^{-1}(n^2) - \Delta^{-1}(2^n)$$

i

$$u_n^{(2)} = \Delta^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 3\Delta^{-1}\left(\frac{n}{2^{n+1}}\right) + \Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\Delta^{-1}(1).$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(1) &= n, \\
\Delta^{-1}(n) &= \Delta^{-1}(n^{(1)}) = \frac{n^{(2)}}{2} = \frac{n^2 - n}{2}, \\
\Delta^{-1}(n^2) &= \frac{n^{(3)}}{3} + \frac{n^{(2)}}{2} = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1), \\
\Delta^{-1}(2^n) &= 2^n,
\end{aligned}$$

to je

$$u_n^{(1)} = -\frac{8}{3}n + 2n^2 - \frac{n^3}{3} - 2^n + C_1.$$

Isto tako, zbog

$$\Delta^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2^n},$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{2^{n+1}}\right) &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{n^2}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{E - I}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n^2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\frac{1}{2}E - I}\left(\frac{n^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{E-2I}(n^2) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{I-\Delta}(n^2) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n (I+\Delta+\Delta^2+\ldots)(n^{(2)}+n^{(1)}) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n (n^{(2)}+n^{(1)}+2n^{(1)}+1+2) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^n (n^2+2n+3)
\end{aligned}$$

i

$$\Delta^{-1}\left(\frac{n}{2^{n+1}}\right) = -\frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n},$$

dobijamo

$$2^n \cdot u_n^{(2)} = -1 + n - n^2 + \frac{n}{2}2^n + C_2 2^n.$$

Konačno, opće rješenje promatrane jednadžbe je

$$x_n = D_1 + D_2 2^n - \frac{5n}{3} + n^2 - \frac{n^3}{3} + n2^{n-1},$$

gdje su D_1 i D_2 proizvoljne konstante.♣

6. Metod operatora

Ovaj metod u nekim situacijama daje najbrži način određivanja partikularnog rješenja nehomogene linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Osnovna ideja metoda je da, startajući od diferentne jednadžbe

$$P_k(E)x_n = r_n, \tag{6.1}$$

gdje je

$$P_k(E) = E^k + p_1 E^{k-1} + p_2 E^{k-2} + \ldots + p_k I,$$

određujemo partikularno rješenje pomoću relacije

$$x_n^{(p)} = [P_k(E)]^{-1} r_n.$$

Pri tome je $[P_k(E)]^{-1}$ inverzni operator operatora $P_k(E)$, to jest operator koji ima osobinu $P_k(E)\,[P_k(E)]^{-1} r_n = r_n$.

Teorem 6.1 *Operator $[P_k(E)]^{-1}$ je linearan.*

Dokaz: Neka je

$$[P_k(E)]^{-1} r_n^{(1)} = u_n^{(1)}, \quad [P_k(E)]^{-1} r_n^{(2)} = u_n^{(2)}. \tag{6.2}$$

Tada, prema definiciji inverznog operatora, ako su $u_n^{(1)}$ i $u_n^{(2)}$ nizovi, imamo

$$P_k(E)u_n^{(1)} = r_n^{(1)}, \quad P_k(E)u_n^{(2)} = r_n^{(2)}.$$

Budući da je $P_k(E)$ linearan operator, to implicira da vrijedi

$$P_k(E)\left[u_n^{(1)} + u_n^{(2)}\right] = r_n^{(1)} + r_n^{(2)},$$

tako da je

$$[P_k(E)]^{-1}\left[r_n^{(1)} + r_n^{(2)}\right] = u_n^{(1)} + u_n^{(2)},$$

ili, koristeći (6.2),

$$[P_k(E)]^{-1}\left[r_n^{(1)} + r_n^{(2)}\right] = [P_k(E)]^{-1} r_n^{(1)} + [P_k(E)]^{-1} r_n^{(2)}. \tag{6.3}$$

Pretpostavimo sada da je $\alpha \neq 0$ proizvoljna konstanta, a r_n bilo koji niz. Neka je

$$[P_k(E)]^{-1} \alpha r_n = u_n. \tag{6.4}$$

Tada je

$$P_k(E)u_n = \alpha r_n.$$

Nakon dijeljenja sa α posljednje jednakosti, zbog činjenice da je operator $P_k(E)$ linearan, imamo

$$P_k(E)\frac{u_n}{\alpha} = r_n,$$

odnosno

$$[P_k(E)]^{-1} r_n = \frac{u_n}{\alpha} \Rightarrow u_n = \alpha [P_k(E)]^{-1} r_n.$$

