UNIVERZITET U BIHAĆU
PEDAGOŠKI FAKULTET
MATEMATIKA I FIZIKA

Diferentne jednadžbe prvog reda

Diplomski rad

Hasnija Muminović
Mentor: Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Bihać, maj 2008.

Sadržaj

1. Uvod

Teorija diferentnih jednadžbi je u ovom trenutku na početku svog razvitka, tako da je jako malo klasa diferentnih jednadžbi, čak i prvog reda, koje se mogu efikasno riješiti. Zašto se jednadžba $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, ...$, naziva baš diferentnom jednadžbom? Otkuda je dobila taj naziv? Naime, diferentne jednadžbe su intenzivno proučavane kao direktni analgoni diferencijalnih jednadžbi $x' = g(x)$ $x(t_0) = x_0$. Ukoliko izvod $x'(t)$ aproksimiramo količnikom $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$, za dovoljno malo h, i stavimo $t_n = t_0 + nh$, $x(t_n) = x_n$, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, dobijamo $\Delta x_n = hg(x_n)$. Dakle, aproksimacijom izvoda diferencijalnih jednadžbi, a što je moguće učiniti na više načina, dolazimo do novih oblika jednadžbi koje zapravo nazivamo diferentnim jednadžbama. Rješenje jednadžbe $x_{n+1} = f(x_n)$ je svaki niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava ovu jednadžbu za sve $n = 0, 1, ...$ Za neke klase diferentnih jednadžbi, prije svega za neke linearne, moguće je doći do općeg rješenja. Međutim, u općenitom slučaju to je vrlo teško postići. Zbog toga ćemo se u daljem tekstu posvetiti problemu rješavanja linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda, te njihovoj primjeni u praksi. Također, biće riječi o dinamici diferentne jednadžbe prvog reda, koja može biti i vrlo komplicirana. Tako je, za razliku od diferencijalnih jednadžbi, moguće haotično ponašanje rješenja čak i u slučaju diferentnih jednadžbi prvog reda (npr. slučaj Riccatijeve ili logističke diferentne jednadžbe). Kod diferencijalnih jednadžbi to je moguće tek u slučaju kad su one trećeg reda.

U poglavlju o linearnim jednadžbama prvog reda definisaćemo linearne diferentne jednadžbe prvog reda i pojasniti rješavanje homogenih i nehomogenih diferentnih jednadžbi prvog reda. Kako smo već napomenuli da je za mnoge klase diferentnih jednadžbi prvog reda nemoguće doći do općeg rješenja, umjesto rješavanja same jednadžbe, pažnju ćemo posvetiti ispitivanju ponašanja njenog rješenja u ovisnosti o početnom uvjetu x_0. Iz tog razloga ćemo uvesti pojmove tačke ekvilibrijuma i periodičnosti, te pojam stabilnosti tačke ekvilibrijuma u poglavlju dinamika diferentne jednadžbe prvog reda. Diferentne jednadžbe prvog reda su našle i svoju primjenu kako u medicini tako i u matematici na primjer za izračunavanje konačnih suma, za rješavanje geometrijskih problema kombinatornog tipa i numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Pored medicine i matematike primjenjuju se i u ekonomiji, pa tako pomoću diferentnih jednadžbi prvog reda možemo izračunati kamatu, odrediti rast nacionalnog dohotka i slično.

2. Linearne jednadžbe prvog reda

Definicija 2.1 *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

gdje su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ poznati nizovi realnih brojeva, naziva se ***linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda****. U slučaju kada je $b_n = 0$ $(n = 0, 1, ...,)$ naša jednadžba se naziva* ***homogenom****, dok se inače, tj. kada je $b_n \neq 0$ za bar jedno $n \in \{0, 1, 2, ...,\}$, naziva* ***nehomogenom****.*

Uočimo da se u jednažbi (2.1) može općenito smatrati da indeks n polazi od nekog fiksnog prirodnog broja $n_0 \geq 1$. Međutim, smjenom $z_{n-n_0} = x_n$, taj slučaj svodimo na slučaj jednadžbe (2.1). Obično se jednadžbi (2.1) dodaje tzv. uvjet početnih vrijednosti

$$x_0 = \alpha. \tag{2.2}$$

Moguće su izvjesne modifikacije jednadžbe (2.2) u ovisnosti o tome da li su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konstantni ili ne:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.3}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.4}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.5}$$

pri čemu su $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbf{R}$ poznate konstante.

