

JU UNIVERZITET U TUZLI  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
ODSJEK MATEMATIKA

Mirnes Smajilović

## DIPLOMSKI RAD

# Geometrijska interpretacija dinamike diferentnih jednažbi

Tuzla, mart, 2013. godine

**Mentor rada:** Dr. sc. Mehmed Nurkanović, vanredni profesor

**Rad ima:** 37 stranica

**Redni broj diplomskog rada:**

## REZIME

Cilj ovog diplomskog rada je vizualizacija dinamike diferentnih jednadžbi prvog reda i Lynessove diferentne jednadžbe.

Diplomski rad se sastoji od dva poglavlja.

Prvo poglavlje predstavlja izlaganje o dinamici jednodimenzionalnih preslikavanja. Ono pruža mnoge učinkovite testove za stabilnost fiksnih i periodičnih tačaka. Koristi se paket **Dynamica** za vizualizaciju orbita stepenastim dijagramom, vremenskim nizovima i grafikom tačaka. Osim toga, prikazan je kratak pregled o bifurkacijama i bifurkacionom dijagramu.

Drugo poglavlje sadrži neke osnovne definicije i neke poznate rezultate o stabilnosti i periodičnosti rješenja Lynessove diferentne jednadžbe

$$x_{n+1} = \frac{A + x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Predstavljeno je korištenje paketa **Dynamica** za vizualizaciju orbita Lynessove jednadžbe kao što su fazni portret, bifurkacioni dijagram i Poincareov grafik.

## SUMMARY

The goal of this work is visualization of dynamics of the first-order difference equation and Lyness' difference equation.

This work consists of two chapters.

The first chapter presents exposition of the dynamics of one-dimensional maps. It provides many effective tests for the stability of the fixed and periodic points.

It uses **Dynamica** package for visualization of orbits with stair-step diagram, time series plot and plot of points. In addition, it presents a short review of bifurcation and bifurcation diagram.

The second chapter contains some basic definitions and some known results about the stability, and the periodicity of solutions of Lyness' difference equation

$$x_{n+1} = \frac{A + x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

It presents the usage of **Dynamica** package for visualization of orbits of Lyness' equation as well phase portrait, bifurcation diagram and Poincare' plot.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Dinamika jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema</b>	<b>2</b>
1.1	Pojam stabilnosti . . . . .	5
1.2	Vizualizacija orbita i vremenskih nizova . . . . .	7
1.3	Osjetljivost ponašanja rješenja diferentne jednadžbe . . . . .	12
1.4	Brzina atrakcije orbita . . . . .	15
1.5	Bifurkacije. Bifurkacioni dijagrami . . . . .	18
1.5.1	Bifurkacije . . . . .	18
1.5.2	Bifurkacioni dijagrami . . . . .	21
1.6	Lyapunovljevi brojevi . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Lyness-ova diferentna jednadžba</b>	<b>26</b>
2.1	Osnovni pojmovi . . . . .	26
	<b>Literatura</b>	<b>38</b>

## Uvod

Teorija diskretnih dinamičkih sistema i diferentnih jednadžbi se intenzivno proučava u posljednjih tridesetpet godina, kako zbog značajnih matematičkih rezultata i teorija, tako i zbog velikih primjena u biologiji, fizici, ekonomiji, hemiji, društvenim naukama itd.

Kada se proučava dinamika diferentnih jednačina, prije svega, radi se o sljedećem: određivanje tačaka ekvilibrijuma i peroidičnih tačaka, analiza njihove stabilnosti i asimptotska stabilnost te određivanje haotičnog ponašanja.

**Dynamica** je paket razvijen na bazi poznatog računarskog programa Wolfram Mathematica, kao kolekcija gotovih alata i funkcija za proučavanje diskretnih dinamičkih sistema i diferentnih jednadžbi. Paket **Dynamica** su razvili profesori M. R. S. Kulenovic i Orlando Merino, sa Univerziteta Rhode Island (USA).

**Dynamica** sadrži niz alata i tehnika algebarske, numeričke i grafičke prirode: nalaženje tačaka ekvilibrijuma i periodičnih tačaka, klasifikacija stabilnosti ekvilibrijuma i periodičnih tačaka, analiza poluciklusa, izračunavanje i vizualizacija invarijanti, izračunavanje i vizualizacija Lyapunovljevih funkcija i Lyapunovljevih brojeva, generisanje bifurkacionih dijagrama, vizualizacija stabilne i nestabilne mnogostrukosti, te izračunavanje box dimenzije.

Osim toga, izvorni kod unutar **Dynamica** se može prilagoditi i proširiti od strane korisnika s programerskim iskustvom.

Konačno, **Dynamica** se može koristiti za kreiranje vrhunske tehničke dokumentacije za analizu diskretnih dinamičkih sistema, kao i vrhunske grafike koje se mogu onda iskoristiti u nekim drugim aplikacijama.

**Dynamica** paket, v. 3.0 (juli, 2009) za Wolfram Mathematica v. 6, 7 i 8, može se besplatno preuzeti sa adrese:

<http://www.math.uri.edu/Dynamica>

# 1 Dinamika jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema

**Definicija 1.1** *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

gdje je  $f: I \rightarrow I$  ( $I$  interval realnih brojeva), se naziva **diferentnom jednadžbom prvog reda**, a ujedno ćemo je zvati i **jednodimenzionalni dinamički sistem**.

Rješenje jednadžbe (1) je svaki niz  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  koji zadovoljava jednadžbu (1) za sve  $n = 0, 1, \dots$

**Definicija 1.2** *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

gdje su  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  poznati nizovi realnih brojeva, naziva se **linear-nom diferentnom jednadžbom prvog reda**.

U slučaju kada je  $b_n = 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), jednadžba (2) se naziva **homogenom**, dok se inače, to jest kada je  $b_n \neq 0$  za bar jedno  $n \in \{0, 1, \dots\}$ , jednadžba (2) naziva **nehomogenom**.

Obično se jednadžbi (2) dodaje takozvani uvjet početnih vrijednosti

$$x_0 = \alpha. \quad (3)$$

Diferentna jednadžba (2), zajedno s početnim uvjetom (3), čini tzv. *problem početnih vrijednosti* (skraćeno PPV).

Za neke klase diferentnih jednadžbi, prije svega za neke linearne, moguće je doći do općeg rješenja. Međutim, u općenitom slučaju to je vrlo teško postići. Zbog toga se, umjesto rješavanja jednadžbe, pažnja posvećuje ispitivanju ponašanja njenog rješenja u ovisnosti o početnom uvjetu  $x_0$ .

Upoznajmo se sada s pojmovima ekvilibrijuma i periodičnosti rješenja diferentne jednadžbe (1).

**Definicija 1.3**

1. Skup svih (pozitivnih) iteracija  $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ , gdje je  $f^0(x_0) = x_0$ , se naziva (pozitivnom) **orbitom** od  $x_0$  i označava se sa  $O(x_0)$ . Dakle,

$$O(x_0) := \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots\}.$$

2. **Tačka ekvilibrijuma** (fiksna tačka ili tačka ravnoteže) jednadžbe (1) je tačka  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ , takva da je

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

3. **Eventualna tačka ekvilibrijuma** jednadžbe (1) je tačka  $x^* \in \mathbb{R}$ , za koju postoji  $r \in \mathbb{N}$  tako da je

$$f^r(x^*) = \bar{x} \quad i \quad f^{r-1}(x^*) \neq \bar{x}.$$

4. Tačka  $p \in \mathbb{R}$  naziva se **periodičnom tačkom perioda  $k$**  ako je

$$f^k(p) = p.$$

Ako je  $p$  periodična tačka, onda  $O(p)$  zovemo **periodičnom orbitom**. U tom slučaju, uobičajeno je predstaviti orbitu kao konačan skup  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ . Za orbite koje nisu periodične, kažemo da su **aperiodične**.

5. Tačka  $p \in \mathbb{R}$  naziva se **periodičnom tačkom minimalnog perioda  $k$**  (ili prostog perioda  $k$ ) ako je  $k$  najmanji broj za koji vrijedi

$$f^k(p) = p,$$

$$f^l(p) \neq p \quad za \quad sve \quad l = 1, 2, \dots, k - 1.$$

6. Tačka  $p^* \in \mathbb{R}$  naziva se **eventualnom periodičnom tačkom minimalnog perioda  $k$** , ako postoji  $r \in \mathbb{N}$  i periodična tačka  $p$  (minimalnog perioda  $k$ ) tako da je

$$f^r(p^*) = p \quad i \quad f^{r-1}(p^*) \neq p.$$

Inače, simbol  $f^n(x)$  predstavlja  $n$ -tu iteraciju preslikavanja  $f$  počev od tačke  $x$ .

*Grafički*, tačka ekvilibrijuma je apscisa tačke u kojoj grafik funkcije  $f$  siječe pravu  $y = x$ .

Sljedećim primjerom ilustrirat ćemo nalaženje tačke ekvilibrijuma i periodičnog rješenja diferentne jednažbe.

**Primjer 1.1** *Logistička diferentna jednažba*

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4x_n(1 - x_n) \quad (4)$$

ima dvije tačke ekvilibrijuma i četiri eventualne tačke ekvilibrijuma.

*Rješenje.* Tačke ekvilibrijuma nalazimo rješavajući jednažbu

$$\bar{x} = f(\bar{x}) = 4\bar{x}(1 - \bar{x})$$

odakle je

$$\bar{x}(3 - 4\bar{x}) = 0$$

pa dobijamo

$$\bar{x} = 0 \quad \text{ili} \quad \bar{x} = \frac{3}{4}.$$

Dakle, tačke ekvilibrijuma su 0 i  $\frac{3}{4}$ .

Kako je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{3}{4}, \\ f\left(f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\right) &= \frac{3}{4}, \\ f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= 0, \\ f\left(f\left(f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)\right)\right) &= 0, \end{aligned}$$

to su eventualne tačke ekvilibrijuma:  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$ .

Jednažba (4) također ima periodično rješenje perioda dva

$$\left\{ \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}, \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5} \right\}$$

i dvije eventualno periodične tačke perioda dva

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

jer je

$$f\left(f\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}.$$

■

## 1.1 Pojam stabilnosti

### Definicija 1.4 (Stabilnost tačke ekvilibrijuma)

1. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednažbe (1) se naziva **stabilnom**, ili **lokalno stabilnom**, ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

2. Tačka ekvilibrijuma naziva se **nestabilnom** ako nije stabilna.
3. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednažbe (1) se naziva **lokalnim atraktorom** ako postoji  $\gamma > 0$  takvo da

$$x_0 \in I \quad \text{i} \quad |x_0 - \bar{x}| < \gamma \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

4. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednažbe (1) se naziva **lokalno asimptotski stabilnom**, ili **sinkom**, ili **atraktivnom fiksnom tačkom preslikavanja f** ako je ona stabilna i ako je lokalni atraktor.

5. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednažbe (1) se naziva **globalnim atraktorom** ako

$$x_0 \in I \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

6. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednažbe (1) se naziva **globalno asimptotski stabilnom** ako je ona stabilna i ako je globalni atraktor.

7. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednažbe (1) se naziva **odbijajućom tačkom**, ili **repelerom**, ako postoji  $r > 0$  takvo da, za svako  $x_0 \in I$ , za koje je  $0 < |x_0 - \bar{x}| < r$ , postoji  $N \geq 1$  tako da je

$$|x_N - \bar{x}| \geq r.$$

**Teorem 1.1 (Teorem linearizirane stabilnosti)** *Neka je  $I$  interval realnih brojeva i  $f: I \rightarrow I$  neprekidno diferencijabilna funkcija. Osim toga, neka je  $\bar{x}$  tačka ekvilibrijuma jednažbe (1). Tada vrijedi:*

(i) ako je

$$|f'(\bar{x})| < 1,$$

ekvilibrijum  $\bar{x}$  je lokalno asimptotski stabilan;

(ii) ako je

$$|f'(\bar{x})| > 1,$$

ekvilibrirajuma  $\bar{x}$  je odbijajuća fiksna tačka (repeler), tj.  $\bar{x}$  je nestabilan ekvilibrirajuma.

Za dokaz Teorema linearizirane stabilnosti vidjeti [N].

U slučaju kada je  $|f'(\bar{x})| = 1$ , Teorem linearizirane stabilnosti ne daje nikakve indicije u vezi sa stabilnošću ekvilibrirajuma  $\bar{x}$ . Tada su potrebna dodatna ispitivanja.

**Definicija 1.5** Neka je  $I$  interval realnih brojeva i  $f: I \rightarrow I$  neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je  $\bar{x}$  tačka ekvilibrirajuma jednadžbe (1).

1.  $\bar{x}$  se naziva **hiperboličnom fiksnom tačkom** ako je

$$|f'(\bar{x})| \neq 1,$$

2.  $\bar{x}$  se naziva **nehiperboličnom fiksnom tačkom** ako je

$$|f'(\bar{x})| = 1.$$

Slučaj nehiperboličnog ekvilibrirajuma, ne samo kod diferentnih jednadžbi prvog reda, nego i kod diferentnih jednadžbi bilo kojeg reda ili sistema diferentnih jednadžbi, specifičan je i mora se posebno razmatrati u svakom slučaju pojedinačno. Pokazuje se da je to ispitivanje vrlo komplicirano i da vrlo često, danas, ne možemo sa sigurnošću doći do potpunih rezultata.

**Definicija 1.6 (Oscilacije)**

(a) Za niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  kažemo da ima **eventualno** neko svojstvo  $P$  ako postoji cijeli broj  $N \geq 0$  takav da svaki član niza  $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$  ima to svojstvo.

(b) Za niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  kažemo da **oscilira oko nule** ili jednostavno **oscilira** ako članovi  $x_n$  nisu eventualno svi pozitivni niti eventualno svi negativni. Ako je drugačije, za niz kažemo da **ne oscilira**. Za niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  kažemo da **strogo oscilira** ako za svaki  $n_0 \geq 0$  postoje  $n_1, n_2 \geq n_0$  takvi da vrijedi

$$x_{n_1}x_{n_2} < 0.$$

(c) Za niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  kažemo da **oscilira oko  $\bar{x}$**  ako niz  $\{x_n - \bar{x}\}_{n=0}^{\infty}$  oscilira. Za niz  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  kažemo da **strogo oscilira oko  $\bar{x}$**  ako niz  $\{x_n - \bar{x}\}_{n=0}^{\infty}$  strogo oscilira.

**Definicija 1.7 (Stabilnost periodične tačke)** *Za periodičnu tačku  $p$  jednadžbe (1) minimalnog perioda  $k$  kažemo da je **stabilna**, **asimptotski stabilna**, **nestabilna**, ili **globalni atraktor** ako je  $p$  respektivno **stabilna**, **asimptotski stabilna**, **nestabilna tačka ekvilibrijuma** ili **globalni atraktor** od  $f^k$ .*

Periodičnu orbitu možemo predstaviti kao konačan skup  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ . U tom slučaju definišemo **množitelj (multiplikator) orbite** kojeg označavamo sa  $\lambda$ :

$$\lambda = f'(x_0)f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_k).$$

Specijalno, ako je  $\{p, f(p)\}$  periodično rješenje perioda dva jednadžbe (1), na osnovu teoreme (1.1) ono je stabilno ako je

$$|\lambda| = |f'(p)f'(f(p))| < 1$$

i nestabilno ako je

$$|\lambda| = |f'(p)f'(f(p))| > 1.$$

**Definicija 1.8 (Bazen privlačenja)** *Neka je  $\bar{x}$  lokalno asimptotski stabilna fiksna tačka preslikavanja  $f$ . **Bazen privlačenja** od  $\bar{x}$ , u oznaci  $\mathcal{B}(x)$ , se definiše kao maksimalan skup  $J$  koji sadrži  $\bar{x}$ , i još vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x} \quad \forall (x \in J).$$

Nalaženje bazena privlačenja fiksne ili periodične tačke je općenito težak zadatak. Ovdje ćemo predstaviti jedno od osnovnih topoloških svojstava bazena privlačenja. Prije toga, moramo definisati invarijantni skup.

**Definicija 1.9** *Skup  $M$  nazivamo **invarijantnim** pod preslikavanjem  $f$  ako je  $f(M) \subset M$ . Drugim riječima,  $M$  je invarijantan ako za svaki  $x \in M$  elementi orbite  $O(x)$  pripadaju  $M$ .*

**Teorem 1.2** *Neka je  $\bar{x}$  atraktivna fiksna tačka preslikavanja  $f$ . Tada je bazen privlačenja  $\mathcal{B}(\bar{x})$  invarijantan otvoren interval.*

## 1.2 Vizualizacija orbita i vremenskih nizova

Tip grafika koji se najčešće koristi za vizualizaciju rješenja jednodimenzionalne diferentne jednadžbe (1) naziva se **stepenasti dijagram**. Stepenasti dijagram je grafik u pravougloj koordinatnom sistemu, i sastoji se od sljedećeg:



- a) grafika funkcije  $y = f(x)$ ,
- b) grafika prave  $y = x$ ,
- c) poligonalne linije koja se dobija spajanjem tačaka

$$(x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_3), \dots$$

Linijski segmenti poligonalne linije stvaraju dojam stepenica. Također, važno je primijetiti da su tačke ekvilibriuma zajedničke tačke grafika  $y = f(x)$  sa pravom  $y = x$ .

**Primjer 1.2** Vizualizirati orbitu logističke diferentne jednadžbe (4) stepenastim dijagramom, sa početnim uvjetom  $x_0 = 0.4$ .

*Rješenje.* U ovom prvom primjeru korištenja paketa *Dynamica*, rješenje će biti nešto detaljnije.

Najprije ćemo učitati paket *Dynamica* u Wolfram Mathematica, naredbom:

```
<< Dynamica'
```

Nakon toga, definišemo logističku jednadžbu, pri čemu odgovarajuću funkciju  $f$  jednadžbe (1) dobijamo funkcijom `DEToMap[]`.

```
Logisticeq = x[n + 1] == 4 x[n] (1 - x[n]);  
LogisticMap = DEToMap[Logisticeq];
```

Provjerimo sada da je `LogisticMap[x]` zapravo naša funkcija  $f(x)$ .

```
In[1]:= LogisticMap[x]  
Out[1]= 4 (1 - x) x
```

Da bismo našli neku iteraciju (npr. 40-tu), sa nekim početnim uvjetom (npr.  $x_0 = 0.4$ ) potrebno je iskoristiti funkciju `Iterate[LogisticMap, 0.4, 40]`.

```
In[2]:= Iterate[LogisticMap, 0.4, 40]  
Out[2]= 0.719059
```

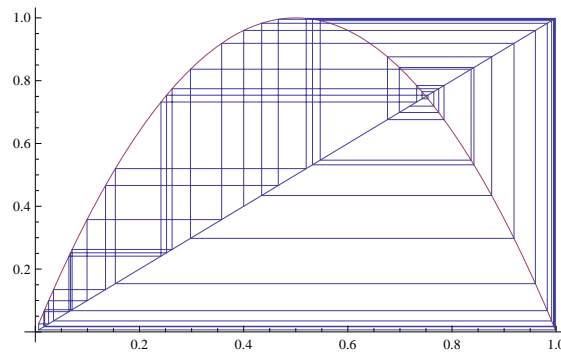
Ukoliko želimo orbitu sa prvih  $n$  članova (uzet ćemo 40), koristimo funkciju `Orbit[LogisticMap, 0.4, 40]`.

```
In[3]:= Orbit[LogisticMap, 0.4, 40]
Out[3]= {0.4, 0.96, 0.1536, 0.520028, 0.998395, 0.00640774, 0.0254667,
0.0992726, 0.35767, 0.918969, 0.29786, 0.836557, 0.546917, 0.991195,
0.034909, 0.134761, 0.466403, 0.995485, 0.0179785, 0.0706211,
0.262535, 0.774441, 0.698727, 0.84203, 0.532063, 0.995888, 0.0163812,
0.0644512, 0.241189, 0.732068, 0.784578, 0.676061, 0.87601, 0.434465,
0.982821, 0.067536, 0.251899, 0.753784, 0.742374, 0.76502, 0.719059}
```

Konačno, funkcija `StaircaseDiagram[]` generiše stepenasti dijagram.

```
In[4]:= orb = Orbit[LogisticMap, 0.4, 40];
StaircaseDiagram[LogisticMap, orb, PlotRange -> All]
```

i dobijamo traženi grafik (slika 1). ■



Slika 1: Stepenasti dijagram orbite  $O(0.4)$  za  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ .

Drugi tip grafika koji se koristi za vizualizaciju rješenja jednodimenzionalne diferentne jednažbe (1) naziva se **vremenski niz**. Sastoji se od reprezentacije varijable  $x_n$  kao funkcije od  $n$ . Obično, horizontalna osa predstavlja  $n$  i vertikalna osa predstavlja  $x_n$ . Obično ga generišemo s obzirom na odgovarajuće tačke ravnoteže.

Prvo nalazimo tačke ekvilibrijuma logističke diferentne jednažbe (4).

```
In[5]:= Solve[LogisticMap[x] == x, x]
Out[5]= {{x -> 0}, {x -> 3/4}}
```

Dobili smo dvije fiksne tačke, te ćemo ih imenovati kao `ft[1]` i `ft[2]`:

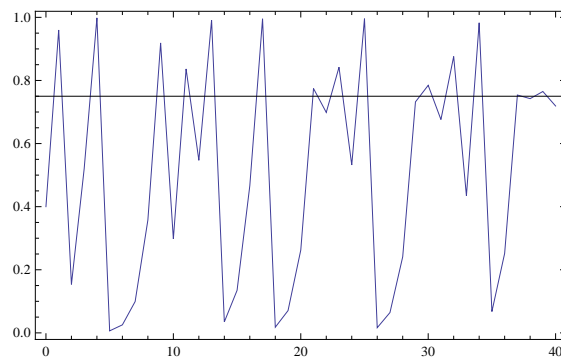
```
In[6]:= {ft[1], ft[2]} = {x} /. %
Out[6]= {{0}, {3/4}}
```

Na ovaj način smo dobili vrijednosti varijabli  $ft[1][[1]] = 0$  i  $ft[2][[1]] = 3/4$ .