Zamjenom dobijenog izraza za u_n u (6.4), konačno slijedi

$$[P_k(E)]^{-1} \alpha r_n = \alpha [P_k(E)]^{-1} r_n. \tag{6.5}$$

Relacije (6.2) i (6.4) pokazuju da je operator $[P_k(E)]^{-1}$ zaista linearan. ■

Vrijedi sljedeće relacije:

$$P_k(E)b^n = b^n P_k(b), \tag{6.6}$$

$$P_k(E)(b^n r_n) = b^n P_k(bE) r_n. \tag{6.7}$$

Navedimo sada još neke važne činjenice, koje će nam biti od značajne koristi u primjeni metoda operatora pri rješavanju jednadžbe (6.1).

Teorem 6.2 *Neka je $P_k(b) \neq 0$. Tada je*

$$[P_k(E)]^{-1} b^n = \frac{b^n}{P_k(b)}. \tag{6.8}$$

Dokaz: Primjenjujući operator $[P_k(E)]^{-1}$ na obje strane jednakosti (6.6), zbog (6.5), dobije se

$$[P_k(E)]^{-1} P_k(E)b^n = P_k(b) [P_k(E)]^{-1} (b^n)$$

ili

$$b^n = P_k(b) [P_k(E)]^{-1} (b^n),$$

odakle neposredno slijedi jednakost (6.8). ■

Uočimo da se prethodni teorem može primjeniti i u slučajevima kada treba naći $[P_k(E)]^{-1} \sin \alpha n$ ili $[P_k(E)]^{-1} \cos \alpha n$. Dovoljno je napisati

$$\cos \alpha n = \frac{e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}}{2}, \quad \sin \alpha n = \frac{e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n}}{2i},$$

a onda primjeniti formulu (6.8) i linearnost operatora $[P_k(E)]^{-1}$.

Teorem 6.3 *Vrijedi relacija*

$$[P_k(E)]^{-1}\, b^n r_n = b^n\, [P_k(bE)]^{-1}\, r_n. \tag{6.9}$$

Dokaz: Neka je $s_n = [P_k(bE)]^{-1}\, r_n$, tako da je $P_k(bE)s_n = r_n$. Koristeći relaciju (6.7), imamo

$$P_k(E)b^n s_n = b^n P_k(bE)s_n = b^n r_n.$$

Odavde, primjenom operatora $[P_k(bE)]^{-1}$, dobijamo

$$[P_k(E)]^{-1}\, b^n r_n = b^n s_n = b^n\, [P_k(bE)]^{-1}\, r_n.$$

■

Promatrajmo sada niz $b^n Q_m(n)$, gdje je $Q_m(n)$ polinom po n stepena m. Definirajmo niz

$$\omega_n = [P_k(E)]^{-1}\, b^n Q_m(n).$$

Jasno je da vrijedi

$$\Delta^{m+1} Q_m(n) = 0. \tag{6.10}$$

S druge strane, iz (6.9) slijedi

$$\omega_n = [P_k(E)]^{-1}\, b^n Q_m(n) = b^n\, [P_k(bE)]^{-1}\, Q_m(n).$$

Ako zamijenimo E sa $I + \Delta$, tada operator $[P_k(E)]^{-1}$ možemo razviti u rastući red stepena od Δ:

$$[P_k(E)]^{-1} = [P_k(I+\Delta)]^{-1} = [P_k(I)]^{-1} + \alpha_1\Delta + \alpha_2\Delta^2 + \ldots + \alpha_i\Delta^i + \ldots.$$

Zbog (6.9) i (6.10), imamo

$$\begin{aligned}\omega_n &= [P_k(I+\Delta)]^{-1}\, b^n Q_m(n) = b^n\, [P_k(bI + b\Delta)]^{-1}\, Q_m(n) \\ &= b^n \left([P_k(I)]^{-1} + \alpha_1\Delta + \alpha_2\Delta^2 + \ldots + \alpha_m\Delta^m\right) Q_m(n). \qquad (6.11)\end{aligned}$$

Primjer 6.1 *Odrediti* $(E^2 - 4E + 4I)^{-1} 2^n$.