2.1. Rješavanje homogene jednadžbe

Razmotrimo prvo slučaj homogene linearne jednadžbe prvog reda:

$$x_{n+1} = a_n x_n, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.6}$$

Rješenje ove jednadžbe se može jednostavno dobiti iteriranjem:

$$\begin{aligned} x_n = a_{n-1}x_{n-1} &= a_{n-1}(a_{n-2}x_{n-2}) = a_{n-1}a_{n-2}(a_{n-3}x_{n-3}) = ... = \\ &= a_{n-1}a_{n-2}...a_0x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)x_0. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (2.6) je dato sa

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)C, \tag{2.7}$$

gdje je C proizvoljna konstanta, dok odgovarajuće rješenje PPV ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha. \tag{2.8}$$

Primjer 2.1 *Jednadžba*

$$x_{n+1} = 3x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

ima opće rješenje

$$x_n = C \cdot 3^n,$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Odgovarajuće rješenje PPV je

$$x_n = \alpha \cdot 3^n$$

Primjećujemo da je svako rješenje neograničeno. ♣

Primjer 2.2 *Jednadžba*

$$x_{n+1} - \frac{3n+1}{3n+7}x_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

ima opće rješenje (prema (2.7))

$$x_n = C\prod_{i=0}^{n-1}\frac{3i+1}{3i+7} = \frac{4C}{(3n+1)(3n+4)},$$

(C - proizvoljna konstanta), iz čega se da zaključiti da $x_n \to 0$ ($n \to \infty$). ♣

2.2. Nehomogena linearna jednadžba

Razmatrajmo sada slučaj nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda u najopćenitijem obliku (2.1). Jednostavno rješenje ove jednadžbe može se naći također jednostavnim iteriranjem i primjenom matematičke indukcije.
Naime,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0x_0 + b_0, \\ x_2 &= a_1x_1 + b_1 = a_1(a_0x_0 + b_0) + b_1 = a_1a_0x_0 + a_1b_0 + b_1, \\ x_3 &= a_2x_2 + b_2 = a_2(a_1a_0x_0 + a_1b_0 + b_1) + b_2 \\ &= a_2a_1a_0x_0 + a_2a_1b_0 + a_2b_1 + b_2, \end{aligned}$$

iz čega se može zaključiti da za sve $n \in \mathbf{Z}^+$ vrijedi:

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right)b_r. \tag{2.9}$$

Pri tome smo, po definiciji, uzimali da je

$$\prod_{i=0}^{-1} = 1 \qquad \text{i} \qquad \prod_{i=n}^{n-1} a_i = 1. \tag{2.10}$$

Formulu (2.9) dokažimo principom potpune matematičke indukcije. U tu svrhu pretpostavimo da je ona tačka za neki prirodni broj $n = k > 1$. Tada iz (2.1), za $n = k$, to jest

$$x_{k+1} = a_kx_k + b_k,$$

koristeći formulu (2.9), slijedi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_k\left(\prod_{i=0}^{k-1} a_i\right)x_0 + a_k\sum_{r=0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a_i\right)b_r + b_k \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k} a_i\right)x_0 + \sum_{r=0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a_i\right)b_r + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a_i\right)b_k \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k} a_i\right)x_0 + \sum_{r=0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a_i\right)b_r. \end{aligned}$$

Pri tome smo koristili notaciju

$$\prod_{i=k+1}^{k} a_i = 1 \qquad \text{i} \qquad \sum_{r=k+1}^{k} a_i = 0. \tag{2.11}$$

Znači, formula (2.9) zaista vrijedi za sve $n \in \mathbf{Z}^+$.

