UNIVERZITET U BIHAĆU
PEDAGOŠKI FAKULTET
MATEMATIKA I FIZIKA

Izračunavanje konačnih suma i suma beskonačnih redova pomoću diferentnog računa

Diplomski rad

Sulejman Hadžirić
Mentor: Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Bihać, maj 2008.

Sadržaj

1. Uvod

Da bi se odredila neka suma, konačna ili beskonačna, potreban je ogroman račun dok je u nekim slučajevima to izračunavanje možda čak i nemoguće. Zbog toga se javila potreba da se pronađe neko jednostavnije rješenje za određivanje konačnih i beskonačnih suma koje se pronašlo u operatorima. U narednom izlaganju će biti objašnjeno kako su to operatori pomogli pri određivanju konačnih i beskonačnih suma. Kao što u rješavanju i analizi diferencijalnih jednadžbi značajnu ulogu igra *diferencijalni i integralni račun*, tako isto u rješavanju i analizi (posebno linearnih) diferentnih jednadžbi vrlo značajno mjesto zauzima *diferentni račun*, koji predstavlja diskretni analogon diferencijalnog i integralnog računa. U diferentnom računu bitna su dva operatora, koja ćemo u prvom dijelu ovog rada definirati i za koje ćemo navesti neke osnovne osobine. Riječ je o *diferentnom (diferencijskom) operatoru i translacijskom operatoru.* Prvo ćemo preko ova dva operatora objasniti koje su sličnosti i razlike između diferentnog i diferencijalnog računa, te navesti najvažnije definicije i teoreme koji će nam biti neophodni kasnije za izračunavanje sume reda. Važno je uočiti da se diferentni operator može primjenjivati i na funkcije dvije ili više promjenljivih, ali je potrebno u indeksu operatora naznačiti koja će varijabla biti translatirana za jednu jedinicu. Također je važno napomenuti da su i diferentni i translacijski operator linearni operatori. Nakon toga ćemo definisati pojam stepena padajućeg faktorijela, te objasniti kako na osnovu njega izračunavamo sumu reda. Zatim ćemo uvesti pojam antidiferentnog operatora kao inverznog operatora diferentnog operatora. Navest ćemo najvažnije definicije i teoreme, kao i formule koje će nam koristiti za izračunavanje suma, te ćemo pokazati na koji način se izračunavaju sume pomoću antidiferentnog operatora. Zatim ćemo navesti Monmortov teorem i objasniti kako na osnovu njega možemo izračunati sume beskonačnih redova.

2. Diferentni operator

Definicija 2.1 *Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne promjenljive t.* ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definišemo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t). \tag{2.1}$$

Ubuduće ćemo smatrati da je domen funkcije x skup uzastopnih brojeva. U tom slučaju promjenljivu t zamijenit ćemo oznakom n, a izraz $x(n)$ sa x_n, pa ćemo jednakost (2.1) pisati u obliku

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Uočimo da veličina koraka od jedne jedinice realno gledajući nije nikakva restrikcija. Naime, promatramo li diferentni operator $y(s+h) - y(s)$, s veličinom koraka $h > 0$, i uvedemo li smjenu $x(t) = y(th)$, imaćemo

$$y(s+h) - y(s) = y(th+h) - y(th) = x(t+1) - x(t) = \Delta x(t).$$

Uočimo da se diferentni operator može primjenjivati i na funkcije dvije ili više promjenljivih, ali je potrebno u indeksu operatora naznačiti koja će varijabla biti translatirana za jednu jedinicu. Razlike višeg reda se definiraju pomoću kompozicije diferencijalnog operatora sa samim sobom. Tako je razlika drugog reda

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(t) &= \Delta(\Delta x(t)) = \Delta(x(t+1) - x(t)) \\ &= (x(t+2) - x(t+1) - (x(t+1) - x(t)) \\ &= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t). \end{aligned}$$

Razlika reda n definira se indukcijom:

$$\Delta^n x(t) = \Delta(\Delta^{n-1} x(t)) \qquad (n = 2, 3, ...),$$

to zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \Delta^n x(t) &= x(t+n) - nx(t+n-1) + \frac{n(n+1)}{2} x(t+n-2) + .. + (-1)^n x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(t+n-k). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definicija 2.2 ***Translacijski operator*** *(ili shift operator) definiramo jednakošću*

$$Ex(t) = x(t+1). \tag{2.3}$$

U slučaju da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, formula (2.3) se može pisati u obliku

$$Ex_n = x_{n+1}.$$

Ako sa I označimo identični operator, tj. $I(t) \equiv t$, tada imamo

$$\Delta = E - I, \tag{2.4}$$

odnosno

$$E = \Delta + I. \tag{2.5}$$

Relacije (2.4) i (2.5) su vrlo značajne i koriste se kada jedan od dva operatora, Δ ili E, treba izraziti preko onog drugog. Tako jednostavnije dolazimo do relacije (2.2):

$$\begin{aligned} \Delta^n x(t) = (E-I)^n x(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^k E^{n-k} x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(t+n-k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Slično, korištenjem formule (2.5), dobijamo relaciju

$$\begin{aligned} E^n x(t) &= (\Delta + I)^n x(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (I)^k \Delta^{n-k} x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} x(t). \end{aligned}$$

Osim toga, vrijedi zanimljiva osobina da operatori Δ i E međusobno komutiraju, tj. vrijedi

$$\Delta E x(t) = E \Delta x(t).$$

Teorem 2.1

1. $\Delta^n(\Delta^m x(t)) = \Delta^m(\Delta^n x(t)) = \Delta^{m+n} x(t)$, *za sve pozitivne cijele brojeve m i n.*
2. $\Delta(x(t)+y(t)) = \Delta x(t) + \Delta y(t)$.
3. $\Delta(Cx(t)) = C\Delta(x(t))$, *ako je C konstanta.*
4. $$\begin{aligned} \Delta(x(t)y(t)) &= x(t)\Delta y(t) + Ey(t)\Delta x(t) \\ &= y(t)\Delta x(t) + Ex(t)\Delta y(t) = x(t)\Delta y(t) + y(t)\Delta x(t) + \Delta x(t)\Delta y(t). \end{aligned}$$
5. $$\Delta\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) = \frac{y(t)\Delta x(t) - x(t)\Delta y(t)}{y(t)Ey(t)}.$$

Primjedba 2.1 *Osobina 4. se može poopćiti i za slučaj razlike n-tog reda te dobiti tzv.* ***Leibnitzovu formulu*** *za razlike (diferencije):*

$$\Delta^n(x(t)y(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k x(t))(\Delta^{n-k} y(t+k)). \tag{2.7}$$

Definirajmo operatore E_1 i E_2 koji djeluju, respektivno, na $x(t)$ i $y(t)$, tj.

$$E_1(x(t)y(t)) = x(t+1)y(t), \qquad E_2(x(t)y(t)) = x(t)y(t+1).$$

Iz jednakosti

$$E_1E_2(x(t)y(t)) = x(t+1)y(t+1),$$

slijedi da je $E = E_1E_2$. Definirajmo još i operatore Δ_1 i Δ_2 tako da vrijedi

$$\Delta_i = E_i - I \qquad (i = 1, 2).$$

Zbog toga je

$$\Delta = E - I = E_1E_2 - I = (I + \Delta_1)E_2 - I = E_2 + \Delta_1E_2 - I = \Delta_2 + \Delta_1E_2$$

i

$$\Delta^n(x(t)y(t)) = (\Delta_2 + \Delta_1E_2)^n(x(t)y(t)).$$

Koristeći binomni razvoj, konačno dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta^n(x(t)y(t)) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k}\Delta_1^k E_2^k\right)(x(t)y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k x(t))(\Delta^{n-k} y(t+k)).\end{aligned}$$

Navedimo sada neke formule za izračunavanje diferencija nekih posebnih funkcija (nešto što podsjeća na tablicu izvoda osnovnih funkcija).