Za crtanje grafika vremenskog niza koristi se Dynamica funkciju `TimeSeriesPlot[]`. Iskoristit ćemo prethodno generisanu orbitu `orb` sa početnim uvjetom  $x_0 = 0.4$ :

```
In[7]:= TimeSeriesPlot[orb, AxesOrigin -> {0, ft[2][[1]]}]
```

i dobijamo traženi grafik (slika 2).

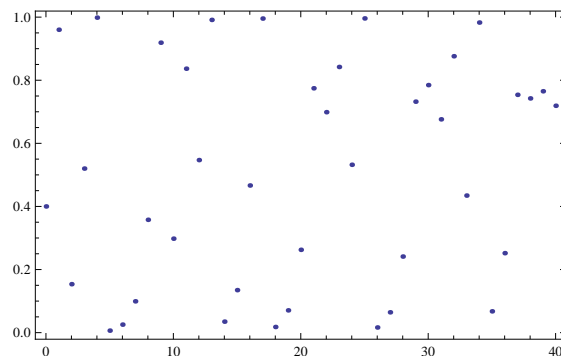


Slika 2: Grafik vremenskog niza za orbitu  $O(0.4)$  za  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ .

Sličan grafik se dobija ako se izostave linije koje spajaju tačke na grafiku 2. Ovaj grafik se izvodi pomoću Dynamica funkcije `OrbitPlot[]`:

```
In[8]:= OrbitPlot[LogisticMap, 0.4, 40]
```

i dobijamo navedeni grafik (slika 3).



Slika 3: Grafik tačaka za orbitu  $O(0.4)$  za  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$

**Primjer 1.3** *Posmatrajmo dinamički sistem u zavisnosti od parametra A:*

$$x_{n+1} = x_n^2 + A. \quad (5)$$

*Rješenje.*

```
In[1] := << Dynamica'
```

Nakon toga, definišemo datu jednažbu, pri čemu odgovarajuću funkciju  $q$  jednažbe (5) dobijamo funkcijom `DEToMap[]`.

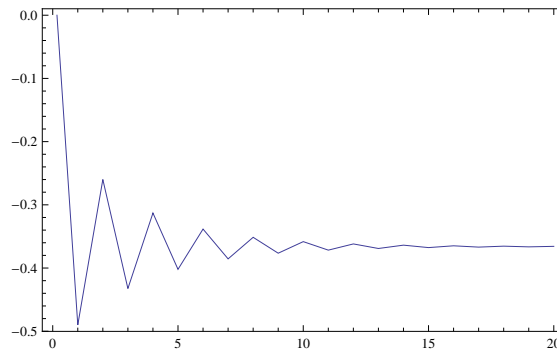
```
In[2] := eqn = x[n+1]==x[n]^2 + A;
In[3] := q = DEToMap[eqn];
```

Parametru  $A$  ćemo dodjeljivati posebne i konkretne vrijednosti za obavljanje numeričke simulacije.

```
In[4] := A = -0.5;
```

Sada ćemo generisati grafik vremenskog niza:

```
In[5] := TimeSeriesPlot[q, 0.1, 20]
```



Slika 4: Grafik vremenskog niza za orbitu  $O(0.1)$  za  $x_{n+1} = x_n^2 + A$

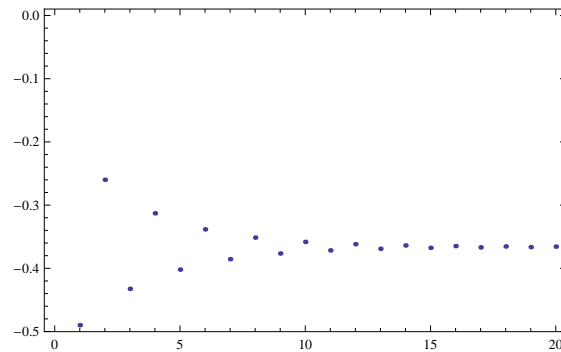
Tačke ekvilibrijuma diferentne jednažbe (5) su:

```
In[6] := Solve[q[x] == x, x]
Out[6] := {{x -> -0.366025}, {x -> 1.36603}}
```

Grafik vremenskog niza (slika 4.) pokazuje da orbita konvergira ka tački ekvilibrijuma.

Generisat ćemo i grafik tačaka za istu orbitu kao i za vremenski niz.

■



Slika 5: Grafik tačaka za orbitu  $O(0.1)$  za  $x_{n+1} = x_n^2 + A$

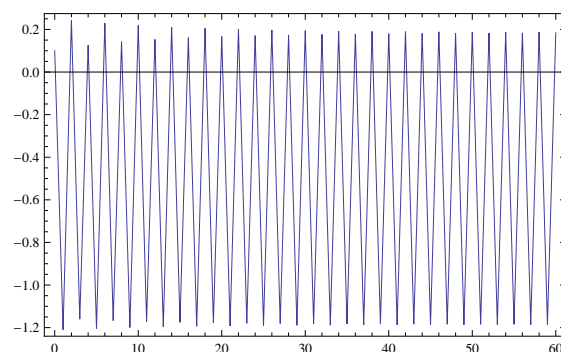
### 1.3 Osjetljivost ponašanja rješenja diferentne jednažbe

Na primjeru preslikavanja  $f(x) = x^2 + A$ , ćemo uočiti da “relativno male” promjene parametra  $A$  mogu dati različito ponašanje rješenja.

Posmatrajući orbitu  $O(0.1)$  za  $A = -1.22$  možemo vidjeti da postoji asimptotsko periodično rješenje perioda 2.

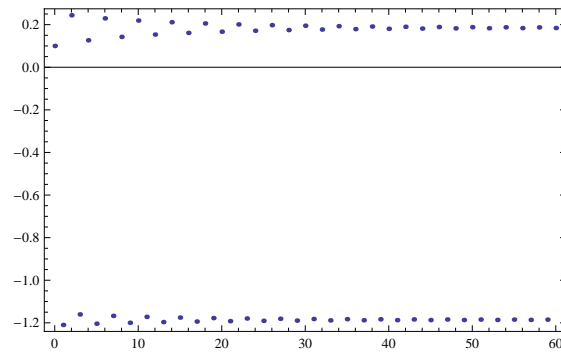
```
In[1]:= A = -1.22;
In[2]:= orb = Orbit [q, 0.1, 60];
In[3]:= Take [orb, {50, 60}]
Out[3]={{-1.18667, 0.188187, -1.18459, 0.183243, -1.18642, 0.187597,
-1.18481, 0.183768, -1.18623, 0.18714, -1.18498}}
```

Grafik vremenskog niza (slika 6.) pokazuje asimptotski karakter periodičnog rješenja perioda 2.



Slika 6: Grafik vremenskog niza: `TimeSeriesPlot[orb]`

Grafik tačaka (slika 7.) za istu orbitu, odnosno Dinamycna naredba `OrbitPlot[]` daje istu informaciju u jasnijem obliku.

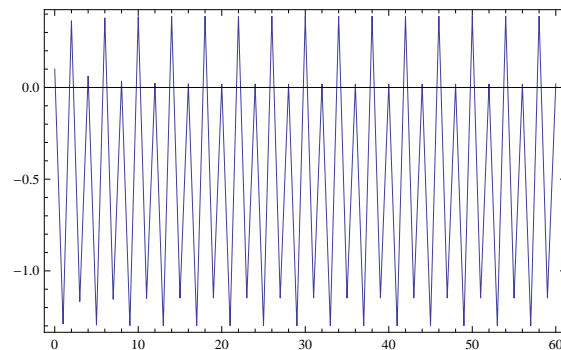


Slika 7: Grafik tačaka: `OrbitPlot[orb]`

Drugi test, sa parametrom  $A = -1.3$  ukazuje na postojanje asimptotske periodične tačke perioda 4. Prikazaćemo iteracije u rasponu od  $x_{50}, \dots, x_{60}$ .

```
In[4] := A = -1.3;
In[5] := orb1 = Orbit[q, 0.1, 60];
In[6] := Take[orb1, {50, 60}]
Out[6] = {-1.29962, 0.389019, -1.14866, 0.0194303, -1.29962, 0.389019,
-1.14866, 0.0194303, -1.29962, 0.389019, -1.14866}
```

Asimptotsko ponašanje može biti teško za vizualizaciju pomoću grafika vremenskog niza (slika (8)).

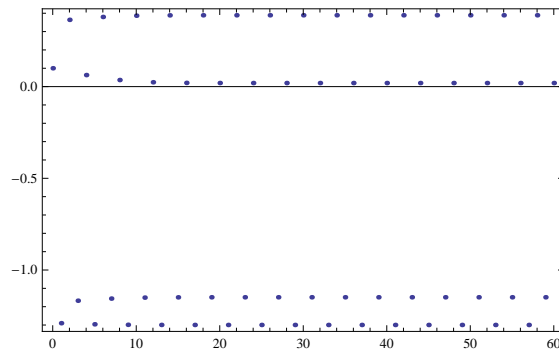


Slika 8: Grafik vremenskog niza: `TimeSeriesPlot[orb1]`

Na grafiku tačaka bolje uočavamo asimptotska ponašanja.

Pomoću naredbe `FindMinimalPeriod[]` možemo odrediti minimalni period periodičnih orbita.

```
In[7] := FindMinimalPeriod[Orbit[q, 0, 200]]
Minimal period = 4
Periodic orbit = {-1.29962, 0.389019, -1.14866, 0.0194303}
```

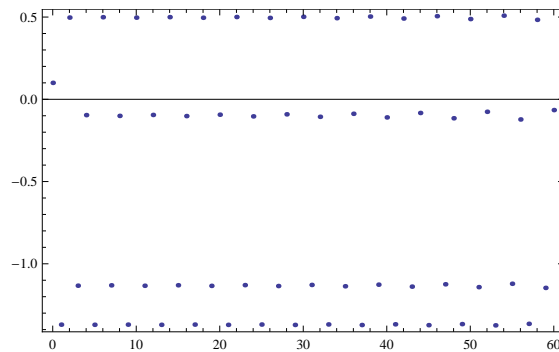


Slika 9: Grafik tačaka: `OrbitPlot[orb1]`

Finalni test ćemo uraditi sa parametrom  $A = -1.38$ . Prikazaćemo iteracije u rasponu od  $x_{50}, \dots, x_{60}$ .

```
In[8] := A = -1.38;
In[9] := orb2 = Orbit[q, 0.1, 60];
In[10] := Take[orb2, {50, 60}]
Out[6] = {-1.3667, 0.487872, -1.14198, -0.0758786, -1.37424, 0.508542,
-1.12138, -0.122496, -1.36499, 0.48321, -1.14651}
```

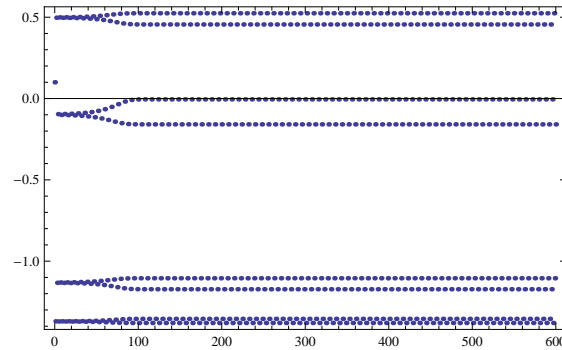
Crtanje grafika tačaka (60 tačaka) sugerise na moguće postojanje periodične tačke perioda 4, koja je lokalno asimptotski stabilna.