Gornje razmatranje se može objediniti u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 2.1 *Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nizovi realnih brojeva. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbe (2.1) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \boldsymbol{R}$. Takvo rješenje je oblika*

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right)b_r, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{2.12}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (2.11)

Specijalno, kada je $a_n = a$ ili $b_n = b$ $(n = 0, 1, 2, ...,)$, to jest kada je jednadžba (2.1) oblika (2.3), (2.4) ili (2.5), vrijedi

Teorem 2.2 *Neka su $a, b \in \boldsymbol{R}, a \neq 0$. Tada postoje jedinstvena rješenja jednadžbi (2.3), (2.4), odnosno (2.5) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \boldsymbol{R}$. U slučaju jednadžbe (2.5) to je rješenje dato sa*

$$x_n = \begin{cases} \alpha + bn, & \text{ako je } a = 1,\ n = 0, 1, 2, ..., \\ \left(\alpha - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}, & \text{ako je } a \neq 1,\ n = 0, 1, 2, ... \ . \end{cases} \tag{2.13}$$

Rješenje jednadžbe (2.4) ima oblik

$$x_n = \alpha a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k, \quad n = 1, 2, ..., \tag{2.14}$$

dok rješenje jednadžbe (2.3) ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right)b, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{2.15}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (2.11).

Primjedba 2.1 *Neka je $b \neq 0$. Uočimo da je, u slučaju $a = 1$, svako rješenje jednadžbe (2.5), neograničeno. Također, u slučaju $a \neq 1$, jednadžba (2.5) ima konstantno rješenje*

$$x_n = \frac{b}{1-a}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad . \tag{2.16}$$

Takvo se rješenje naziva ***ekvilibrijum rješenje*** *jednadžbe (2.5). Svako drugo rješenje jednadžbe (2.5), za $|a| < 1$, konvergira ka ekvilibrijum rješenju.*

Primjer 2.3 *Riješiti problem početnih vrijednosti*

$$x_{n+1} - 3x_n = e^n, \qquad (n = 0, 1, 2, ...), \qquad x_0 = 2.$$

Rješenje:

Data jednadžba je oblika (2.4), pa se njeno opće rješenje može, koristeći (2.14) i uvjet $\alpha = x_0 = 2$, predstaviti u obliku

$$x_n = 2 \cdot 3^n + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-k-1} e^k, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Primjer 2.4 *Naći rješenje diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = 2(n+1)x_n + 3^n (n+1)!, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad x_0 = 1.$$

Rješenje:

Prema (2.12) imamo

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{i=0}^{n-1} 2(i+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2(i+1) \right) 3^k (k+1)! \\ &= 2^n n! + \sum_{k=0}^{n-1} n! 2^{n-k-1} \cdot 3^k = 2^n n! + 2^{n-1} n! \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2} \right)^k \\ &= 2^n n! + 2^{n-1} n! \frac{(\frac{3}{2})^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2^n n! \left(1 + \left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right) \\ &= 3^n n! \quad . \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

3. Dinamika diferentne jednadžbe prvog reda

3.1. Tačka ekvilibrijuma i periodičnost

Već smo napomenuli kako je za mnoge klase diferentnih jednadžbi prvog reda nemoguće doći do općeg rješenja. Zbog toga se, umjesto rješavanja jednadžbe, pažnja posvećuje ispitivanju ponašanja njenog rješenja u ovisnosti o početnom uvjetu x_0.

Upoznajmo se sada sa pojmom ekvilibrijuma i periodičnosti rješenja diferentne jednadžbe

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.1}$$

gdje se jednadžba (3.1), tako da je $f : I \to I$ (I interval realnih brojeva), naziva ***diferentnom jednadžbom prvog reda***.

Definicija 3.1

1. ***Tačka ekvilibrijuma*** *(fiksna tačka ili tačka ravnoteže) jednadžbe (3.1) je tačka* $\bar{x} \in \boldsymbol{R}$*, takva da je*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

2. ***Eventualna tačka ekvilibrijuma*** *jednadžbe (3.1) je tačka* $x^* \in \boldsymbol{R}$ *za koju postoji* $r \in \boldsymbol{N}$ *tako da je*

$$f^r(x^*) = \underbrace{f(f(...f}_{r}(x^*))) = \bar{x}$$

3. *Tačka* $p \in \boldsymbol{R}$ *naziva se* ***periodičnom tačkom perioda*** k*, ako je*

$$f^k(p) = p.$$

4. *Tačka $p \in \boldsymbol{R}$ naziva se* ***periodičnom tačkom minimalnog perioda*** *k (ili prostog perioda k) ako je k najmanji broj za koji vrijedi*

$$f^k(p) = p,$$

$$f^l(p) \neq p \qquad \textit{za sve} \qquad l = 1, 2, ..., k-1.$$

5. *Tačka $p^* \in \boldsymbol{R}$ naziva se* ***eventualnom periodičnom tačkom minimalnog perioda*** *k, ako postoji $r \in \boldsymbol{N}$ i periodična tačka p (minimalnog perioda k) tako da je*

$$f^r(p^*) = p \qquad i \qquad f^{r-1}(p^*) \neq p.$$

Inače, simbol $f^r(x)$ predstavlja r-tu iteraciju preslikavanja f počev od tačke x.