Teorem 2.2 *Neka je a konstanta. Tada vrijedi*

1. $\Delta a = 0$.
2. $\Delta a^t = (a-1)a^t$.
3. $\Delta \sin at = 2sin\frac{a}{2}cosa(t+\frac{1}{2})$.
4. $\Delta \cos at = -2sin\frac{a}{2}sina(t+\frac{1}{2})$.
5. $\Delta \log at = log(1+\frac{1}{t})$.

6. $\Delta \log \Gamma(t) = logt$.

Dokaz:
Prvih pet osobina se jednostavno dokazuju.

$$6. \qquad \Delta \log \Gamma(t) = \log \Gamma(t+1) - \log \Gamma(t) = \log \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = \log \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t)} = \log t.$$

■

Teorem 2.3

$$1. \qquad \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0} \tag{2.8}$$

$$2. \qquad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k\right) = x_n. \tag{2.9}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k &= \sum_{k=n_0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \\ &= (x_{n_0+1} - x_{n_0}) + (x_{n_0+2} - x_{n_0+1}) + ... + ((x_n - x_{n-1}) = x_n - x_{n_0} \end{aligned}$$

$$2. \quad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k\right) = \sum_{k=n_0}^{n} \Delta x_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n$$

■

Znamo da u diferencijalnom računu vrijedi

$$\frac{d}{dt} t^n = nt^{n-1}. \tag{2.10}$$

Nažalost, diferencija stepena je komplicirana i kao rezultat nije mnogo upotrebljiva:

$$\begin{aligned} \Delta_t t^n &= (t+1)^n - t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k - t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k. \end{aligned}$$

Ipak je moguće doći do formule za diferencije koja je analogna formuli (2.10), ali je umjesto stepene funkcije t^n potrebno uvesti jednu posebnu funkciju. Sljedeća definicija uvodi takvu funkciju koja će zadovoljiti neku verziju uloge stepene funkcije za konačne razlike.

Definicija 2.3 ***Stepen padajućeg faktoriela*** $t^{(r)}$ *(čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable r, na sljedeći način:*

1. *Ako je* $r = 1, 2, 3, ...,$ *tada* $t^{(r)} = t(t-1)\cdots(t-r+1)$.
2. *Ako je* $r = 0$, *tada* $t^{(0)} = 1$.
3. *Ako je* $r = -1, -2, -3, ...,$ *tada* $t^{(r)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}$.
4. *Ako r nije cio broj, tada* $t^{(r)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$.

Definicija 2.4 ***Općeniti binomni koeficijent*** $\binom{t}{r}$, $(t, r \in \boldsymbol{R})$ *se definira kao*

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)}.$$

Binomni koeficijenti zadovoljavaju mnoge korisne identitete, od kojih su za nas posebno značajna sljedeća tri.

Lema 2.1

$$\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r} \qquad \textit{simetrija},$$

$$\binom{t}{r} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{izvl. ispred zagrade},$$

$$\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{adiciona formula.}$$

Dokaz: Ovi identiteti se dokazuju na osnovu prethodne dvije definicije.

$$\binom{t}{r} = \frac{\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(r+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(t-r+1)} = t^{(t-r)} \cdot \frac{1}{\Gamma(t-r+1)} = \binom{t}{t-r};$$

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \cdot \frac{1}{r\Gamma(r)} = \frac{t}{r} \cdot \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)} \cdot \frac{1}{r\Gamma(r)}$$

$$= \frac{t}{r} \cdot \frac{(t-1)^{(r-1)}}{\Gamma(r)} = \frac{t}{r} \cdot \binom{t-1}{r-1}.$$

■

Sljedeći teorem daje rezultate u slučaju primjene diferentnog operatora na stepen padajućeg faktorijela, slične rezultatima diferenciranja stepena, te i rezultate primjene operatora Δ na opće binomne koeficijente.

Teorem 2.4

1. $\Delta_t t^{(r)} = rt^{(r-1)}$.
2. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0)$.
3. $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$.

Dokaz:
1. Pretpostavimo prvo da je $r \in Z^+$.

$$\begin{aligned}\Delta_t t^{(r)} &= (t+1)^{(r)} - t^{(r)} = (t+1)t\cdots(t-r+2) - t(t-1)\cdots(t-r+1) \\ &= t(t-1)\cdots(t-r+2)[(t+1)-(t-r+1)] \\ &= rt^{(r-1)}.\end{aligned}$$

Neka je sada r proizvoljan realan broj. Koristeći Definiciju 2.3 *4.*, imamo

$$\begin{aligned}\Delta_t t^{(r)} &= \Delta_t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{(t-r+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} = r\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} \\ &= rt^{(r-1)}.\end{aligned}$$

2. Koristeći rezultat pod 1., sada imamo

$$\begin{aligned}\Delta_t \binom{t}{r} &= \Delta_t \frac{t^{(r)}}{\Gamma(t+1)} = \frac{rt^{(r-1)}}{\Gamma(t+1)} = \frac{rt^{(r-1)}}{r\Gamma(r)} = \frac{t^{(r-1)}}{\Gamma(r)} \\ &= \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0).\end{aligned}$$

3. Ova se jednakost dobija kao posljedica adicione formule:

$$\begin{aligned}\Delta_t \binom{r+t}{t} &= \binom{r+t+1}{t+1} - \binom{r+t}{t} \\ &= \binom{r+t}{t+1} + \binom{r+t}{t} - \binom{r+t}{t} \\ &= \binom{r+t}{t+1}.\end{aligned}$$

■

Posljedica 2.1 *Za fiksne* $k \in Z^+$ *i* $x \in R$, *vrijedi*

1. $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$,
2. $\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{(k-n)}$,
3. $\Delta^k x^{(k)} = k!$.

Već od ranije znamo da je diferencija stepena komplicirana i kao takva nije mnogo upotrebljiva. S druge strane, stepen padajućeg faktoriela ima jako lijepe osobine pri djelovanju diferentnog operatora. To nas, u slučajevima izračunavanja konačnih razlika, navodi na potrebu prevođenja običnog polinoma stepena k

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k$$

u tzv. *faktorielski polinom*

$$\phi_k(n) = a_0 n^{(k)} + a_1 n^{(k-1)} + ... + a_{k-1} n^{(1)} + a_k.$$

U tu svrhu potrebne su nam formule za predstavljanje stepena padajućeg faktoriela pomoću običnih stepena varijeble n, kao i obrnuto.

Razvijanjem odgovarajućih izraza, a na osnovu definicije stepena padajućeg faktoriela, imamo

$$\begin{aligned} n^{(0)} &= 1, \\ n^{(1)} &= n, \\ n^{(2)} &= n^2 - n, \\ n^{(3)} &= n^3 - 3n^2 + 2n, \\ n^{(4)} &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n, \\ n^{(5)} &= n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + 24n, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jednostavnim preračunavanjem, dobijamo

$$\begin{aligned} 1 &= n^{(0)}, \\ n &= n^{(1)}, \\ n^2 &= n^{(2)} + n^{(1)}, \\ n^3 &= n^{(3)} + 3n^{(2)} + n^{(1)}, \\ n^4 &= n^{(4)} + 7n^{(3)} + 6n^{(2)} + n^{(1)}, \\ n^5 &= n^{(5)} + 15n^{(4)} + 25n^{(3)} + 10n^{(2)} + n^{(1)}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.12}$$

Izrazi (2.11) i (2.12) mogu biti jednostavnije zapisani u sljedećoj formi, respektivno

$$n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i^k n^i \tag{2.13}$$

i

$$n^k = \sum_{i=1}^{k} S_i^k n^{(i)}. \tag{2.14}$$

Koeficijenti s_i^k se nazivaju *Stirlingovim brojevima prve vrste*, a koeficijenti S_i^k *Stirlingovim brojevima druge vrste*. Zanimljive su rekurentne relacije koje zadovoljavaju ovi brojevi.