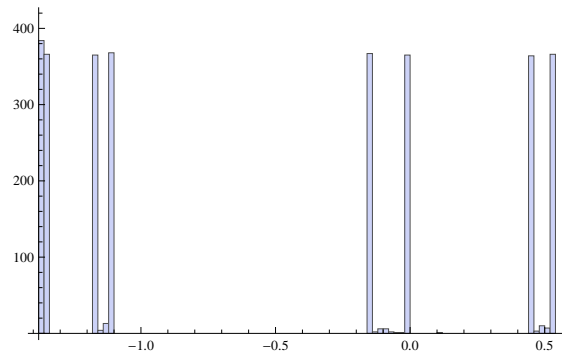
Slika 10: Grafik tačaka: `OrbitPlot[orb2]`

Međutim, crtanje istog grafika sa 600 tačaka daje drugačiju predstavu. Rješenje konvergira periodičnoj tački perioda 8.

Na kraju, možemo korisiti i histogram za uočavanje periodičnosti rješenja. Histogram prvih 3000 članova orbite  $O(0.1)$  ukazuje da rješenje konvergira periodičnom rješenju perioda 8.



Slika 11: Grafik tačkica: `OrbitPlot[q, 0.1, 600]`



Slika 12: Histogram: `Histogram[Orbit[q, 0.1, 3000], 100]`

## 1.4 Brzina atrakcije orbita

Sada ćemo pokazati kako množitelj periodične orbite određuje brzinu atrakcije orbite. Udaljenost od fiksne tačke treba ići ka 0 eksponencijalno brzo.

Posmatrat ćemo orbitu za  $A = -0.4$ .

```
In[11]:= A = -0.4;
```

```
In[12]:= orb3 = Orbit[q, 0, 40];
```

```
In[13]:= TimeSeriesPlot[orb3, PlotRange -> All]
```

Generišimo i grafik tačkica orbite.

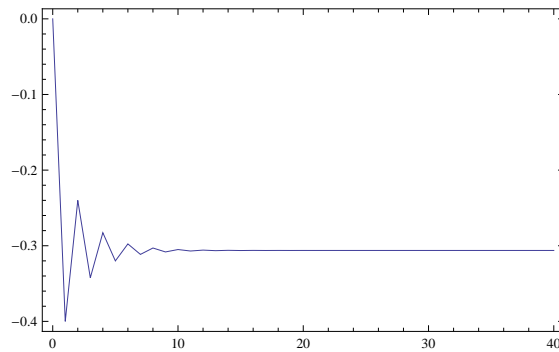
Sada ćemo vidjeti kako je brzo iterativno približavanje tački ekvilibrijuma pomoću računalne metode.

Odredimo fiksne tačke.

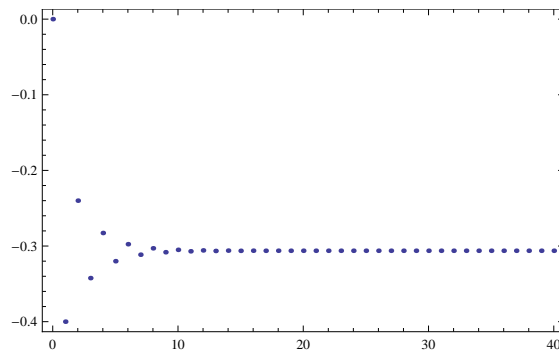
```
In[14]:= Solve[q[x] == x, x]
```

```
Out[14]= {{x -> -0.306226}, {x -> 1.30623}}
```





Slika 13: Grafik vremenskog niza pokazuje brzu konvergenciju niza tačaka



Slika 14: Grafik tačaka orbite

Mogli smo dobiti razumnu aproksimaciju tačke ekvilibrjuma i velikim brojem iteracija. Uzmimo npr. 1000 iteraciju.

```
In[15]:= fixpoint = Iterate[q, 0, 1000]
Out[15]= -0.306226
```

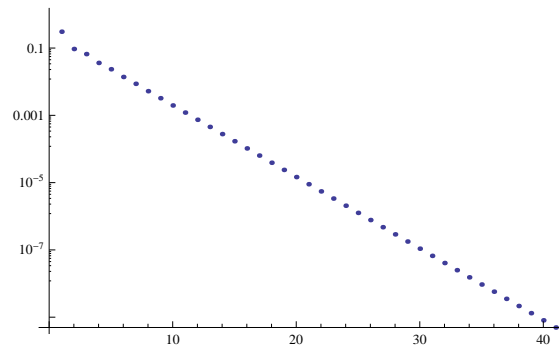
Sada oduzimamo ovu vrijednost (`fixpoint`) od svakog člana orbite (`orb3`), i dobijamo listu razlika koju možemo iskoristiti kao ideju za brzinu konvergencije.

```
In[16]:= diff = orb3 - fixpoint;
```

Logaritamski grafik ove razlike (lista `diff`) možemo iskoristiti za prikaz približavanja nuli kao eksponencijalna funkcija od  $n$ .

```
In[17]:= ListLogPlot[Abs[diff]]
```

Lista omjera pokazuje da je svaka razlika odnosno svaki član liste `diff`, aproksimativno 0.612 puta prethodni član.

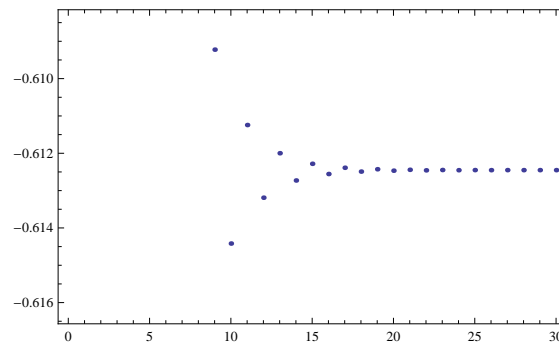


Slika 15: Logaritamski grafik

```
In[18]:= ratios = Table[diff[[i + 1]]/diff[[i]], {i, 1, 30}]
out[18]= {-0.306226, -0.706226, -0.546226, -0.648626, -0.588988, -0.626271,
-0.603797, -0.617677, -0.609224, -0.614418, -0.611243, -0.61319,
-0.611999, -0.612729, -0.612282, -0.612556, -0.612388, -0.612491,
-0.612428, -0.612466, -0.612443, -0.612457, -0.612448, -0.612454,
-0.61245, -0.612452, -0.612451, -0.612452, -0.612451, -0.612452}
```

Naredni grafik (slika 16.) pokazuje brzu konvergenciju liste ratio ka njenoj granici.

```
In[19]:= ListPlot[ratios, Frame -> True]
```



Slika 16: Grafik liste ratio

Funkcija `Multiplier[]` može se iskoristiti za izračunavanje konstantnog omjera. Ustvari, to je množitelj periodične orbite, s tim da za periodičnu tačku uzmemo fiksnu tačku.

```
In[20]:= Multiplier[q, {fixpoint}]
Out[20]= -0.612452
```

## 1.5 Bifurkacije. Bifurkacioni dijagrami

### 1.5.1 Bifurkacije

Najpoznatija nelinearna diskretna jednažba koja se koristi za modeliranje jedne vrste je *logistička diferentna jednažba*:

$$x_{n+1} = f_p(x_n) = px_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad p > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

Da bismo našli tačke ekvilibrijuma dovoljno je riješiti jednažbu:

$$f_p(x) = px(1 - x) = x.$$

```
In[21]:= Logisticeq = x[n + 1] == p x[n] (1 - x[n]);
```

```
In[22]:= LogisticMap = DEToMap[Logisticeq];
```

```
In[23]:= Solve[LogisticMap[x] == x, x]
```

```
Out[23]= {{x -> 0}, {x -> (-1 + p)/p}}
```

Stoga su tačke ekvilibrijuma 0 i  $\frac{p-1}{p}$ . Ispitajmo stabilnost svake od navedenih tačaka. Izračunajemo prvi izvod preslikavanja  $f_p$ .

$$f'_p(x) = (px(1 - x))' = (px - px^2)' = p - 2px.$$

(a) Tačka ekvilibrijuma je 0. Kako je  $f'_p(0) = p$ , na osnovu teorema 1.1 imamo:

- (i) 0 je lokalno asimptotski stabilna fiksna tačka za  $0 < p < 1$ ,
- (ii) 0 je nestabilna fiksna tačka za  $p > 1$ .

(b) Tačka ekvilibrijuma je  $\frac{p-1}{p}$ . Zbog

$$f'_p\left(\frac{p-1}{p}\right) = p - 2p \cdot \frac{p-1}{p} = p - 2p + 2 = 2 - p,$$

na osnovu teorema 1.1 imamo:

- (i)  $\frac{p-1}{p}$  je lokalno asimptotski stabilna fiksna tačka za  $1 < p < 3$ ,
- (ii)  $\frac{p-1}{p}$  je nestabilna fiksna tačka za  $p > 3$ .

Da bismo odredili periodično rješenje perioda dva, dovoljno je riješiti jednažbu:

$$f_p(f_p(x)) = p(px(1 - x))(1 - px(1 - x)) = p^2x(1 - x)(1 - px(1 - x)) = x.$$

```
In[24]:= Solve[LogisticMap[LogisticMap[x]] == x, x]
Out[24]:= {{x -> 0}, {x -> (-1 + p)/p},
{x -> (p + p^2 - p Sqrt[-3 - 2 p + p^2])/(2 p^2)},
{x -> (p + p^2 + p Sqrt[-3 - 2 p + p^2])/(2 p^2)}}
In[25]:=FullSimplify[%]
Out[25]={{x -> 0}, {x -> (-1 + p)/p},
{x -> (1 + p - Sqrt[(-3 + p) (1 + p)])/(2 p)},
{x -> (1 + p + Sqrt[(-3 + p) (1 + p)])/(2 p)}}
```

Dobili smo četiri rješenja, od kojih su nam dva rješenja već bila poznata, naime, tačke ekvilibrijuma su ujedno i periodične tačke bilo kojeg perioda. Preostala dva rješenja su:

$$p_1 = \frac{1 + p - \sqrt{(p-3)(p+1)}}{2p} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{1 + p + \sqrt{(p-3)(p+1)}}{2p}.$$

Tako postoje dvije periodične tačke minimalnog perioda dva kada je  $p > 3$ .

Odredimo i uslov pod kojim su ova dva periodična rješenja lokalno asimptotski stabilna.