Kako bi sve bilo malo jasnije, sljedećim primjerom ilustrirat ćemo nalaženje tačke ekvilibrijuma i periodičnog rješenja diferentne jednadžbe.

Primjer 3.1 ***Logistička diferentna jednadžba***

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4x_n(1 - x_n) \tag{3.2}$$

ima dvije tačke ekvilibrijuma i četiri eventualne tačke ekvilibrijuma.

Rješenje:

Uvjerimo se da je to zaista tako. Tačke ekvilibrijuma tražimo rješavajući jednadžbu:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(\bar{x}) \\ \bar{x} &= 4\bar{x}(1-\bar{x}) \\ \bar{x} &= 0 \quad \text{i} \quad \bar{x} = \frac{3}{4} \quad . \end{aligned}$$

Dakle, tačke ekvilibrijuma su 0 i $\dfrac{3}{4}$.

Kako je

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{4}\Big) &= \frac{3}{4}, \\ f\Big(f\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\Big)\Big) &= \frac{3}{4}, \\ f\Big(f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big) &= 0, \\ f\Big(f\Big(f\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\Big)\Big)\Big) &= 0, \end{aligned}$$

to su eventualne tačke ekvilibrijuma: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Jednadžba (3.2) također ima periodično rješenje perioda dva ili P_2 rješenje

$$\left\{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}, \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}\right\},$$

i dvije eventualno periodične tačke perioda dva

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

jer je

$$f\left(f\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}. \qquad \clubsuit$$

3.2. Pojam stabilnosti

Definicija 3.2

1. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) se naziva* ***stabilnom****, ili* ***lokalno stabilnom*** *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da*

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \quad \textit{implicira} \quad |x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \textit{za sve} \quad n \geq 0.$$

2. *Tačka ekvilibrijuma naziva se* ***nestabilnom*** *ako nije stabilna.*

3. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) se naziva* ***lokalnim atraktorom*** *ako postoji $\gamma > 0$ takvo da*

$$x_0 \in \boldsymbol{I} \quad i \quad |x_0 - \bar{x}| < \gamma \quad \textit{implicira} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) se naziva* ***lokalno asimptotski stabilnom****, ili sinkom, ili atraktivnom fiksnom tačkom preslikavanja f ako je ona stabilna i ako je lokalni atraktor.*

5. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) se naziva* ***globalnim atraktorom*** *ako*

$$x_0 \in \boldsymbol{I} \quad \textit{implicira} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

6. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom*** *ako je ona stabilna i ako je globalni atraktor.*

7. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom****, ili repelerom ako postoji $r > 0$ takvo da za svako $x_0 \in \boldsymbol{I}$, takvo da je $0 < |x_0 - \bar{x}| < r$, postoji $N \geq 1$ takvo da je*

$$|x_N - \bar{x}| \geq r.$$

Primjedba 3.1 *Stavljajući da je*

$$y_n = x_n - \bar{x} \quad i \quad g(y) = f(\bar{x} + y) - f(\bar{x})$$

i uvrštavajući to u jednadžbu (3.1), dobijamo:

$$\bar{x} + y_{n+1} = f(\bar{x} + y_n) \tag{3.3}$$

$$y_{n+1} = f(\bar{x} + y_n) - \bar{x} = f(\bar{x} + y_n) - f(\bar{x}) = g(y_n) \tag{3.4}$$

Možemo zapaziti da je 0 tačka ekvilibrijuma transformirane jednadžbe (3.3), i da ona odgovara tački ekvilibrijuma jednadžbe (3.1). Dakle, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je 0 tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1). Rješenje

$$x_n = 0, \qquad n = 0, 1, ...,$$

jednadžbe (3.1) se ponekad naziva trivijalnim rješenjem.