Teorem 2.5

1. *Stirlingovi brojevi prve vrste zadovoljavaju sljedeću rekurentnu relaciju*

$$s_i^{k+1} = s_{i-1}^k - k s_i^k, \tag{2.15}$$

gdje je, za $k > 0$, $s_k^k = 1$, $s_i^k = 0$ $(i \leq 0, i \geq k+1)$.

2. *Stirlingovi brojevi druge vrste zadovoljavaju sljedeću rekurentnu relaciju*

$$S_i^{k+1} = S_{i-1}^k - i S_i^k, \tag{2.16}$$

gdje je, za $k > 0$, $S_k^k = 1$, $S_i^k = 0$ $(i \leq 0, i \geq k+1)$.

Dokaz:
1. Koristeći činjenicu da za $k > 0$, $s_k^k = 1$, $s_i^k = 0$ $(i \leq 0, i \geq k+1)$, formula (2.13) može biti napisana u obliku

$$n^{(k)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^k n^i. \tag{2.17}$$

Odavdje slijedi

$$n^{(k+1)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^{k+1} n^i. \tag{2.18}$$

Prema definiciji stepena padajućeg faktorijela, imamo

$$n^{(k+1)} = (n-k) n^k. \tag{2.19}$$

Zamjenom jednakosti (2.17) i (2.18) u (2.19) dobija se

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^{k+1} n^i = (n-k) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^k n^i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^k n^{i+1} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k s_i^k n^i$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_{i-1}^k n^i - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} ks_i^k n^i$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (s_{i-1}^k - ks_i^k) n^i,$$

odakle neposredno slijedi formula (2.15).

2. Analogno prethodnom, koristeći činjenicu da za $k > 0$, $S_k^k = 1$, $S_i^k = 0$ $(i \leq 0, i \geq k+1)$, formula (2.14) može biti napisana u obliku

$$n^k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n^{(i)}, \tag{2.20}$$

odakle slijedi

$$n^{k+1} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{k+1} n^{(i)}, \tag{2.21}$$

Kako je

$$n^{k+1} = nn^k, \tag{2.22}$$

to, zamjenom (2.20) i (2.21) u (2.22) dobija se

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{k+1} n^{(i)} = n \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n^{(i)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k nn^{(i)}. \tag{2.23}$$

Međutim,

$$nn^i = nn(n-1)\cdots(n-i+1) = (n-i+i)n(n-1)\cdots(n-i+1)$$
$$= n^{(i+1)} + in^{(i)}. \tag{2.24}$$

Koristeći relaciju (2.24), iz (2.23) imamo

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{k+1} n^{(i)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k (n^{(i+1)} + in^i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n^{(i+1)} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} iS_i^k n^{(i)}$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_{i-1}^k n^{(i)} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} iS_i^k n^{(i)}$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (S_{i-1}^k + iS_i^k) n^{(i)},$$

odakle slijedi formula (2.16). ■

3. Antidiferentni operator

U prethodnom dijelu definirali smo diferentni operator Δ, te uveli pojam stepena Δ^n $(n \in \mathbf{N}_0)$ i istakli njihove osnovne karakteristike. Logičnim se nameće pitanje da li se stepen Δ^n može promatrati općenito, u smislu da je n bilo koji cijeli broj, a da pri tome određene osnovne osobine sa slučaja $n \in \mathbf{N}$ budu zadržane. Naravno da je to moguće i da je nužno prvo uvesti pojam operatora Δ^{-1}, koji je ustvari pravi inverzni operator diferentnog operatora Δ i koga ćemo zvati *antidiferentnim operatorom.* Zato ćemo zahtjevati da operator Δ^{-1} bude definiran na način da vrijedi

$$\Delta[\Delta^{-1}x(t)] = \Delta^{1-1}x(t) = \Delta^0 x(t) = x(t), \tag{3.1}$$

za sve t iz domena funkcije x.

Drugim riječima, $\Delta^{-1}x$ definirao bi se kao funkcija čija je razlika prvog reda upravo funkcija x.

Definicija 3.1 *Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva* ***antidiferencijom*** *ili* ***neodređenom sumom*** *od x i označava sa $\Delta^{-1}x$ ili Σx, to jest*

$$\textit{ako} \quad \textit{je} \quad \Delta X(t) = x(t), \quad \textit{tada} \quad \textit{je} \quad \Delta^{-1}x(t) = X(t).$$

U skladu s ovim razmatranjem definirajmo sada općenito Δ^{-n} $(n \in \mathbf{N})$:

$$\Delta^{-n}x(t) = \Delta^{-1}(\Delta^{-n+1}X(t)).$$

Uočimo da je antidiferentni operator ustvari analogan neodređenom intagralu iz diferencijalnog računa. Jednostavno se vidi da neodređeni integral igra sličnu ulogu u diferencijalnom računu, jer vrijedi

$$\frac{d}{dt}(\int x(t)dt) = x(t).$$

Međutim, znamo da neodređeni integral nije jedinstven, na primjer

$$\int \cos t dt = \sin t + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Kao što se vidi iz narednog primjera, ni antidiferencija nije jedinstvena.

Primjer 3.1 *Odrediti antidiferenciju* $\Delta^{-1}a^t$.

Rješenje:

Prema Teoremu 2.2, osobina *2.*, imamo $\Delta a^t = (a-1)a^t$, tako da je $\Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t$. To znači da je $\frac{a^t}{a-1}$ antidiferencija od a^t. Međutim, neka je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija a^t i takva da je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi

$$\Delta\left(\frac{a^t}{a-1} + C(t)\right) = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t,$$

tako da je funkcija $\frac{a^t}{a-1} + C(t)$, također, antidiferencija od a^t. Dakle, ako je $f(t)$ proizvoljna antidiferencija od a^t, tada je

$$\Delta\left(f(t) - \frac{a^t}{a-1}\right) = \Delta(f(t)) - \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t - a^t = 0,$$

pa je $f(t) - \frac{a^t}{a-1} = C(t)$, odnosno $f(t) = \frac{a^t}{a-1} + C(t)$, za neku funkciju $C(t)$ za koju je $\Delta C(t) = 0$. Iz ovoga zaključujemo da smo odredili sve antidiferencije od a^t i da su one oblika

$$\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t),$$

gdje je $C(t)$ bilo koja funkcija sa istim domenom kao i funkcija a^t i za koju vrijedi $\Delta C(t) = 0$. ♣

Teorem 3.1 *Ako je* $y(t)$ *antidiferencija od* $x(t)$*, tada je svaka antidiferencija od* $x(t)$ *data sa*

$$\Delta^{-1}x(t) = y(t) + C(t), \tag{3.2}$$

gdje je $C(t)$ *funkcija istog domena kao i funkcija* x *i takva da za nju vrijedi* $\Delta C(t) = 0$.