Prema teoremu 1.1, uslov je

$$\left| (f_p^2(p_1))' \right| < 1 \quad \text{i} \quad \left| (f_p^2(p_2))' \right| < 1.$$

Uvrstimo  $p_1$  i  $p_2$  u izvod funkcije  $f_p^2(x)$ :

$$(f_p^2(x))' = -p^2(-1 + 2x)(1 + 2p(-1 + x)x)$$

i dobijamo:

$$(f_p^2(p_1))' = 4 + 2p - p^2 \quad \text{i} \quad (f_p^2(p_2))' = 4 + 2p - p^2.$$

Rješavajući nejednačbu  $|4 + 2p - p^2| < 1$  dobijamo skup

$$(1 - \sqrt{6}, -1) \cup (3, 1 + \sqrt{6}).$$

S obzirom da je  $p > 0$  uzimamo samo interval  $(3, 1 + \sqrt{6})$ . Konačno, za svaki parametar  $p$  iz tog intervala periodična rješenja  $p_1$  i  $p_2$  perioda dva su *lokalno asimptotski stabilna*.

Generalno, bifurkacija (razdvajanje) predstavlja događaj u kojem dolazi do nekog razdvajanja, odnosno bifurkacija (udvostručavanje perioda) predstavlja trenutak u kojem iz jedne atraktivne fiksne tačke logističke jednačbe nastaju dvije vrijednosti.

Nije teško primijetiti kako se razmatranje karakteristika logističke jednadžbe svodi na proučavanje nekih specifičnih tačaka same funkcije i njezina parametra  $p$ .

Dakle, kada parametar  $p$  promijeni svoju vrijednost, ponašanje rješenja se također mijenja. Označimo sa  $b_k$  vrijednost parametra  $p$  u kojoj se javlja promjena ponašanja u  $k$ -toj posmatranoj tački. Tada imamo sljedeću tablicu.

Interval parametra $p$	Vrsta ponašanja rješenja	Kritična vrijednost parametra $p$
$0 < p < 1$	Tačka ekvilibrijuma 0 je lokalno asimptotski stabilna	$b_0 = 1$
$1 < p < 3$	Tačka ekvilibrijuma $\frac{p-1}{p}$ je lokalno asimptotski stabilna	$b_1 = 3$
$3 < p < 1 + \sqrt{6}$	Periodična rješenja $p_1$ i $p_2$ su lokalno asimptotski stabilna	$b_2 = 1 + \sqrt{6}$

Vrijednosti  $b_k$  se nazivaju **bifurkacione vrijednosti** parametra.

Nastavljajući ovaj proces, možemo naći sljedeću bifurkacionu vrijednost  $b_3$  koja ne odgovara periodičnom rješenju prostog perioda tri, ali odgovara periodičnom rješenju prostog perioda četiri.

Sljedeća bifurkaciona vrijednost  $b_4$  odgovara periodičnom rješenju perioda osam. Osim toga, može se dokazati da je za  $p \in (b_2, b_3)$ , periodično rješenje prostog perioda četiri stabilno, a periodično rješenje perioda dva postaje nestabilno.

Isto tako, može se dokazati da je za  $p \in (b_3, b_4)$ , periodično rješenje prostog perioda osam stabilno, a periodično rješenje perioda četiri postaje nestabilno.

Nastavljajući ovaj proces, možemo vidjeti da postoji niz  $\{b_k\}_{n=0}^{\infty}$  bifurkacionih vrijednosti parametra sa sljedećim svojstvom: za  $p \in (b_k, b_{k+1})$  periodično rješenje prostog perioda  $2^k$  je stabilno, a periodična rješenja svakog od perioda  $2, \dots, 2^{k-1}$  postaju nestabilna.

Ovaj fenomen se naziva **put u haos udvostručavanjem perioda bifurkacije**.

Ovo znači, ako se parametar  $p$  poveća iznad  $b_1$ , tačka ekvilibrijuma se grana na periodično rješenje perioda dva; a iznad vrijednosti  $b_2$  periodično rješenje perioda dva se grana na periodično rješenje perioda četiri, itd.

Niz bifurkacionih vrijednosti parametra teži broju  $b_{\infty} = 3.56994\dots$  gdje jednadžba (6) ima periodična rješenja svih perioda kao i neka neperiodična rješenja. Ovakva situacija se često opisuje kao **haotično ponašanje** ili **haos**.

Niz  $\{b_k\}_{n=0}^{\infty}$  bifurkacionih vrijednosti parametra ima izuzetno svojstvo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_{k+1} - b_k} = \delta \approx 4.66920 \dots$$

Broj  $\delta = 4.66920 \dots$  se zove **Feigenbaum-ov broj**, a naziv je dobio po njegovom otkrivaču, fizičaru Mitchell Feigenbaum.

Ustvari, Feigenbaum je napravio mnogo veće otkriće. Broj  $\delta$  je univerzalan i nezavisi od oblika familije preslikavanja  $f_p$ . Međutim, broj  $b_{\infty}$  zavisi od familije preslikavanja koja se razmatraju.

### 1.5.2 Bifurkacioni dijagrami

Već smo vidjeli, barem što se tiče logističke diferentne jednadžbe, da različite vrijednosti parametra mogu dati kvalitativno različita rješenja. Posebno nas zanima promjena prirode rješenja kada se parametar mijenja, a za ispitivanje takvih promjena koristiti ćemo *bifurkacioni dijagram*.

Bifurkacioni dijagram pokazuje mnoge iznenadne kvalitativne promjene u atraktivnoj fiksnoj tački kao i u periodičnoj orbiti.

Jedna od prvih otkrivenih bifurkacija je bifurkacija udvostručavanja perioda koja se pojavljuje u slučaju jednodimenzionalne logističke jednadžbe (6).

Dinamycna funkcija za generisanje bifurkacionog dijagrama je `BifurcationPlotND`.

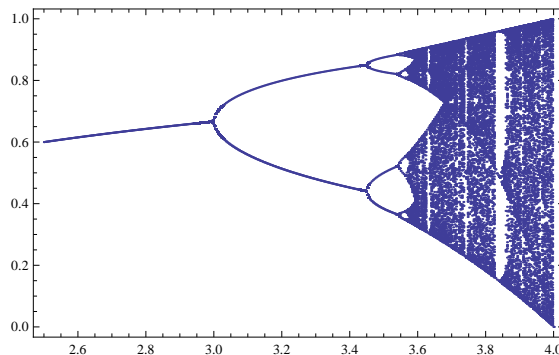
```
BifurcationPlotND[funkcija, {p, pmin, pmax}, {seed},
Steps -> broj1, Iterates -> broj2, FirstIt -> broj3];
```

Bifurkacioni dijagram generišemo ponavljajući sljedeći postupak, gdje su  $FirstIt$ ,  $Iterates$ ,  $Steps$ ,  $pmax$ ,  $pmin$  unaprijed dati brojevi.

- (a) Izaberemo vrijednost parametra  $p$ , počevši sa incijalnom vrijednosti  $pmin$ .
- (b) Izaberemo početnu tačku  $seed = x_0$  u promatranom skupu.
- (c) Izračunamo orbitu u  $x_0$ .
- (d) Odbacimo prvih  $FirstIt - 1$  iteracija i crtamo orbitu počevši sa iteracijom  $FirstIt$  i završavajući nakon  $Iterates$  iteracija.
- (e) Povećamo  $p$  za vrijednost  $(pmax - pmin)/Steps$  i ponovimo postupak.

Najprije ćemo definisati logističku diferentnu jednadžbu sa parametrom, a zatim generisati bifurkacioni dijagram kroz paket `Dynamica`.

```
In[1]:=logisp = x[n + 1] == p x[n] (1 - x[n]);
In[2]:=logispmmap = DEToMap[logisp];
In[3]:=BifurcationPlotND[logispmmap, {p, 2.5, 4.0}, {0.5},
FirstIt -> 450, Iterates -> 200, Steps -> 350]
```



Slika 17: Bifurkacioni dijagram za  $2.5 < p < 4.0$

Konačno dobijamo bifurkacioni dijagram logističke diferentne jednažbe za parametar  $2.5 < p < 4.0$ . Na ovom dijagramu, horizontalna osa predstavlja parametar  $p$  a vertikalna osa rješenje  $x_n$ .

Broj presjeka sa vertikalnom linijom u bilo kojoj tački daje period atraktivnog rješenja za odgovarajuću vrijednost parametra  $p$ .

Može se vidjeti rješenje perioda dva, perioda četiri i perioda osam.

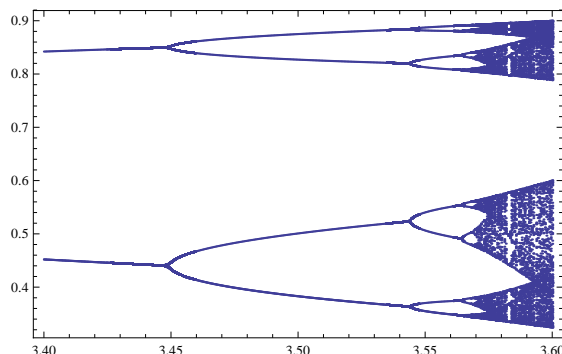
Ovo je početak puta u kaos udvostručavanjem perioda.

Na dijagramu se također vide “bijeli prozori” za vrijednost parametra nešto veću od 3.8, što sugerise na postojanje periodičnog rješenja perioda 3 blizu 3.8.

Bifurkacione vrijednosti za periodična rješenja perioda 2, 4 i 8 mogu se preciznije odrediti na dijagramu za  $3.4 < p < 3.6$ .

Neki bijeli vertikalni prozori smješteni između  $p = 3.58$  i  $3.59$  su jasnije vidljivi.

```
In[4]:=BifurcationPlotND[logispmmap, {p, 3.4, 3.6}, {0.5},
FirstIt -> 450, Iterates -> 200, Steps -> 350]
```



Slika 18: Bifurkacioni dijagram za  $3.4 < p < 3.6$

## 1.6 Lyapunovljevi brojevi

Drugi način za mjerenje složenosti ponašanja rješenja diferentne jednažbe se računa sa Lyapunovljevim brojem. U slučaju jednodimenzionalnog dinamičkog sistema

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad f: (a, b) \rightarrow (a, b) \quad (7)$$

“Lyapunovljev eksponent” je mjera odstupanja dviju orbita koje počinju sa neznatno različitim početnim uvjetima  $x_0$  i  $x_0 \pm \delta_0$ ,  $\delta_0 > 0$ .

Ako je  $x_0$  periodična tačka perioda  $k$  dinamičkog sistema (7), i ako započnemo orbitu sa bliskom tačkom  $x_0 \pm \delta_0$ , onda nakon prve iteracije, gdje je  $x_1 = f(x_0)$  i  $x'_1 = f(x_0 \pm \delta_0)$  razlika među njima je približno

$$x_1 - x'_1 = f(x_0) - f(x_0 \pm \delta_0) \approx f'(x_0)\delta_0.$$

Označimo sa

$$\delta_i = |x_i - x'_i|, \quad M_i = |f'(x_i)|.$$

Iz

$$\delta_1 = |x_1 - x'_1| \approx |f'(x_0)\delta_0| = |f'(x_0)|\delta_0 = M_0\delta_0$$

vidimo da je  $M_0$  faktor uvećavanja za prvu iteraciju.