Rješenje: Kako je $P_2(E) = E^2 - 4E + 4I$ i $P_2(2) = 0$, to se u ovom slučaju ne može prrimjeniti formula (6.8). Međutim, možemo primjeniti formulu (6.9), uzimajući $r_n = 1$ i $b = 2$:

$$\begin{aligned}[P_2(E)]^{-1}\, 2^n &= 2^n\, [P_2(2E)]^{-1}\, (1) = 2^n [4E^2 - 8E + 4I]^{-1}(1) \\ &= 2^n [4(I+\Delta)^2 - 8(I+\Delta) + 4I](1) = 2^n \left[4\Delta^2\right]^{-1} (1) \\ &= \frac{2^n}{4}\Delta^{-1}[\Delta^{-1}(1)] = \frac{2^n}{4}\Delta^{-1} n^{(1)} = \frac{2^n}{4}\frac{n^{(2)}}{2} \\ &= \frac{n(n-1)2^n}{8}.\end{aligned}$$

♣

Na sljedećim primjerima ilustrirat ćemo primjenu metoda operatora pri rješavanju nehomogenih linearnih diferentnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Primjer 6.2 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 5 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n.$$

Rješenje: Jednadžba može biti napisana u obliku

$$(E^2 - 4E + 4I)x_n = 5 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n.$$

Partikularno rješenje je dato sa (koristeći (6.9) i (6.8))

$$\begin{aligned} x_n^p &= (E^2 - 4E + 4I)^{-1}(5 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n) = \\ &= 5(E^2 - 4E + 4I)^{-1}2^n + 4(E^2 - 4E + 4I)^{-1}3^n = \\ &= 5 \cdot 2^n \left[(2E)^2 - 4(2E) + 4I\right]^{-1}(1) + 4 \cdot 3^n = \\ &= \frac{5}{8}n(n-1)2^n + 4 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Kako je komplementarno rješenje $(C_1 + C_2 n)2^n$ (C_1, C_2 proizvoljne konstante), to je opće rješenje date jednadžbe dato sa

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n \cdot 2^n + \frac{5}{8}n^2 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n,$$

pri čemu smo uzeli da je $c_1 = C_1$ i $c_2 = C_2 - \frac{5}{8}$. ♣

Primjer 6.3 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = (2n^2 - n + 1)5^n.$$

Rješenje: Datu jednadžbu napišimo u obliku

$$(E^2 - 5E + 6I)x_n = (2n^2 - n + 1)5^n.$$

Partikularno rješenje je dato sa

$$x_n^{(p)} = (E^2 - 5E + 6I)^{-1}(2n^2 - n + 1)5^n.$$

Prema (6.9), te zbog $E = I + \Delta$, imamo

$$\begin{aligned}
x_n^{(p)} &= 5^n(25E^2 - 25E + 6I)^{-1}(2n^2 - n + 1) \\
&= 5^n\left(25(I+\Delta)^2 - 25(I+\Delta) + 6I\right)^{-1}(2n^2 - n + 1) \\
&= 5^n\left[6I + 25\Delta + 25\Delta^2\right]^{-1}(2n^2 - n + 1) \\
&= 5^n\left[6\left(I + \frac{5}{3}\Delta\right)\left(I + \frac{5}{2}\Delta\right)\right]^{-1}(2n^2 - n + 1) \\
&= \frac{5^n}{6}\left(I - \frac{5}{3}\Delta + \frac{25}{9}\Delta^2 - \dots\right)\left(I - \frac{5}{2}\Delta + \frac{25}{4}\Delta^2 - \dots\right)(2n^2 - n + 1) \\
&= \frac{5^n}{6}\left(I - \frac{25}{6}\Delta + \frac{25\cdot 19}{36}\Delta^2 + \dots\right)(2n^2 - n + 1) \\
&= \frac{5^n}{6}\left[2n^2 - n + 1 - \frac{25}{6}(4n+1) + \frac{25\cdot 19}{36}\cdot 4\right] \\
&= \frac{5^n}{6}\left(2n^2 - \frac{53}{3}n - \frac{893}{18}\right).
\end{aligned}$$

S druge strane, komplementarno rješenje date jednadžbe je $x_n^{(c)} = C_1\cdot 2^n + C_2\cdot 3^n$ (C_1, C_2 proizvoljne konstante). Prema tome, njeno opće rješenje je

$$x_n = C_1\cdot 2^n + C_2\cdot 3^n + \frac{5^n}{6}\left(2n^2 - \frac{53}{3}n - \frac{893}{18}\right).$$

♣

Primjedba 6.1 *Metod operatora može se uspješno koristiti za* ***snižavanje reda linearne diferentne jednadžbe****. Općenito ćemo to demonstrirati na takvim jednadžbama, ali sa konstantnim koeficijentima, a nešto kasnije ćemo pokazati kako se to može uraditi i u slučaju jednadžbi a varijabilnim koeficijentima.*