Primjedba 3.2 *Razne definicije stabilnosti tačke ekvilibrijuma jednadžbe (3.1) možemo proširiti na bilo koje rješenje $(\bar{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ jednadžbe (3.1). Na primjer, niz $(\bar{x}_n)$ se naziva stabilnim ako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da*

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta \quad implicira \quad |x_n - \bar{x}_n| < \varepsilon, \quad za\ sve \quad n \geq 0.$$

Primjer 3.2 *Koristeći definiciju 3.2 pokazati da je tačka ekvilibrijuma $\bar{x} = 1$, jednadžbe*

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \qquad n = 0, 1, ..., \tag{3.5}$$

za $x_0 > 0$, stabilna, ali ne i sink.

Rješenje:

Primjetimo da je svako rješenje $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jednadžbe (3.5) oblika:

$$x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ...,$$

Dakle, svako rješenje je periodično rješenje perioda dva. Ekvilibrijum $\bar{x} = 1$ nije lokalno asimptotski stabilan. Naime, niti jedno rješenje $(x_n)_{n=0}^{\infty}, x_0 \neq 1$, ne može konvergirati ka ekvilibrijumu $\bar{x} = 1$, bez obzira kako blizu ekvilibrijumu izabrali početnu vrijednost x_0. S druge strane, ekvilibrijum $\bar{x} = 1$ jeste stabilan. Pa, uvjerimo se u to.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Ako je

$$x_0 > 0 \quad \text{i} \quad |x_0 - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

onda

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x_0 - 1 < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

i posebno

$$x_0 > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Dakle,

$$|x_n - 1| = \begin{cases} |x_0 - 1| & \text{ako je} \quad n \quad \text{paran} \\ |\frac{1}{x_0 - 1}|, & \text{ako je} \quad n \quad \text{neparan.} \end{cases}$$

Ali

$$|x_0 - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

pa je

$$\left|\frac{1}{x_0} - 1\right| = \frac{|x_0 - 1|}{x_0} < \frac{\delta}{\frac{1}{1+\varepsilon}} = \frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}} = \varepsilon. \qquad \clubsuit$$

3.3. Linearizirana stabilnost

Teorem 3.1 ***(Teorem linearizirane stabilnosti)***

Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidna diferencijabilna funkcija. Osim toga, neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1). Tada vrijedi:

(i) ako je

$$|f'(\bar{x})| < 1,$$

ekvilibrijum $\bar{x}$ je lokalno asimptotski stabilan (sink);

(ii) ako je

$$|f'(\bar{x})| > 1,$$

ekvilibrijum $\bar{x}$ je odbijajuća fiksna tačka (repeler), tj. $\bar{x}$ je nestabilan ekvilibrijum.

Dokaz:

(i) S obzirom na pretpostavku da je f neprekidna diferencijabilna funkcija i da je $|f'(\bar{x})| < 1$, postoje pozitivni brojevi $r, \rho, \rho < 1$, takvi da je za sve $x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$

$$|f'(\bar{x})| < \rho.$$

Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti, za svku tačku $x_0 \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$ je

$$|x_1 - \bar{x}| = |f(x_0) - f(\bar{x}) = |f'(\xi_1)||x_0 - \bar{x}| \leq \rho|x_0 - \bar{x}|,$$

gdje je ξ_1 tačka između x_0 i $\bar{x}$, stoga $\xi_1 \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$. Također primjećujemo da je $x_1 \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, jer je $\rho < 1$. Slično nalazimo da je

$$|x_2 - \bar{x}| \leq \rho^2|x_0 - \bar{x}|,$$

i općenito

$$|x_n - \bar{x}| \leq \rho^n|x_0 - \bar{x}|, \qquad n = 0, 1, ... \quad .$$

Dakle,$\bar{x}$ je sink.

(ii) Na osnovu pretpostavke teorema postoje pozitivni brojevi r i R, $R > 1$, takvi da za sve $x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$ imamo da je

$$|f'(x)| \geq R.$$

Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti, postoji broj ξ_2 između x_0 i $\bar{x}$, takav da je

$$|x_1 - \bar{x}| = |f(x_0) - f(\bar{x})| = |f'(\xi_2)||x_0 - \bar{x}| \geq R|x_0 - \bar{x}|.$$

Na sličan način, ako $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, onda

$$|x_n - \bar{x}| \geq R^k|x_0 - \bar{x}|.$$

Na osnovu posljednje nejednakosti zaključujemo da je ekvilibrijum $\bar{x}$ repeler. ■

Nažalost, kada je

$$|f'(\bar{x})| = 1,$$

Teorem linearizirane stabilnosti, ne daje nikakve indicije u vezi sa stabilnošću ekvilibrijuma $\bar{x}$. U tom slučaju potrebna su dodatna ispitivanja koja se odnose na drugi, odnosno treći izvod.