Nakon druge iteracije, dobijamo

$$\delta_2 \approx |f'(x_1)|\delta_1 = M_1\delta_1 \approx M_0M_1\delta_0,$$

gdje je  $M_1$  faktor uvećavanja za drugu iteraciju.

Nastavljajući dalje na ovakav način, možemo zaključiti da je ukupni faktor uvećanja za periodičnu orbitu perioda  $k$  (tokom jednog ciklusa) jednak proizvodu:

$$M_0M_1 \dots M_{k-1}.$$



Budući da je ovaj proizvod akumulacija faktora uvećanja, ima smisla uzeti u obzir neku prosječnu vrijednost. Najpovoljniji je geometrijska sredina:

$$(M_0 M_1 \dots M_{k-1})^{1/k}.$$

Ako uzmemo logaritam prethodne geometrijske sredine, i onda to označimo sa  $\lambda$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \ln (M_0 M_1 \dots M_{k-1})^{1/k} \\ \lambda &= \frac{1}{k} (\ln M_0 + \ln M_1 \dots \ln M_{k-1}) \\ \lambda &= \frac{1}{k} (\ln |f'(x_0)| + \ln |f'(x_1)| \dots \ln |f'(x_{k-1})|) \end{aligned}$$

Intuitivno, uvjet za stabilnost periodične orbite je da prosječni faktor uvećanja bude manji od 1, što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} \lambda &< 1 && \text{stabilna} \\ \lambda &> 1 && \text{nestabilna.} \end{aligned}$$

Sada ćemo ovaj pristup (sa periodičnom orbitom) iskoristiti kako bi ga proširili na proizvoljnu orbitu.

**Definicija 1.10 (Lyapunovljev eksponent)** *Neka je  $f$  neprekidno diferencijabilno preslikavanje na  $\mathbb{R}$  i neka je  $x_0$  data početna tačka. **Lyapunovljev eksponent**  $\lambda(x_0)$  preslikavanja  $f$  se definiše kao*

$$\lambda(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\ln |f'(x_0)| + \ln |f'(x_1)| \dots \ln |f'(x_{k-1})|), \quad (8)$$

*ukoliko limes postoji. U slučaju kada je bilo koji od izvoda jednak nuli, tada uzimamo da je  $\lambda(x_0) = -\infty$ . **Lyapunovljev broj**  $L(x_0)$  se definiše kao eksponent Lyapunovljevog eksponenta, ukoliko postoji:*

$$L(x_0) = e^{\lambda(x_0)}.$$

**Definicija 1.11 (Asimptotski periodična orbita)** *Za orbitu  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  kažemo da je **asimptotski periodična** ako postoji periodična orbita  $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$  takva da vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0. \quad (9)$$

Sada možemo definisati i haotičnu orbitu.

**Definicija 1.12 (Haotična orbita)** *Neka je  $f$  preslikavanje na  $\mathbb{R}$  i neka je  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  ograničena orbita od  $f$ . Za orbitu kažemo da je haotična, ako*

1. *nije asimptotski periodična*
2. *Lyapunovljev eksponent  $\lambda(x_0) > 0$ .*

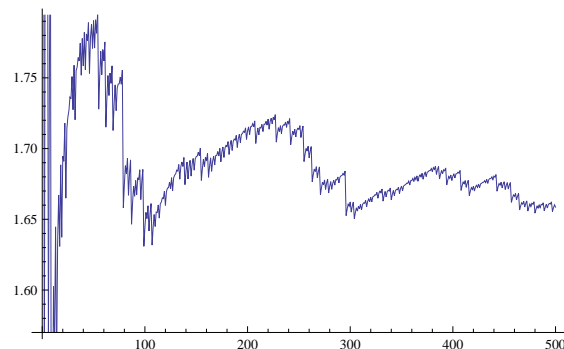
Sada ćemo generisati grafik Lyapunovljevih brojeva, kao grafik tačaka. Prije toga, moramo odrediti Lyapunovljeve brojeve. U tu svrhu ćemo koristiti Dynamica funkciju `LyapunovNumbers`, čija je sintaksa

```
LyapunovNumbers[f, vars0, niter]
```

koja nalazi približne Lyapunovljeve brojeve od `niter` iteracija preslikavanja `f` sa početnom tačkom `vars0`. Uzet ćemo logističko preslikavanje sa parametrom  $p = 3.9$  za generisanje grafika Lyapunovljevih brojeva, sa 500 iteracija (tačaka).

```
In[1]:= << Dynamica`
In[2]:= Logisticeq = x[n + 1] == p x[n] (1 - x[n]);
In[3]:= LogisticMap = DEToMap[Logisticeq];
In[4]:= p = 3.9;
In[5]:= l1 = LyapunovNumbers[LogisticMap, {0.2}, 500];
In[6]:= ListPlot[l1, Joined -> True]
```

što daje sljedeći grafik.



Slika 19: Grafik Lyapunovljevih brojeva sa 500 iteracija

Uzimajući više iteracija (tačaka), dobijamo više precizan grafik logističke jednažbe. Na grafiku (19) vidimo da je orbita sa početkom u  $x_0 = 0.2$  haotična, jer je njen Lyapunovljev broj očito veći od 1.

## 2 Lyness-ova diferentna jednađba

### 2.1 Osnovni pojmovi

Neka je  $I$  interval realnih brojeva, i neka je

$$f: I \times I \rightarrow I$$

neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada svaki skup početnih uvjeta  $x_0, x_{-1} \in I$  diferentne jednađbe

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

ima jedinstveno rješenje  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ .

**Tačka ekvilibrijuma** jednađbe (10) je tačka  $\bar{x} \in I$ , takva da je

$$f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$$

odnosno

$$x_n = \bar{x} \quad \text{za svako } n \geq 0$$

je rješenje jednađbe (10), ili ekvivalentno,  $\bar{x}$  je fiksna tačka preslikavanja  $f$ .

**Lyness-ova diferentna jednađba** je *racionalna diferentna jednađba drugog reda* oblika

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) = \frac{A + x_n}{x_{n-1}} \quad (11)$$

gdje je parametar  $A$  nenegativan realan broj i početni uvjeti  $x_{-1}$  i  $x_0$  proizvoljni pozitivni realni brojevi takvi da je

$$x_n > 0, \quad \text{za svako } n > 0.$$

#### Definicija 2.1 (Stabilnost tačke ekvilibrijuma)

1. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednađbe (10) se naziva **stabilnom**, ili **lokalno stabilnom**, ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da

$$x_0, x_{-1} \in I \quad \text{i} \quad |x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \text{za svako } n \geq -1.$$

2. Tačka ekvilibrijuma naziva se **nestabilnom** ako nije stabilna.

3. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednađbe (10) se naziva **lokalnim atraktorom** ako postoji  $\gamma > 0$  takvo da

$$x_0, x_{-1} \in I \quad \text{i} \quad |x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

4. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednadžbe (10) se naziva **lokalno asimptotski stabilnom**, ili sinkom, ili atraktivnom fiksnom tačkom preslikavanja  $f$  ako je ona stabilna i ako je lokalni atraktor.

5. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednadžbe (10) se naziva **globalnim atraktorom** ako

$$x_0, x_{-1} \in I \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

6. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednadžbe (10) se naziva **globalno asimptotski stabilnom** ako je ona stabilna i ako je globalni atraktor.

7. Tačka ekvilibrijuma  $\bar{x}$  jednadžbe (10) se naziva **odbijajućom tačkom**, ili **repelerom**, ako postoji  $r > 0$  takvo da, za svako  $x_0, x_{-1} \in I$ , za koje je  $0 < |x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ , postoji  $N \geq 1$  tako da je

$$|x_N - \bar{x}| \geq r.$$

Jasno, repeler je nestabilna tačka ekvilibrijuma.

Neka

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}) \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{x})$$

označavaju parcijalne izvode od  $f(u, v)$  izračunate u ekvilibrijumu  $\bar{x}$  jednadžbe (10).

Tada se jednadžba

$$y_{n+1} = py_n + qy_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

zove **linearizirana jednadžba** pridružena jednadžbi (10) u tački ekvilibrijuma  $\bar{x}$ .

Pretpostavimo da rješenja jednadžbe (12) imaju oblik

$$y_n = \lambda^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

gdje vrijednost  $\lambda \neq 0$  treba odrediti. Zamjenom ove vrijednosti u jednadžbu (12) dobijamo:

$$\lambda^{n+1} = p\lambda^n + q\lambda^{n-1}$$

odakle dijeljenjem sa  $\lambda^{n-1} \neq 0$ , slijedi

$$\lambda^2 = p\lambda + q \quad (13)$$

Ova jednadžba se naziva **karakterističnom jednadžbom** diferentne jednadžbe (10), a njeni korijeni  $\lambda$  se nazivaju **svojstvenim vrijednostima**.

**Teorem 2.1 (Teorem linearizirane stabilnosti)**

(a) Ako oba korijena karakteristične jednažbe (13) leže u otvorenom jediničnom disku  $|\lambda| < 1$  onda je ekvilibrijum  $\bar{x}$  jednažbe (10) lokalno asimptotski stabilan.

(b) Ako je barem jedan od korijena karakteristične jednažbe (13) po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan, onda je ekvilibrijum  $\bar{x}$  jednažbe (10) nestabilan.

(c) Potreban i dovoljan uslov da oba korijena karakteristične jednažbe (13) leže u otvorenom jediničnom disku  $|\lambda| < 1$ , je

$$|p| < 1 - q < 2. \tag{14}$$

U ovom slučaju,  $\bar{x}$  je **sink**.

(d) Potreban i dovoljan uslov da oba korijena karakteristične jednažbe (13) imaju apsolutnu vrijednost veću od jedan, je

$$|q| > 1 \quad i \quad |p| < |1 - q|.$$

U ovom slučaju,  $\bar{x}$  je **repeler**.

(e) Potreban i dovoljan uslov da jedan korijen karakteristične jednažbe (13) ima apsolutnu vrijednost veću od jedan, i da drugi ima apsolutnu vrijednost manju od jedan, je

$$p^2 + 4q > 0 \quad i \quad |p| > |1 - q|.$$

U ovom slučaju, nestabilni ekvilibrijum se zove **sedlasta tačka**.

(f) Potreban i dovoljan uslov da korijen karakteristične jednažbe (13) ima apsolutnu vrijednost jednaku jedan, je

$$|p| = |1 - q|$$

ili

$$q = -1 \quad i \quad |p| \leq 2.$$

U ovom slučaju, ekvilibrijum  $\bar{x}$  se zove **nehiperbolična tačka**.

### Definicija 2.2

(a) Za rješenje  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  jednadžbe (10) kažemo da je **periodično** sa periodom  $p$  ako je

$$x_{n+p} = x_n \quad \text{za svako } n \geq -1. \quad (15)$$

(b) Za rješenje  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  jednadžbe (10) kažemo da je **periodično sa prostim periodom**  $p$ , ili  **$p$ -ciklično** ako je ono periodično sa periodom  $p$  i ako je  $p$  najmanji prirodan broj za koji vrijedi (15).

Važan alat za ispitivanje stabilnosti i asimptotskih ponašanja nekih diferentnih jednadžbi je proučavanje njihovih invarijanti.