Dokaz:

Neka je $z(t)$ proizvoljna antidiferencija od $x(t)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta[z(t) - y(t)] &= \Delta z(t) - \Delta y(t)\\ &= x(t) - x(t)\\ &= 0\\ &= \Delta C(t).\end{aligned}$$

Odavdje slijedi $z(t) - y(t) = C(t)$, to jest $z(t) = y(t) + C(t)$. ■

Primjedba 3.1 *Iz prethodnog teorema slijedi jedna vrlo važna osobina o vezi između diferentnog i antidiferentnog operatora. Naime, uz pretpostavku tog teorema imamo da je*

$$\Delta y(t) = x(t). \tag{3.3}$$

Zamjenom veze (3.3) u (3.2) dobijamo

$$\Delta^{-1}x(t) = \Delta^{-1}\Delta y(t) = y(t) + C(t).$$

Dakle, općenito vrijedi

$$\Delta^{-1}\Delta f(t) = f(t) + C(t), \tag{3.4}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija f i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$.

Prema tome, poredeći relacije (3.4) i (3.1)zaključujemo da je

$$\Delta\Delta^{-1} = I \quad i \quad \Delta^{-1}\Delta \neq I,$$

to jest ***zakon komutacije za operatore*** *Δ i Δ^{-1}* ***ne vrijedi****.*

Teorem 3.2 *Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ funkcija za koju je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi*

1. $\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t)$, $(a \neq 1)$.
2. $\Delta^{-1}\sin at = -\frac{\cos a(t-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)$, $(a \neq 2n\pi)$.
3. $\Delta^{-1}\cos at = \frac{\sin a(t-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)$, $(a \neq 2n\pi)$.
4. $\Delta^{-1}\log t = \log\Gamma(t) + C(t)$, $t > 0$.
5. $\Delta^{-1}t^{(a)} = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C(t)$, $(a \neq -1)$.
6. $\Delta^{-1}\binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + C(t)$.
7. $\Delta^{-1}\binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + C(t)$.

Primjer 3.2 *Riješiti jednadžbu*

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = \binom{t}{6} \qquad (t = 1, 2, 3, ...).$$

Rješenje:

Kako je, dakle, $\Delta^2 x(t) = \binom{t}{6}$, to imamo

$$\Delta x(t) = \binom{t}{7} + C$$

i

$$x(t) = \binom{t}{8} + Ct + D,$$

gdje su C i D proizvoljne konstante. ♣

Osobine antidiferentnog operatora (linearnost i dr.) iskazane su sljedećim teoremom.

Teorem 3.3

1. $\Delta^{-1}(x(t) + y(t)) = \Delta^{-1}x(t) + \Delta^{-1}y(t)$.
2. $\Delta^{-1}(\alpha x(t)) = \alpha\Delta^{-1}x(t)$, *ako je* α *konstanta.*
3. $\Delta^{-1}(x(t)\Delta y(t)) = x(t)y(t) - \Delta^{-1}(Ey(t)\Delta x(t))$.
4. $\Delta^{-1}(Ex(t)\Delta y(t)) = x(t)y(t) - \Delta^{-1}(y(t)\Delta x(t))$.

Definirajmo sada inverzni operator translacijskog opratora.

Definicija 3.2 *Ako je* X *funkcija za koju je* EX *upravo funkcija* x*, tada ćemo pisati* $E^{-1}x = X$*, to jest*

$$\textit{ako je} \quad EX(t) = x(t), \textit{tada je} \quad E^{-1}x(t) = X(t). \tag{3.5}$$

U praksi je operator E^{-1} manje interesantan i manje je u upotrebi od operatora Δ^{-1}, ali će ipak igrati važnu ulogu pri rješavanju nekih diferentnih jednadžbi, što ćemo vidjeti kasnije.

Očito iz (3.5) direktno slijedi

$$E^{-1}x(t) = x(t-1), \tag{3.6}$$

jer vrijedi $Ex(t-1) = x(t)$. Ako je funkcija x data i ako treba odrediti drugu funkciju X takvu da je $EX = x$, onda je taj problem u potpunosti i trivijalno riješen sa (3.6).

Uočimo da možemo općenito definirati operator E^{-n} $(n \in \mathbf{N})$. Naime, $E^{-n}x$ je funkcija za koju je $E^n(E^{-n}x) = x$. No, kako je $E^n x(t-n) = x(t)$, to će vrijediti

$$E^{-n}x(t) = x(t-n).$$

Ubuduće ćemo mi uglavnom smatrati da je domen funkcije $x = x(t)$ skup prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, tj. da ustvari imamo niz. Dakle,

$$x(t) \leftrightarrow \{x_n\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Smatrat ćemo da je

$$\sum_{k=a}^{b} x_k = 0,$$

kad god je $a > b$. Primijetimo da, za fiksno m i $n \geq m$, imamo

$$\Delta_n \left(\sum_{k=m}^{n-1} x_k \right) = x_n,$$

a za fiksno p i $p \geq n$

$$\Delta_n \left(\sum_{k=n}^{p} x_k \right) = -x_n.$$

Sada imamo

$$\Delta^{-1} x_n = \sum_{k=m}^{n-1} x_k + C \qquad (m \leq n), \tag{3.7}$$

za neku konstantu C, i alternativno

$$\Delta^{-1} x_n = \sum_{k=n}^{p} x_k + D \qquad (p \geq n), \tag{3.8}$$

za neku konstantu D. Jednakosti (3.7) i (3.8) daju nam vezu između antidiferencije (neodređene sume) i određene sume.

Primjer 3.3 *Izračunati određenu sumu*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{5} \right)^k.$$

Rješenje:
Koristeći jednakost 3.7 i Teorem 3.2, imamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{5} \right)^k = \Delta^{-1} \left(\frac{4}{5} \right)^n + C = \frac{\left(\frac{4}{5} \right)^n}{\frac{4}{5} - 1} + C = -5 \left(\frac{4}{5} \right)^n + C \qquad (n = 2, 3, ...).$$

Da odredimo konstantu C, uzmimo $n = 2$:

$$\frac{4}{5} = -5 \left(\frac{4}{5} \right)^2 + C \Rightarrow C = 4.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^k = 4 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^n \qquad (n = 2, 3, ...). \qquad \clubsuit$$

Sljedeći rezultat je poznat kao fundamentalni teorem za izračunavanje određenih suma, koji je analogan fundamentalnom teoremu diferencijalnog računa.

Teorem 3.4 *Ako je y_n antidiferencija (neodređena suma) niza x_n i $n \geq m+1$, tada vrijedi*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k = [y_k]_m^n = y_n - y_m.$$

Primjer 3.4 *Izračunati*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Rješenje:
Kao prvo, k^2 treba izračunati pomoću stepena padajućih faktoriela:

$$k^2 = k(k-1) + k = k^{(2)} + k^{(1)}.$$

Zbog linearnosti antidiferentnog operatera, imamo

$$\Delta^{-1}k^2 = \Delta^{-1}k^{(2)} + \Delta^{-1}k^{(1)} = \frac{k^{(2)}}{2} + \frac{k^{(3)}}{3} + C.$$

Prema Teoremu 3.4, vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \left[\frac{k^{(2)}}{2} + \frac{k^{(3)}}{3}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \frac{(n+1)^{(3)}}{3} - \frac{1^{(2)}}{2} - \frac{1^{(3)}}{3} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Sljedeći teorem daje nam jednu verziju metoda parcijalnog sumiranja za određene sume.