Pretpostavimo da je diferentna jednadžba n-tog reda data u obliku

$$(E - \lambda_1 I)(E - \lambda_2 I)\dots(E - \lambda_n I)x_n = r_n.$$

Uvodeći smjenu $y_n = (E - \lambda_2 I)\dots(E - \lambda_n I)x_n$, dobićemo jednadžbu

$$(E - \lambda_1 I)y_n = r_n,$$

koja je prvog reda i koju znamo riješiti. Nakon toga, problem rješavanja polazne jednadžbe se svodi na rješavanje jednadžbe (n-1)-og stepena

$$(E - \lambda_2 I)\dots(E - \lambda_n I)x_n = y_n$$

sa već poznatim nizom y_n.

Primjer 6.4 *Riješiti jednadžbu*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n.$$

Rješenje: Data se jednadžba može pisati u obliku

$$(E - 3I)(E - 2I)x_n = n.$$

Zamjenom $y_n = (E - 2I)x_n$, dobijamo jednadžbu

$$\begin{aligned}
(E - 3I)y_n &= n^2 \\
&\Leftrightarrow y_{n+1} - 3y_n = n \\
&\Leftrightarrow \frac{y_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{y_n}{3^n} = \frac{n}{3^{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \Delta\left(\frac{y_n}{3^n}\right) = \frac{n}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Koristeći jednakosti

$$\Delta^{-1}x_n = \sum_{k=m}^{n-1} x_k + C \quad (m \leq n),$$

i

$$\Delta^{-1}x_n = -\sum_{k=n}^{p} x_k + D \quad (p \geq n),$$

za neke konstante C i D, dalje imamo

$$\begin{aligned}
y_n &= 3^n\Delta^{-1}\left(\frac{n}{3^{n+1}}\right) + c_1 \cdot 3^n = 3^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k+1}} + c_1 \cdot 3^n \\
&= 3^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^k} + c_1 \cdot 3^n = 3^{n-1}\left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{3}{4}\right) + c_1 \cdot 3^n \\
&= -\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^n.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(E - 2I)x_n = -\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^n.$$

Kao i maloprije, dobija se opće rješenje polazne jeednadžbe

$$\begin{aligned}
x_n &= 2^n\Delta^{-1}\left(\frac{-\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^n}{2^{n+1}}\right) + c_2 \cdot 2^n \\
&= 2^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-\frac{k}{2} - \frac{1}{4} + C_1 \cdot 3^k}{2^{k+1}} + c_2 \cdot 2^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^n \left(-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{C_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \right) + c_2 \cdot 2^n \\
&= \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n,
\end{aligned}
$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Naravno, ovaj se metod može koristiti i za iznalaženje partikularnih rješenja izostavljanjem proizvoljnih konstanti , odnosno, u tom slučaju nešto brže, primjenom antidiferentnog operatora kao u Primjeru 4.1.♣

7. Linearne diferentne jednadžbe s varijabilnim koeficijentima

Ovdje ćemo se baviti pitanjem rješavanja linearnih diferentnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima, to jest jednadžbi oblika

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = r_n. \tag{7.1}$$

U slučaju linearnih jednadžbi drugog i višeg reda s varijabilnim koeficijentima ne može se uvijek doći do formule za njihovo rjesěnje. Zbog toga se u takvim slučajevima koriste neki specijalni metodi za njihovo rješavanje. Tako su najčešće korišteni sljedeći metodi: *metod faktorizacije operatora i metod varijacije konstanti*. Ukratko cémo opisati primjenu metoda faktorizacije operatora.

7.1. Metod faktorizacije operatora

Ovaj metod je potpuno analogan istom metodu kao u slučaju linearnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima, gdje je imao namjenu snižavanje reda diferentne jednadžbe. Dakle, ako budemo dobre sreće da uspijemo diferentnu jednadžbu (7.1) napisati u obliku

$$(E - A_n)(E - B_n)\cdots(E - U_n)x_n = r_n, \tag{7.2}$$

i pri tome odredimo operatore $E_n, B_n, \ldots, U_n$, moguće je toj jednadžbi sniziti red za jedan. Ilustriraćemo to nekim primjerima.

Primjer 7.1 *Riješiti PPV*

$$x_{n+2} - (n+2)x_{n+1} + nx_n = n, \quad x_1 = 0, x_2 = 1. \tag{7.3}$$

Rješenje: Pokušaćemo datu diferentnu jednadžbu da napišemo u obliku (7.2), a s obzirom da je ona drugog reda, to znači u obliku

$$(E - A_n)(E - B_n)x_n = n, \tag{7.4}$$

gdje su A_n i B_n operatori koje treba odrediti.