**Definicija 2.3** Nekonstantno neprekidno preslikavanje  $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se naziva **invarijanta** za (10) ako vrijedi

$$I(x_{n+1}, x_n) = I(x_n, x_{n-1}) \quad \text{za svako } n = 0, 1, \dots$$

Specijalan slučaj jednadžbe (11), za  $A = 1$ , Lyness je otkrio 1942. godine radeći na problemima iz Teorije brojeva. U ovom specijalnom slučaju, jednadžba postaje

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

a svako njeno rješenje je periodično sa periodom pet. Zaista je rješenje jednadžbe (16) sa početnim uvjetima  $x_0$  i  $x_{-1}$  5-ciklično:

$$x_{-1}, x_0, \frac{1 + x_0}{x_{-1}}, \frac{1 + x_{-1} + x_0}{x_{-1}x_0}, \frac{1 + x_{-1}}{x_0}, \dots$$

Jednadžba (11) posjeduje invarijantu

$$I(x_n, x_{n-1}) = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) (A + x_n + x_{n-1}) = \text{constant}$$

iz čega slijedi da je svako rješenje jednadžbe (11) ograničeno odozdo i odozgo sa pozitivnom konstantom.

U posljednjih nekoliko godina Lynessova jednadžba (11) je privukla veliku pažnju stručnjaka iz oblasti diskretnih dinamičkih sistema i diferentnih jednadžbi. Jedan od razloga za taj interes je bogata dinamika koju posjeduje ova jednadžba

Sada ćemo razmotriti problem pronalaženja i analize tačaka ekvilibrijuma Lynessove jednadžbe. Lynessovo preslikavanje ćemo definirati u zavisnosti od parametara  $A$ , na sljedeći način:

In[1] := L[x\_, y\_] := (A + x)/y;

Odredimo fiksne tačke.

In[2] := Solve[L[x, x] == x, x]

Out[2] = {{x -> 1/2 (1 - Sqrt[1 + 4 A])}, {x -> 1/2 (1 + Sqrt[1 + 4 A])}}

In[3] := {ft1, ft2} = {x, x} /. %

Out[3] = {{1/2 (1 - Sqrt[1 + 4 A]), 1/2 (1 - Sqrt[1 + 4 A])},  
{1/2 (1 + Sqrt[1 + 4 A]), 1/2 (1 + Sqrt[1 + 4 A])}}

Vidimo da imaju dvije fiksne tačke. U varijable ft1 i ft2 smo pohranili prvu i drugu fiksnu tačku.

Odredimo parcijalne izvode po objema promjenljivim.

In[4] := p = D[L[x, y], x]

Out[4] = 1/y

In[5] := q = D[L[x, y], y]

Out[5] = -(A + x)/y^2

Odredimo vrijednost  $p$  i  $q$  u fiksnoj tački ft1,

In[7] := {x, y} = ft1;

In[8] := p1 = p

Out[8] = 2/(1 - Sqrt[1 + 4 A])

In[9] := q1 = q

Out[9] = -((4 (A + 1/2 (1 - Sqrt[1 + 4 A])))/(1 - Sqrt[1 + 4 A])^2)

a zatim i u fiksnoj tački ft2.

In[7] := {x, y} = ft2;

In[8] := p2 = p

Out[8] = 2/(1 + Sqrt[1 + 4 A])

In[9] := q2 = q

Out[9] = -((4 (A + 1/2 (1 + Sqrt[1 + 4 A])))/(1 + Sqrt[1 + 4 A])^2)

Odredimo karakterističnu jednažbu.

In[10] := kp = \[Lambda]^2 - p \[Lambda] - q == 0;

In[11] := kp = FullSimplify[kp]

Out[11] = (\[Lambda] + Sqrt[1 + 4 A] \[Lambda] + 2 A (1 + \[Lambda]^2))/(2 A)

Izračunajmo karakterističnu jednažbu u `ft1`,

```
In[12]:= {x, y} = ft1;
```

```
In[13]:= kp1 = kp;
```

```
In[14]:= kp1 = FullSimplify[kp1, A > 0]
```

```
Out[14] = (\[Lambda] + Sqrt[1 + 4 A] \[Lambda] + 2 A (1 + \[Lambda]^2))/(2 A)
```

a zatim izračunajmo svojstvene vrijednosti karakteristične jednažbe u `ft1`.

```
In[15]:= Solve[kp1 == 0, \[Lambda]]
```

```
In[16]:= {sv1, sv2} = \[Lambda] /. %
```

```
Out[16] :=
```

```
{(-1 - Sqrt[1 + 4 A] - Sqrt[2 + 4 A - 16 A^2 + 2 Sqrt[1 + 4 A]])/(4 A),  
(-1 - Sqrt[1 + 4 A] + Sqrt[2 + 4 A - 16 A^2 + 2 Sqrt[1 + 4 A]])/(4 A)}
```

```
In[17]:= FullSimplify[sv1*sv2, A > 0]
```

```
Out[17] = 1
```

Vidimo da je proizvod svojstvenih vrijednosti u `ft1` jednak jedan.

Da bismo utvrdili jesu li svojstvene vrijednosti realni ili kompleksni brojevi, posmatrajmo znak diskriminante karakteristične jednažbe `kp1`.

```
In[18]:= disc1 = Discriminant[kp1, \lambda];
```

```
disc1 = FullSimplify[disc1]
```

```
Out[18] =  $\frac{1+2A-8A^2+\sqrt{1+4A}}{2A^2}$ 
```

Grafik diskriminante (20) pokazuje da ona može biti pozitivna ili negativna u zavisnosti od parametra  $A$ .

```
In[19]:= Plot[disc1, {A, 0, 4}, PlotRange -> {-5, 5}]
```

Odredimo nule diskriminante.

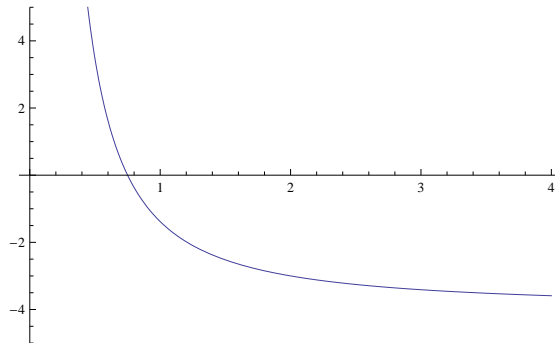
```
In[20]:= Solve[disc1 == 0, A]
```

```
Out[20] = {{A -> -(1/4)}, {A -> 3/4}}
```

Diskriminanta je nula u tim vrijednostima parametra  $A$ . Sa grafika (20) uočavamo da je diskriminanta negativna na intervalu  $(\frac{3}{4}, +\infty)$ , odnosno da su u tom intrvalu korijeni karakteristične jednažbe kompleksni brojevi.

Razmotrimo slučaj kada je  $A = \frac{3}{4}$ . Tada su obje svojstvene vrijednosti u `ft1` jednake  $-1$ .





Slika 20: Grafik diskriminante karakteristične jednažbe  $kp_1$

```
In[21] := sv1 /. A -> 3/4
```

```
Out[21] = -1
```

```
In[22] := sv2 /. A -> 3/4
```

```
Out[22] = -1
```

Fiksna tačka  $ft_1$  za  $A = \frac{3}{4}$  je  $-\frac{1}{2}$ .

```
In[23] := ft1 /. A -> 3/4
```

```
Out[23] = {-(1/2), -(1/2)}
```

Sada ćemo dati glavni zaključak u pogledu svojstvenih vrijednosti u smislu teorema (2.1). U tu svrhu, kreiraćemo grafik svojstvenih vrijednosti u fiksnoj tački  $ft_1$  u zavisnosti od parametra  $A$ .

```
In[24] := eqn = kp1 == 0;
```

```
sol = Solve[eqn, \[Lambda]];
```

```
{sol1, sol2} = {\[Lambda]} /. %;
```

```
g1 = Plot[sol1, {A, 0, 3/4}, PlotRange -> {-3, 1}, PlotStyle -> Red];
```

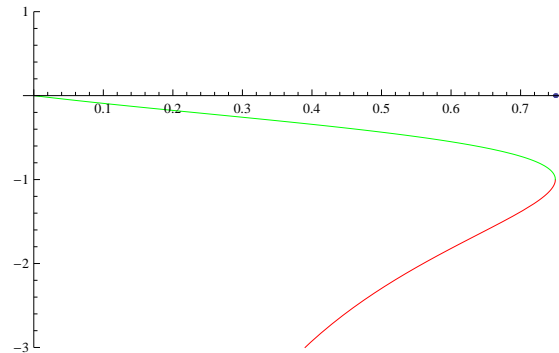
```
g2 = Plot[sol2, {A, 0, 3/4}, PlotRange -> {-3, 1}, PlotStyle -> Green];
```

```
g3 = ListPlot[{{3/4, 0}}];
```

```
Show[g1, g2, g3]
```

Koristeći sve prethodno rečeno kao i grafik (21) zaključujemo da ako je  $A < \frac{3}{4}$  onda postoje dvije realne svojstvene vrijednosti, jedna je po apsolutnoj vrijednosti manja od jedan (zeleni grafik) a druga je veća od jedan (crveni grafik). U tom slučaju, fiksna tačka koju smo označili sa  $fp_1$  je *nestabilna*, i to *sedlasta tačka*.

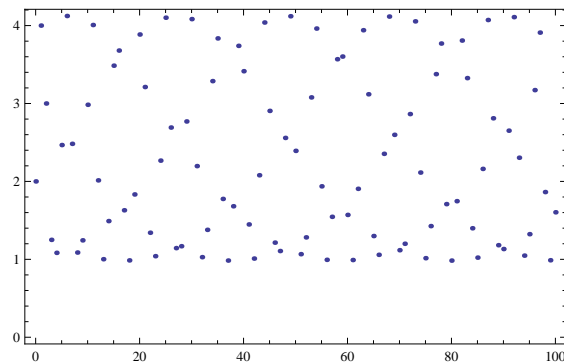
Generišimo orbitu Lynessovog preslikavanja sa 100 tačaka, i pri tome uzmimo da je  $(1, 2)$  početna tačka. Uzet ćemo da je  $A = 2$ , i prikazati prvih deset članova orbite.



Slika 21: Grafik svojstvenih vrijednosti za  $ft1$  u zavisnosti od  $A$

```
In[25]:= A = 2;
In[26]:= orb = Orbit[LynessMap, {1.0, 2.0}, 100];
In[27]:= Take[orb, {1, 10}]
Out[27]= {{1., 2.}, {2., 4.}, {4., 3.}, {3., 1.25}, {1.25, 1.08333},
{1.08333, 2.46667}, {2.46667, 4.12308}, {4.12308, 2.48233},
{2.48233, 1.08713}, {1.08713, 1.24364}}
```

Nacrtajmo grafik tačaka prethodne orbite sa 100 rješenja.