Teorem 3.5 *Ako je $m < n$, tada je*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k \Delta y_k = [x_k y_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta x_k) y_{k+1}. \tag{3.9}$$

Dokaz:
Uzmimo $x(n) = x_n$ i $y(n) = y_n$ u Teoremu 3.3 :

$$\Delta^{-1}(x_n \Delta y_n) = x_n y_n - \Delta^{-1}(\Delta x_n) y_{n+1}.$$

Zbog jednakosti (3.7) imamo

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k \Delta y_k = x_n y_n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta x_k) y_{k+1} + C.$$

Uzmemo li $n = m + 1$, posljednja jednakost postaje

$$x_m \Delta y_m = x_{m+1} y_{m+1} - (\Delta x_m) y_{m+1} + C. \tag{3.10}$$

No, s druge strane vrijedi

$$x_m \Delta y_m = \Delta(x_m y_m) - (\Delta x_m) y_{m+1}. \tag{3.11}$$

Iz jednakosti (3.10) i (3.11) slijedi $C = -x_m y_m$, čime je dokaz završen. ■

Primjedba 3.2 *Jedan ekvivalentni oblik Teorema 3.5 je Abelova sumaciona formula*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k y_k = x_n \sum_{k=m}^{n-1} y_k - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\Delta x_k \sum_{i=m}^{k} y_i \right). \tag{3.12}$$

Naime, zapišimo formulu (3.9) u obliku

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_m b_m - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1} \tag{3.13}$$

i izvršimo zamjene: $a_k = x_k$, $\Delta b_k = y_k$. Zbog toga će biti

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_k = \sum_{k=m}^{n-1} \Delta b_k = b_n - b_m,$$

odnosno

$$b_n = b_m + \sum_{k=m}^{n-1} y_k. \tag{3.14}$$

Jednakost (3.13) sada postaje (zbog (3.14))

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n-1} x_k y_k &= x_n \left(b_m + \sum_{k=m}^{n-1} y_k \right) - x_m b_m - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta x_k) \left(b_m + \sum_{i=m}^{k} y_i \right) \\
&= x_n \sum_{k=m}^{n-1} y_k + x_n b_m - x_m b_m - (x_n - x_m) b_m - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\Delta x_k \sum_{i=m}^{k} y_i \right) \\
&= x_n \sum_{k=m}^{n-1} y_k - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\Delta x_k \sum_{i=m}^{k} y_i \right)
\end{aligned}$$

Postoji jedan specijalni metod sumiranja koji je baziran na jednakosti (2.6) za n-tu diferenciju funkcije:

$$\begin{aligned}\Delta^n x(0) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x(n-k)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}x(i).\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x(i) = (-1)^n\Delta^n x(0).$$

Primjer 3.5 *Izračunati* $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i+a}{m}$.

Rješenje:
Neka je $x(i) = \binom{i+a}{m}$, imamo $\Delta^n\binom{i+a}{m} = \binom{i+a}{m-n}$, tako da sada slijedi

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i+a}{m} = (-1)^n\binom{a}{m-n}. \qquad \clubsuit$$

4. Izračunavanje konačnih suma

Ilustrirajmo prvo primjenu Teorema 3.5 na izračunavanje konačnih suma.

Primjer 4.1 *Izračunati* $\sum_{k=1}^{n-1} ka^k$ $(a \neq 1)$.

Rješenje:

Prema Teoremu 3.5, uzimajući $x_k = k$, $\Delta y_k = a^k$ (odnosno $y_k = \Delta^{-1} a^k = \dfrac{a^k}{a-1}$), imamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka^k = \left[k\frac{a^k}{a-1}\right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{k+1}}{a-1}.$$

Na osnovu Teorema 3.4 i 3.2, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k = \left[\frac{a^k}{a-1}\right]_1^n = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a}{a-1} = \frac{a^n - a}{a-1}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} ka^k &= \frac{na^n - a}{a-1} - \frac{a}{a-1} \cdot \frac{a^n - a}{a-1} \\ &= \frac{(a-1)na^n - a^{n+1} + a}{(a-1)^2}. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Neke algebarske transformacije koje ne uključuju stepene s necijelim racionalnim eksponentima mogu biti primjenjene na operatore E i Δ. Na primjer, promatrajmo

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z-1}.$$

Neka je sada $z - 1 = t$. Tada je

$$\frac{z^n - 1}{z-1} = \frac{(t+1)^n - 1}{t} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}.$$

Dakle, postoji algebarska ekvivalencija polazne jednakosti

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}, \tag{4.1}$$

pri čemu je $t = z - 1$.

Uzmemo li sada da je

$$z \equiv E,$$

imaćemo

$$t \equiv \Delta,$$

pa se jednakost (4.1) može pisati u obliku

$$1 + E + E^2 + \ldots + E^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{k-1}.$$

Pustimo sada da obje strane posljednje jednakosti djeluju na x_1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{k-1} x_1. \tag{4.2}$$

Uočimo sljedeće: ako su diferencije od x_1 u gornjoj jednakosti, počev od određenog reda, jednake nuli, tada se konačna suma $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ od n članova može prikazati u zatvorenoj formi čiji broj članova ne ovisi o n.

Primjer 4.2 *Izvršiti sumiranje* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

Rješenje:

Ovdje je $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 27$, $x_4 = 64$,$\Delta x_1 = 7$, $\Delta x_2 = 19$, $\Delta x_3 = 37$, $\Delta^2 x_1 = 12$, $\Delta^2 x_2 = 18$, $\Delta^3 x_1 = 6$ i $\Delta^4 x_1 = 0$, itd. Primjenom formule (4.1), na ovaj slučaj, dobićemo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{4} \binom{n}{k} \Delta^{k-1} x_1 \\
&= n + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot 6 \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Izračunajmo sada *Primjer* 3.4 na sljedeći način.

Primjer 4.3 *Izračunati*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Rješenje:
Ovdje je $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, $\Delta x_1 = 3$, $\Delta x_2 = 5$, $\Delta^2 x_1 = 2$ i $\Delta^3 x_1 = 0$ itd. Primjenom formule (4.1), na ovaj slučaj, dobićemo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{3} \binom{n}{k} \Delta^{k-1} x_1 \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Promatrajmo sljedeću konačnu sumu

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k),$$

gdje je $f(k)$ data funkcija od k. Pokazaćemo kako se izračunavanje ove sume može jednostavno svesti na rješavanje odgovarajuće linearne diferentne jednadžbe prvog reda. Naime, vrijedi

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k) + f(n+1) = S_n + f(n+1),$$

odnosno,

$$S_{n+1} - S_n = f(n+1),$$

što i jeste jedna nehomogena linearna diferentna jednadžba prvog reda koja zadovoljava početni uvjet

$$S_0 = f(0).$$

Rješenje diferentne jednadžbe, koje zadovoljava početni uvjet, daje zbir naše promatrane konačne sume.

Izračunajmo sada prethodni primjer koristeći ove pretpostavke.

Primjer 4.4 *Odrediti konačnu sumu* $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Rješenje:

Data suma zadovoljava jednadžbu

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2,$$

odnosno

$$\Delta S_n = (n+1)^2.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} S_n &= \Delta^{-1}(n^2+2n+1) = \Delta^{-1}(n(n-1)+3n+1) \\ &= \Delta^{-1}(n^{(2)}+3n^{(1)}+1) \\ &= \frac{n^{(3)}}{3} + 3\frac{n^{(2)}}{2} + n + C = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + 3\frac{n(n-1)}{2} + n + C \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + C. \end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $S_0 = 0$, imamo da je $C = 0$, pa se kao rezultat dobije

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \clubsuit$$

Uvedimo sada pojam *Bernoullijevih polinoma* i *Bernoullijevih brojeva* na sljedeći način.

Definicija 4.1 ***Bernoullijevi polinomi*** *$B_n(t)$ su definirani jednakošću*

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(t)}{k!} x^k,$$

drugim riječima, $\frac{xe^{tx}}{e^x-1}$ je eksponencijalna generirajuća funkcija za niz $B_n(t)$.