Lijevu stranu jednadžbe (7.4) sada možemo pisati kao

$$\begin{aligned}(E - A_n)(x_{n+1} - B_n x_n) &= x_{n+2} - B_{n+1}x_{n+1} - A_n x_{n+1} + A_n B_n x_n \\ &= x_{n+2} - (A_n + B_{n+1})x_{n+1} + A_n B_n x_n.\end{aligned}$$

Uporedivši to s lijevom stranom jednadžbe (7.3), dobijamo

$$A_n + B_{n+1} = n + 2, \quad A_n B_n = n. \tag{7.5}$$

Iz druge jednakosti u (7.5) vidimo da možemo probati sa ove dvije varijante: $A_n = nI$,$B_n = I$ ili $A_n = I$, $B_n = nI$. Uvrštavanjem u (7.4) i upoređivanjem s (7.3), zaključujemo da u obzir dolazi varijanta $A_n = I$, $B_n = nI$. Dakle, vrijedi

$$(E - I)(E - nI)x_n = n.$$

Uvedimo smjenu $y_n = (E - nI)x_n$. Tada jednadžba (7.3) prelazi u diferentnu jednadžbu prvog reda

$$(E - I)y_n = n,$$

čije je rješenje

$$y_n = (E - I)^{-1}n = \Delta^{-1}n^{(1)} = \frac{n^{(2)}}{2} + c_1 = \frac{1}{2}n(n-1) + c_1.$$

Sada imamo

$$(E - nI)x_n = y_n \Leftrightarrow x_{n+1} = nx_n + \frac{1}{2}n(n-1) + c_1,$$

što je linearna diferentna jednadžba prvog reda, čije je rješenje dato sa

$$\begin{aligned}x_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) x_1 + \sum_{r=1}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right)\left(\frac{1}{2}r(r-1) + c_1\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\left(r(r-1)\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right) + c_1\sum_{r=1}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{r(r-1)}{r!} + c_1(n-1)!\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!},\end{aligned}$$

jer je $x_1 = 0$. Kako je $x_2 = 1$, za $n = 1$ odavde dobijamo

$$1 = x_1 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Prema tome, rješenje datog PPV je

$$x_n = \frac{(n-1)!}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r(r-1)}{r!} + (n-1)! \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r!}, \quad n = 3, 4, \ldots.$$

♣

8. Zaključak

U područjima gdje se govore južnoslavenski jezici izučavanje diferentnih jednadžbi je relativno novo, a s obzirom da se diferentne jednadžbe intenzivno proučavaju u posljednjih trideset godina, posljednjih godina došlo je značajnih matematičkih rezultata i teorija. U rješavanju i analizi diferentnih jednadžbi vrlo značajno mjesto zauzima diferentni račun. Diferentni račun predstavlja diskretni analogon diferencijalnog i integralnog računa. U diferentnom računu bitna su dva operatora, koja smo definisali i za koje smo naveli osnovne osobine. Riječ je o diferentnom i translacijskom operatoru. Uočili smo da se diferentni operator, pored ostalog može primjenjivati na funkcije dvije ili više promjenljivih, uz naznaku u indeksu operatora koja će varijabla biti translatirana za jednu jedinicu. Nije teško pokazati da operatori Δ i E međusobno komutiraju i da su oba operatora ustvari linearni operatori. Mogli smo se uvjeriti u određenu sličnost diferentnog računa sa diferencijalnim a posebno sa integralnim računom i to upravo preko operatora. Pored ostalog smo uveli i stepen padajućeg faktorijela kao zamjenu za neku verziju uloge stepene funkcije za konačne razlike i pokazali primjenu diferentnog operatora na stepen padajućeg operatora. Nakon što smo uveli pojam diferentnog operatora uveli smo i pojam antidiferentnog operatora u oznaci Δ^{-1}. Poslije toga smo obradili linearne diferentne jednadžbe s konstantnim koeficijentima i linearne diferentne jednadžbe sa konstantnim koeficijentima. Pri tome smo obradili nekoliko metoda za rješavanje tih jednadžbi. U toku obrade ovih linearnih diferentnih jednadžbi uvidjeli smo kakva je uloga operatora pri njihovom rješavanju.

Literatura

[1] M. Nurkanović: *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene*, (univerzitetski udžbenik), Denfas, Tuzla, 2008.