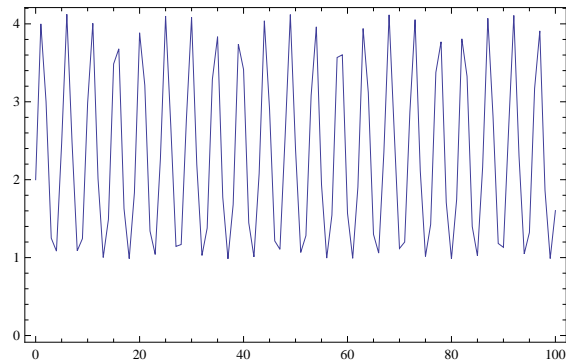


Slika 22: Grafik tačaka orbite Lynessove jednažbe

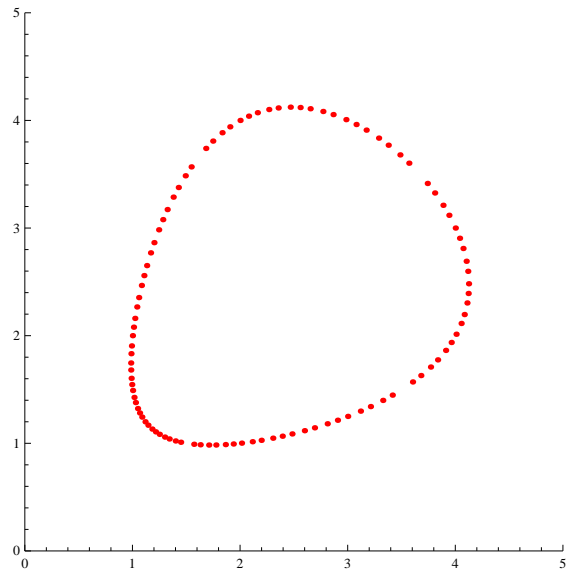
Generišimo odgovarajući grafik vremenskog niza za prethodni grafik tačaka. Fazni portret pokazuje da je orbita sadržana u zatvorenoj krivoj. Fazni portret je generisan sljedećom Dynamica narednom:

```
In[28]:=
f1 = PhasePortrait[orb, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 5}}, Colors -> {Red}]
```

Sada ćemo generisati još dva fazna portreta za druge dvije orbite Lynesove jednažbe, i prikazati sva tri fazna portreta na jednom grafiku.



Slika 23: Grafik vremenskog niza orbite Lynessove jednažbe

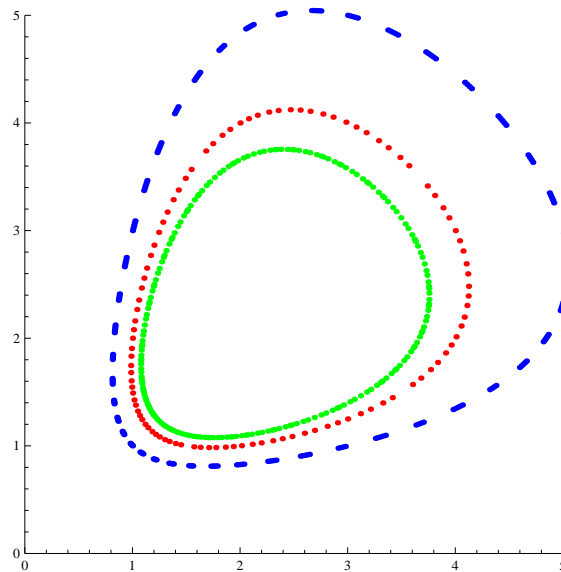


Slika 24: Fazni portret orbite Lynessove jednažbe

```
In[29]:= orb2 = Orbit[LynessMap, {1.0, 1.0}, 200];  
In[30]:=  
f2 = PhasePortrait[orb2, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 5}}, Colors -> {Blue}];  
In[31]:= orb3 = Orbit[LynessMap, {1.2, 2.5}, 200];  
In[32]:=  
f3 = PhasePortrait[orb3, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 5}}, Colors -> {Green}];  
In[33]:= Show[f1, f2, f3]
```

Generišimo grafik invarijante Lynessove diferentne jednažba. Lynessove diferentne jednažba je već definisana u paketa *Dynamica*.

```
In[34]:= Lyness
```



Slika 25: Fazni portreti orbita Lynessove jednadžbe

Out[34]=  $x[1 + n] == (A + x[n])/x[-1 + n]$

Za nalaženje invarijante, korišćemo Mathematica naredbu `RationalInvariant[]`.

In[35]:= `invLyness = RationalInvariant[Lyness]`

Out[35]=  $c[1] + ((1 + A) c[8])/x[-1 + n] + c[8] x[-1 + n] + ((1 + A) c[8])/x[n] + (A c[8])/(x[-1 + n] x[n]) + (c[8] x[-1 + n])/x[n] + c[8] x[n] + (c[8] x[n])/x[-1 + n] c[1] + ((1 + A) c[8])/x[-1 + n] + c[8] x[-1 + n] + ((1 + A) c[8])/x[n] + (A c[8])/(x[-1 + n] x[n]) + (c[8] x[-1 + n])/x[n] + c[8] x[n] + (c[8] x[n])/x[-1 + n]$

In[36]:= `invLyness = invLyness /. {c[8] -> 1, c[1] -> A + 2}`

Out[36]=  $2 + A + (1 + A)/x[-1 + n] + x[-1 + n] + (1 + A)/x[n] + A/(x[-1 + n] x[n]) + x[-1 + n]/x[n] + x[n] + x[n]/x[-1 + n]$

In[37]:= `invLyness = invLyness /. {x[n] -> x, x[n - 1] -> y}`

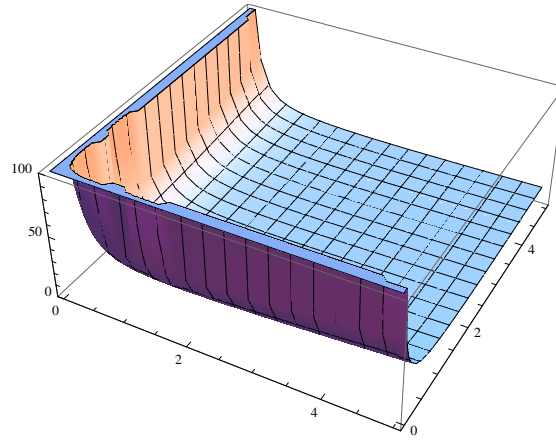
Out[37]=  $2 + A + (1 + A)/x + x + (1 + A)/y + A/(x y) + x/y + y + y/x$

In[38]:= `invLyness = Factor[invLyness]`

Out[38]=  $((1 + x) (1 + y) (A + x + y))/(x y)$

In[39]:= `A = 2.0;`

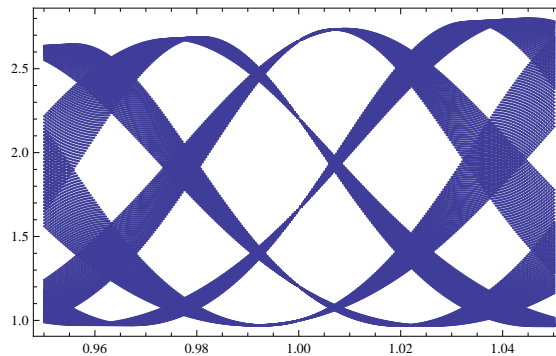
In[40]:= `Plot3D[invLyness, {x, 0.001, 5}, {y, 0.001, 5}, PlotRange -> {0, 100}, PlotPoints -> 30]`



Slika 26: Grafik invarijante Lynessove diferentne jednažbe za  $A = 2$

Kompleksno ponašanje Lynessove jednažbe za različite vrijednosti parametra  $A$  može se vidjeti iz bifurkacionog dijagrama.

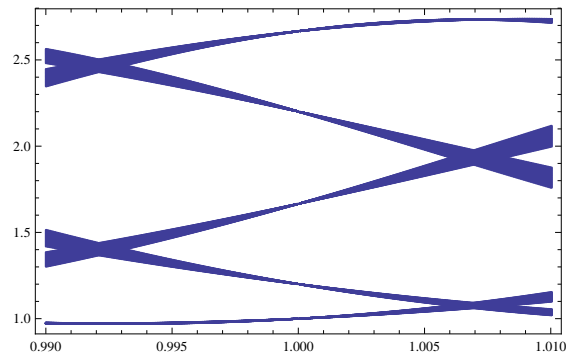
```
In[41]:= Clear[A]
In[42]:= BifurcationPlotND[LynessMap, {A, 0.95, 1.05}, {1.2, 1.0},
Steps -> 300, Iterates -> 150, FirstIt -> 400]
```



Slika 27: Bifurkacioni dijagram Lynessove jednažbe za  $A \in (0.95, 1.05)$

Ranije smo rekli, da je za  $A = 1$  svako rješenje Lynessove jednažbe periodično sa periodom pet, a vizualnu potvrdu toga nam daje bifurkacioni dijagram, kojeg ćemo uvećati u blizini tačke  $A = 1$ .

```
In[43]:= BifurcationPlotND[LynessMap, {A, 0.99, 1.01}, {1.2, 1.0},
Steps -> 300, Iterates -> 150, FirstIt -> 400]
```

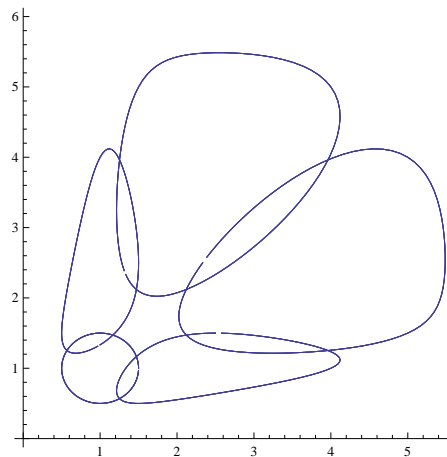


Slika 28: Bifurkacioni dijagram Lynessove jednažbe za  $A \in (0.99, 1.01)$

Koristeći Dynamica funkciju `PoincarePlot2D[]` za generisanje Poincare-ovog grafika možemo također vizuelno pokazati da Lynessovo preslikavanje, sa parametrom  $A = 1$ , ima sva rješenja periodična sa periodom 5.

U Dynamica paketu je definisano i Lynessovo preslikavanje `LynessMap[{x,y}]`.

```
In[44]:= PoincarePlot2D[LynessMap, 20]
```



Slika 29: Poincareov grafik Lynessovog preslikavanja za  $A = 1$

Ovdje smo primijenili 20 puta `PoincarePlot2D` na početnu kružnicu da pokažemo evoluciju ove kružnicu pod Lynessovim preslikavanjem. Početna kružnica je definisana u centru sa koordinatama  $(1, 1)$  i prečnikom 1. Na grafiku vidimo samo pet različitih oblika, zato što je svako rješenje periodično sa periodom pet.

## Literatura

- [E] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations - Third Edition*, Springer, New York, 2005.
- [KM] M.R.S. Kulenović and O. Merino, *Discrete Dynamical systems and Difference Equations with Mathematica*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton - New York, 2002.
- [KL] M.R.S. Kulenović and G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations*, Chapman/CRC, Boca Raton, 2002.
- [N] M. Nurkanović, *Diferentne jednažbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.
- [KL] M.R.S. Kulenović and G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, D.C., 2001.