Definicija 4.2 ***Bernoullijevi brojevi*** *B_n su vrijednosti Bernoullijevih polinoma $B_n(t)$ u $t = 0$, to jest $B_n = B_n(0)$.*

Prvih nekoliko Bernoullijevih polinoma su

$$B_0(t) = 1, \qquad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \qquad B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \ldots \quad .$$

S druge strane, prva četiri Bernoullijeva broja su

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0.$$

Posljedica 4.1 *Ako je $n = 0, 1, 2, \ldots,$ tada je*

$$\Delta^{-1}t^n = \frac{1}{n+1}B_{n+1}(t) + C(t),$$

gdje je $\Delta C(t) = 0$.

Iz ove posljedice slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k = \Big[\Delta^{-1}t^k\Big]_1^n = \Big[\frac{1}{k+1}B_{k+1}(t)\Big]_1^n = \frac{1}{k+1}\Big[B_{k+1}(n) - B_{k+1}\Big].$$

Primjenimo ovo za izradu zadataka.

Primjer 4.5 *Izračunati konačnu sumu $\sum_{k=1}^{n} k^2$.*

Rješenje:
Imamo

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \Big[\Delta^{-1}t^2\Big]_1^{n+1} = \Big[\frac{1}{2+1}B_{2+1}(t)\Big]_1^{n+1} = \frac{1}{3}\Big[B_3(n+1) - B_3\Big] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Primjer 4.6 *Izračunati*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1).$$

Rješenje:
Ovdje je $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $\Delta x_1 = 2$ i $\Delta^2 x_1 = 0$ itd. Primjenom formule (4.1), na ovaj slučaj, dobićemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{2}\binom{n}{k}\Delta^{k-1}x_1 \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2 \\ &= n^2. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 4.7 *Izračunati*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2.$$

Rješenje:

Ovdje je $x_1 = 1$, $x_2 = 9$,$x_3 = 25$, $\Delta x_1 = 8$,$\Delta x_2 = 16$, $\Delta^2 x_1 = 8$ i $\Delta^3 x_1 = 0$ itd. Primjenom formule (4.1), na ovaj slučaj, dobićemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{3}\binom{n}{k}\Delta^{k-1}x_1\\ &= n + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 8 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 8\\ &= \frac{n(4n^2+1)}{3}. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 4.8 *Izračunati*

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2 = 2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2.$$

Rješenje:

Ovdje je $x_1 = 4$, $x_2 = 25$,$x_3 = 64$, $\Delta x_1 = 21$,$\Delta x_2 = 39$, $\Delta^2 x_1 = 18$ i $\Delta^3 x_1 = 0$ itd. Primjenom formule (4.1), na ovaj slučaj, dobićemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{3}\binom{n}{k}\Delta^{k-1}x_1\\ &= 4n + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 21 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 18\\ &= \frac{n(6n^2+3n-1)}{2}. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 4.9 *Izračunati sumu*

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)$$

Rješenje:

Prvo trebamo $k(k+1)$ izračunati preko stepena padajućih faktoriela:

$$k(k+1) = k^2 + k = k^{(2)} + 2k^{(1)}$$

Zbog linearnosti antidiferentnog operatora imamo

$$\Delta^{-1}k(k+1) = \Delta^{-1}k^{(2)} + \Delta^{-1}2k^{(1)} = \frac{k^{(3)}}{3} + k^{(2)} + C.$$

Sada vrijedi da je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \left[\frac{k^{(3)}}{3} + k^{(2)}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + (n+1)^{(2)} - \frac{1^{(3)}}{3} - 1^{(2)} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + (n+1)n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 4.10 *Izračunati sumu*

$$\sum_{k=1}^{n} 2k(2k+2) = 2\cdot 4 + 4\cdot 6 + 6\cdot 8 + \ldots + 2n(2n+2)$$

Rješenje:
Prvo trebamo $2k(2k+2)$ izračunati preko stepena padajućih faktoriela:

$$2k(2k+2) = 4k^2 + 4k = 4k^{(2)} + 8k^{(1)}$$

Zbog linearnosti antidiferentnog operatora imamo

$$\Delta^{-1}2k(2k+2) = \Delta^{-1}4k^{(2)} + \Delta^{-1}8k^{(1)} = \frac{4k^{(3)}}{3} + 4k^{(2)} + C.$$

Sada vrijedi da je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2k(2k+2) &= \left[\frac{4k^{(3)}}{3} + 4k^{(2)}\right]_1^{n+1} = \frac{4(n+1)^{(3)}}{3} + 4(n+1)^{(2)} - \frac{4\cdot 1^{(3)}}{3} - 4\cdot 1^{(2)} \\ &= \frac{4(n+1)n(n-1)}{3} + 4(n+1)n = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Primjer 4.11 *Izračunati sumu*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(2k+1) = 1\cdot 3 + 3\cdot 5 + 5\cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1)$$

Rješenje:
Prvo trebamo $(2k-1)(2k+1)$ izračunati preko stepena padajućih faktoriela:

$$(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1 = 4k^{(2)} + 4k^{(1)} - k^{(0)}.$$

Zbog linearnosti antidiferentnog operatora imamo

$$\Delta^{-1}(2k-1)(2k+1) = \Delta^{-1}4k^{(2)} + \Delta^{-1}4k^{(1)} - \Delta^{-1}k^{(0)} = \frac{4k^{(3)}}{3} + 2k^{(2)} - k^{(1)} + C.$$

Sada vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1) &= \left[\frac{4k^{(3)}}{3}+2k^{(2)}-k^{(1)}\right]_1^{n+1} \\
&= \frac{4(n+1)^{(3)}}{3}+2(n+1)^{(2)}-(n+1)^{(1)}-\frac{4\cdot 1^{(3)}}{3}-2\cdot 1^{(2)}+1^{(1)} \\
&= \frac{4(n+1)n(n-1)}{3}+2(n+1)n-(n+1)=\frac{(n+1)(4n^2+2n-3)}{3}. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer 4.12 *Izračunati sumu*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+4) = 1\cdot 2\cdot 5+2\cdot 3\cdot 6+3\cdot 4\cdot 7+\ldots+n(n+1)(n+4)$$

Rješenje:
Prvo trebamo $k(k+1)(k+4)$ izračunati preko stepena padajućih faktoriela:

$$k(k+1)(k+4)=k^3+5k^2+4k=k^{(3)}+5k^{(2)}+10k^{(1)}.$$

Zbog linearnosti antidiferentnog operatora imamo

$$\Delta^{-1}k(k+1)(k+4)=\Delta^{-1}k^{(3)}+\Delta^{-1}5k^{(2)}+\Delta^{-1}10k^{(1)}=\frac{k^{(4)}}{4}+\frac{8k^{(3)}}{3}+5k^{(2)}+C.$$

Sada vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+4) &= \left[\frac{k^{(4)}}{4}+\frac{8k^{(3)}}{3}+5k^{(2)}\right]_1^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{(4)}}{4}+\frac{8(n+1)^{(3)}}{3}+5(n+1)^{(2)}-\frac{1^{(4)}}{4}-\frac{8\cdot 1^{(3)}}{3}-5\cdot 1^{(2)} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}+\frac{8(n+1)n(n-1)}{3}+5(n+1)n \\
&= \frac{(n+1)n(n+2)(3n+17)}{12}. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

5. Monmortov teorem i beskonačno sumiranje

Sljedeći teorem omogućava korištenje metoda operatora za izračunavanje sume redova.