Definicija 3.3 *Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidna diferencijabilna funkcija, a $\bar{x}$ neka je tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1).*

1. *$\bar{x}$ se naziva* ***hiperboličnom fiksnom tačkom*** *ako je*

$$|f'(\bar{x})| \neq 1.$$

2. *$\bar{x}$ se naziva* ***nehiperboličnom fiksnom tačkom*** *ako je*

$$|f'(\bar{x})| = 1.$$

Slučaj nehiperboličnog ekvilibrijuma, ne samo kod diferentnih jednadžbi, specifičan je i mora se posebno razmatrati u svakom slučaju pojedinačno. Pokazuje se da je to ispitivanje vrlo komplicirano i da vrlo često, danas, ne možemo sa sigurnošću doći do potpunih rezultata.

Sljedeći teorem predstavlja proširenje Teorema linearizirane stabilnosti, kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 3.2 *Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidna diferencijabilna funkcija. Pretpostavimo da je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1), i da je za neko $r > 0$, funkcija f neprekidno diferencijabilna na intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$. Tada vrijedi:*

(i) ako je

$$|f'(\bar{x})| < 1$$

ili

$$|f'(\bar{x})| < 1 \quad \textit{za sve} \quad x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \setminus \{\bar{x}\},$$

ekvilibrijum $\bar{x}$ je lokalno asimptotski stabilan;

(ii) ako je

$$|f'(\bar{x})| > 1 \quad \textit{za sve} \quad x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \setminus \{\bar{x}\},$$

ekvilibrijum $\bar{x}$ je repeler.

Istaknimo još jedan vrlo važan rezultat.

Teorem 3.3 *Razmotrimo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \lambda x_n + f(x_n)x_n, \qquad n = 0, 1, ..., \tag{3.6}$$

gdje je $\lambda \in \boldsymbol{R}$, I je interval koji sadrži 0, $f : I \to \boldsymbol{R}$ funkcija koja je neprekidna u 0, takva da je $f(0) = 0$, i $\lambda x + f(x) \in I$ za sve $x \in I$. Vrijede sljedeće tvrdnje.

(i) Ako je $|\lambda| < 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (3.6) je lokalno asimptotski stabilno.

(ii) Ako je $|\lambda| > 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (3.6) je nestabilno.

(iii) Ako je $|\lambda| = 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (3.6) može biti stabilno ili može biti nestabilno.

Primjer 3.3 *Neka je $x_0 \in [0, 1]$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \qquad n = 0, 1, ... \qquad . \tag{3.7}$$

Nula ekvilibrijum jednadžbe (3.7) je sink. Dokazati.

Rješenje:

Ovdje je $\lambda = 1$, $f(x) = -x$, $I = [0,1]$. Ako je $x_0 = 0$, onda je $x_n \equiv 0$ za sve $n \geq 0$. Ako je $x_0 = 1$, opet je $x_n \equiv 0$ za sve $n \geq 1$. Konačno je, za $0 < x_0 < 1$,

$$0 < x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n.$$

Stoga, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ za neko $l \in [0,1)$. Kako je $l = l - l^2$, slijedi $l = 0$. Dakle, svako rješenje s početnim uvjetom $0 < x_0 < 1$, monotono opada ka nuli. ♣

Primjer 3.4 *Neka $x_0 \in [0,\infty)$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2, \qquad n = 0,1,... \qquad . \tag{3.8}$$

Nula ekvilibrijum jednadžbe (3.8) je repeler.

Rješenje:

Ovdje je $\lambda = 1$, $f(y) = y$, $I = [0,\infty)$. Ako je $x_0 > 0$, onda je

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 > x_n,$$

pa je ili $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ili $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, za neki pozitivan realan broj l. Ako bi takav broj l zaista postojao, imali bismo da je $l = l + l^2$ što je nemoguće.

Zbog toga primjećujemo da rješenje $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monotono divergira ka ∞, dakle nula ekvilibrijum je repeler. ♣

Navedimo još nekoliko karakterističnih diferentnih jednadžbi.