Teorem 5.1 *Pretpostavimo da je apsolutno konvergentan red*

$$S(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots, \tag{5.1}$$

gdje su a_n date funkcije po n. Tada $S(t)$ može biti predstavljen u obliku

$$S(t) = \frac{a_0}{1-t} + \frac{t\Delta a_0}{(1-t)^2} + \frac{t^2\Delta^2 a_0}{(1-t)^3} + \ldots \quad . \tag{5.2}$$

Ovaj je rezultat poznat kao *Monmortov teorem o beskonačnom sumiranju.* Primijetimo sljedeće: ako je a_n polinom po n stepena k, tada bi $\Delta^m a_0$ bilo nula za sve $m > k$ i u redu bi se pojavilo samo konačno mnogo članova.

Dokaz:

Koristeći se vezama između operatora E i Δ imamo

$$\begin{aligned}
S(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \\
&= (1 + tE + t^2E^2 + \ldots + t^nE^n + \ldots)a_0 \\
&= (1 + tE)^{-1}a_0 = [a - t(I + \Delta)]a_0 \\
&= \frac{1}{1-t}\left(1 - \frac{t}{1-t}\Delta\right)^{-1} a_0 \\
&= \frac{1}{1-t}\left(1 - \frac{t\Delta}{1-t} + \frac{t^2\Delta^2}{(1-t)^2} + \ldots\right)a_0 \\
&= \frac{a_0}{1-t} + \frac{t\Delta a_0}{(1-t)^2} + \frac{t^2\Delta^2 a_0}{(1-t)^3} + \ldots .
\end{aligned}$$

■

Primjer 5.1 *Odrediti sumu reda*

$$S(t) = t + 2t^2 + 3t^3 + \ldots + nt^n + \ldots \quad .$$

Rješenje:

Uočimo da je $a_n = n$ $(n \geq 1)$, pa je $\Delta a_n = 1$ i $\Delta^m a_n = 0$ za $(m \geq 2)$. Osim toga, $a_0 = 0$, $\Delta a_0 = a_1 - a_0 = 1$ i $\Delta^m a_n = 0$ za $(m \geq 2)$. Prema (5.2), imamo

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{0}{1-t} + \frac{t \cdot 1}{(1-t)^2} + \frac{0}{(1-t)^3} + \ldots + 0 + \ldots \\ &= \frac{t}{(1-t)^2}. \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Uvedimo sada jednu drugačiju tehniku za izračunavanje sume reda oblika

$$S(t) = a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n t^n}{n!} + \ldots \tag{5.3}$$

gdje su a_n date funkcije po n, pretpostavljajući da je taj red apsolutno konvergentan u nekom području vrijednosti od t. Koristeći translacijski operator, imamo

$$a_n = E^n a_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pa se jednakost (5.3) može napisati kao

$$\begin{aligned} S(t) &= \left(I + \frac{tE}{1!} + \frac{t^2E^2}{2!} + \ldots + \frac{t^nE^n}{n!} + \ldots \right) a_0 \\ &= e^{tE} a_0 = e^{t(I+\Delta)} a_0 = e^t e^{t\Delta} a_0 \qquad (5.4) \\ &= e^t \left(a_0 + \frac{t\Delta a_0}{1!} + \frac{t^2 \Delta^2 a_0}{2!} + \ldots \right). \end{aligned}$$

Ako je a_n polinom po n stepena k, tada je $\Delta^m a_n = 0$ za sve $m > n$ i desna strana jednakosti (5.4) ima samo konačno mnogo članova.

Primjer 5.2 *Odrediti sumu reda*

$$S(t) = \frac{3t}{1!} + \frac{8t^2}{2!} + \frac{15t^3}{3!} + \ldots \quad .$$

Rješenje:

Ovdje je $a_n = n(n+2) = n^2 + 2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, odnosno $\Delta a_n = 2n + 3$, $\Delta^2 a_n = 2$ i $\Delta^m a_n = 0$ za $m > 2$. Osim toga, $a_0 = 0$, $\Delta a_0 = 3$, $\Delta^2 a_0 = 2$ i $\Delta^m a_n = 0$ za $m > 2$. Zamjenom ovih rezultata u jednakost (5.4), dobija se

$$\begin{aligned} S(t) &= e^t \left(0 + \frac{t \cdot 3}{1!} + \frac{t^2 \cdot 2}{2!} + 0 + \ldots + 0 + \ldots \right) \\ &= te^t(t+3). \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Teorem 5.2 *Za $\lambda \neq 1$ i polinom $P_k(n)$ stepena k vrijedi*

$$\Delta^{-1}[\lambda^n P_k(n)] = \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}\left(1 - \frac{\lambda\Delta}{\lambda - 1} + \frac{\lambda^2\Delta^2}{(\lambda-1)^2} - \frac{\lambda^3\Delta^3}{(\lambda-1)^3} + \dots\right)P_k(n),$$

s tačnošću do na konstantu.

Dokaz:
Neka je $F(n)$ neka funkcija po n. Tada je

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^n F(n) &= \lambda^{n+1}F(n+1) - \lambda^n F(n) \\ &= \lambda^{n+1}EF(n) - \lambda^n F(n) \\ &= \lambda^n(\lambda E - I)F(n). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Uzmimo sada da je $(\lambda E - I)F(n) = P_k(n)$, odakle slijedi

$$F(n) = (\lambda E - I)^{-1}P_k(n).$$

Zbog toga iz (5.5) imamo

$$\Delta\lambda^n F(n) = \lambda^n P_k(n),$$

odakle je

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[\lambda^n P_k(n)] &= \lambda^n F(n) = \lambda^n(\lambda E - I)^{-1}P_k(n) \\ &= \lambda^n \frac{1}{\lambda(I+\Delta) - 1}P_k(n) \\ &= \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}\cdot\frac{1}{1 + \frac{\lambda\Delta}{\lambda-1}}P_k(n) \\ &= \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}\cdot\left(1 - \frac{\lambda\Delta}{\lambda - 1} + \frac{\lambda^2\Delta^2}{(\lambda-1)^2} - \frac{\lambda^3\Delta^3}{(\lambda-1)^3} + \dots\right)P_k(n). \end{aligned}$$

■

5.1. Primjena operatora na složene redove i na probleme obrnute sumiranju redova

Neka je

$$f(t) = f_0 + \frac{f_1 t}{1!} + \frac{f_2 t^2}{2!} + \dots$$

i

$$g(t) = g_0 + \frac{g_1 t}{1!} + \frac{g_2 t^2}{2!} + \dots$$

Promatrajmo red

$$S = f_0 g_0 + \frac{f_1 g_1 t}{1!} + \frac{f_2 g_2 t^2}{2!} + \dots$$

za koji ćemo pretpostaviti da je apsolutno konvergentan. Koristeći osobine operatora E i Δ, imamo

$$\begin{aligned} S &= \left(g_0 + \frac{g_1 t E}{1!} + \frac{g_2 t^2 E^2}{2!} + \dots \right) f_0 \\ &= g(tE) f_0 \\ &= g(t + t\Delta) f_0 \\ &= g(t) f_0 + \frac{t}{1!} g'(t) \Delta f_0 + \frac{t^2}{2!} g''(t) \Delta^2 f_0 + \dots , \end{aligned}$$

ili alternativno

$$= f(t) g_0 + \frac{t}{1!} f'(t) \Delta g_0 + \frac{t^2}{2!} f''(t) \Delta^2 g_0 + \dots \quad .$$

Primjer 5.3 *Odrediti sumu reda*

$$S = \frac{3t}{1!} - \frac{7t^3}{3!} + \frac{11t^5}{5!} - \dots \quad .$$

Rješenje:

Neka je

$$g(t) = \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \quad .$$

Dakle, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_3 = -1$, $g_4 = 0$, $g_5 = 1$. Sada je, iz S,

$$f_0 g_0 = 0, f_1 g_1 = 3, f_2 g_2 = 0, f_3 g_3 = -7, f_4 g_4 = 0, f_5 g_5 = 11.$$

Odavdje je $f_1 = 3$, $f_3 = 7$, $f_5 = 11$, $f_7 = 15$,... gdje su f_0, f_2, f_4, f_6 proizvoljno uzeti. U skladu s tim možemo uzeti

$$f_0 = 1, f_1 = 3, f_2 = 5, f_3 = 7, f_4 = 9, f_5 = 11, \dots ,$$

pri čemu je $\Delta f_0 = 2, \Delta^2 f_0 = 0 = \Delta^3 f_0 = \Delta^5 f_0 = \dots$.

Konačno,

$$\begin{aligned} S &= \frac{3t}{1!} - \frac{7t^3}{3!} + \frac{11t^5}{5!} - \dots \\ &= g(t) f_0 + \frac{t}{1!} g'(t) \Delta f_0 \\ &= \sin t + \frac{t}{1!} \cos t \cdot 2 \\ &= \sin t + 2t \cos t. \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Promatrajmo sada u neku ruku obrnuti problem. Naime, pretpostavimo da nam je dat red

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) + \lambda v(t+1) + \lambda^2 v(t+2) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v(t+k), \end{aligned}$$

koji konvergira i čija nam je suma poznata. Treba odrediti funkciju $v(t)$. Naravno, ovo je moguće kada je $|\lambda| < \frac{m}{M}$, gdje je uvijek funkcija v ograničena, to jest vrijedi $m < v(t) < M$.

Zbog toga vrijedi

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^k E^k) v(t) = \frac{1}{1 - \lambda E} v(t).$$

Odavdje je traženo rješenje

$$v(t) = (1 - \lambda E) u(t) = u(t) - \lambda u(t+1)$$

koje se jednostavno provjerava direktnom zamjenom u polazni red.

Slično, ako promatramo red

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) + \frac{\lambda}{1!} v(t+1) + \frac{\lambda^2}{2!} v(t+2) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{\lambda E}{1!} + \frac{\lambda^2 E^2}{2!} + \dots\right) v(t) \\ &= e^{\lambda E} v(t), \end{aligned}$$

imaćemo

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\lambda E} u(t) \\ &= \left(1 - \frac{\lambda E}{1!} + \frac{\lambda^2 E^2}{2!} - \dots\right) u(t) \\ &= u(t) - \frac{\lambda}{1!} u(t+1) + \frac{\lambda^2}{2!} u(t+2) - \dots . \end{aligned}$$

Odavdje se vidi da imamo sljedeće dvije recipročne transformacije

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} v(t+k)$$

i

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} u(t+k).$$

Primjer 5.4 *Neka je* $u(t) = \frac{1}{t}$, $\lambda = 1$ *za* $t > 0$. *Ako je*

$$\frac{1}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} v(t+k),$$

tada imamo

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(t+k)k!} \\ &= \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)1!} + \frac{1}{(t+2)2!} - \frac{1}{(t+3)3!} + \ldots \\ &= \int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx. \end{aligned}$$

Izvršimo provjeru:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} v(t+k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-x} x^{t+k-1} (k!)^{-1} dx \\ &= \int_0^1 \left(e^{-x} x^{t-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} x^{t-1} e^{x} dx \\ &= \int_0^1 x^{t-1} dx = \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

ako svi redovi apsolutno konvergiraju. ♣

Primjer 5.5 *Ako je* $u(t)$ *polinom stepena* r *po* t, *onda se može naći konačni izraz za* $v(t)$ *da bude zadovoljen uvjet*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} v(t+k).$$

Kako je

$$u(t) = e^{\lambda E} v(t),$$

odnosno

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\lambda E} u(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \Delta} u(t) \\ &= e^{-\lambda} \left[1 - \frac{\lambda \Delta}{1!} + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{2!} - \dots \right] u(t) \\ &= e^{-\lambda} \left[u(t) - \frac{\lambda \Delta u(t)}{1!} + \frac{\lambda^2 \Delta^2 u(t)}{2!} - \dots \right], \end{aligned}$$

gdje je red na desnoj strani konačan, to je $v(t)$ također polinom stepena r po t. ♣

6. Zaključak

Što se tiče diferentnih jednadžbi kao posebne oblasti matematike, treba istaknuti da se ona intenzivnije počela proučavati u posljednjih trideset godina. Kako na našem prostoru nema velikog izbora literature u kojoj su detaljnije objašnjene diferentne jednadžbe to je i jedan od razloga što sam odabrao analizu, odnosno njen dio, diferentne jednadžbe. Kako je oblast diferentnih jednadžbi dosta velika i kao takva zahtijeva dosta vremena za proučavanje, fokusirao sam se na jedan njen dio, odnosno na diferentni račun ili preciznije na izračunavanje konačnih suma i suma beskonačnih redova pomoću diferentnog računa.

U rješavanju i analizi diferentnih jednadžbi vrlo značajno mjesto zauzima *diferentni račun*. Vidjeli smo da diferentni račun predstavlja diskretni analogon diferencijalnog i integralnog računa. U diferentnom računu bitna su dva operatora, koja smo definirali i za koje smo naveli neke osnovne osobine. Riječ je o *diferentnom* i *translacijskom* operatoru. Uočili smo da se diferentni operator, pored ostalog, može primjenjivati na funkcije dvije ili više promjenljivih, uz naznaku u indeksu operatora koja će varijabla biti translatirana za jednu jedinicu. Nije bilo teško pokazati da operatori Δ i E međusobno komutiraju i da su oba operatora ustvari linearni operatori. Mogli smo se uvjeriti u određenu sličnost diferentnog računa kako sa diferencijalnim tako još više sa integralnim računom i to upravo preko operatora. Pored ostalog smo uveli i *stepen padajućeg faktorijela* kao zamjenu za neku verziju uloge stepene funkcije za konačne razlike i pokazali primjenu diferentnog operatora na stepen padajućeg faktorijela. Pokazalo se da stepen padajućeg faktorijela ima jako lijepe osobine pri djelovanju diferentnog operatora. Nakon što smo uveli pojam diferentnog operatora slijed je bio logičan, da se pokuša uvesti i *antidiferentni operator* u oznaci Δ^{-1}. Samim tim uvođenjem došli smo u poziciju da sada umjesto pronalaska pokojeg rješenja date diferentne jednadžbe, možemo u nekim slučajevima u potpunosti riješiti takvu jednadžbu, to jest naći njeno opće rješenje. Došlo se do zaključka da neke algebarske transformacije, koje ne uključuju stepene s necjelim racionalnim eksponentima, mogu biti primjenjene na operatore E i Δ. Još jedna značajna primjena jeste i Monmortov teorem koji je omogućio korištenje metoda operatora za izračunavanje sume redova. Kako se sada mogla izračunati suma reda ako nam je dat red, pomoću funkcije $v(t)$ koja je jasno određena, bilo je logično da se pokuša i obrat, odnosno, da se na osnovu datog reda i sume odredi funkcija $v(t)$

i to se pokazalo kao jako efikasno. Tako se pokazalo da je izračunavanje konačnih suma i suma beskonačnih redova moguće na jedan potpuno nov i moglo bi se sa sigurnošću reći zanimljiviji i jednostavniji način, a to je upravo preko diferentnog računa.

Literatura

[1] M. Nurkanović: *DIFERENTNE JEDNADŽBE - Teorija i primjene*, (univerzititski udžbenik), Denfas, Tuzla, 2008.

[2] S. Elaydi: *Discrete Chaos*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2000.

[3] V.Lakshmikantham, D. Triggiante: *Theory of Diference Equations*, Academic Press, Boston et al., 1988.