Primjer 3.5 *Nelinearnu diferentnu jednadžbu*

$$N_{n+1} = N_n \exp r\left(1 - \frac{N_n}{K}\right), \qquad n = 0,1,.., \tag{3.9}$$

mnogi smatraju diskretnim analognom logističke diferencijalne jednadžbe

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{3.10}$$

*i to je razlog zašto se jednadžba (3.9) naziva **logističkom diferentnom jednadžbom**. Ovdje N_n označava gustinu pojedine populacije u n-toj generaciji. Konstanta r je koeficijent brzine rasta populacije, a konstanta K predstavlja koeficijent širenja okoline. Ispitajmo lokalnu stabilnost jednadžbe (3.9) za $r > 0$, $K > 0$ i uz pretpostavku da je početni uvjet proizvoljna pozitivna konstanta.*

Rješenje:

$\bar{N} = K$ je jedina pozitivna tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.9). Neka je $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija definirana sa

$$f(x) = x \exp r\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Pokazuje se da je

$$f'(x) = \left(1 - \frac{rx}{K}\right) \exp r\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Zbog toga je $f'(K) = 1 - r$, te na osnovu teorema linearizirane stabilnosti slijedi da je K sink za $0 < r < 2$, a repeler za $2 < r$.

Drugi diskretan analogon logističke diferencijalne jednadžbe (3.10) je

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{h} = rN_n\left(1 - \frac{N_n}{K}\right), \qquad n = 0, 1, .., \tag{3.11}$$

gdje je h korak diskretizacije.

Ukoliko uvedemo smjene:

$$N_n = \left(1 + \frac{1}{rh}\right)Kx_n \quad \text{i} \quad a = 1 + r,$$

jednadžba (3.11) svodi se na jednadžbu

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \qquad n = 0, 1, .., \tag{3.12}$$

koja se obično naziva logističkom jednadžbom.

Jasno je da bismo, ukoliko želimo nenegativna rješenja, trebali početnu vrijednost x_0 birati iz $[0, 1]$. Stavimo

$$f(x) = ax(1 - x) \quad \text{za} \quad x \in [0, 1].$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= a - 2ax \\ f''(x) &= -2a < 0. \end{aligned}$$

Dakle f ima lokalni maksimum $x_M = \dfrac{1}{2}$. Kako je $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{a}{4}$, da bismo imali $f : [0, 1] \to [0, 1]$, moramo nametnuti uvjet da je $0 < a \leq 4$. ♣

Primjer 3.6 *Ispitati lokalnu stabilnost tačaka ekvilibrijuma logističke jednadžbe (3.12), za* $a \in (0, 4]$ *i* $x_0[0, 1]$.

Rješenje:

Uočimo prvo da je $\bar{x} = 0$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.12). Jednadžba (3.12) će imati pozitivan ekvilibrijum ako i samo ako jednadžba

$$ax(1-x) = x$$

ima pozitivno rješenje, tj. ako i samo ako je $a > 1$. U ovom slučaju jedini pozitivni ekvilibrijum je $\bar{x} = \dfrac{a-1}{a}$.

Razmotrimo najprije ekvilibrijum $\bar{x} = 0$. Kako je $f'(0) = a$, to na osnovu teorema linearizirane stabilnosti slijedi da je, za $0 < a < 1$, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ sink, odnosno repeler za $1 < a \leq 4$.

Neka je, dalje $1 < a \leq 4$. Ispitajmo stabilnost ekvilibrijuma $\bar{x} = \dfrac{a-1}{a}$. Kako je

$$f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 2 - a,$$

opet, na osnovu Teorema linearizirane stabilnosti, slijedi da je za $1 < a < 3$ ekvilibrijum $\bar{x} = \dfrac{a-1}{a}$ sink, odnosno za $3 < a \leq 4$ repeler. ♣

3.4. Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma

Vidjeli smo da Teorem linearizirane stabilnosti daje odgovor o prirodi stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma $\bar{x}$ diferentne jednadžbe (3.1), ali da ne daje nikakve informacije o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma, tj. u slučaju kada je

$$|f'(\bar{x})| = 1.$$

Tom pitanju će sada biti posvećena posebna pažnja. Razmatraćemo dva kvalitativno različita slučaja: $f'(\bar{x}) = 1$ i $f'(\bar{x}) = -1$.

1. **Slučaj kada je $f'(\bar{x}) = 1$**

Uvedimo prvo pojam polustabilnosti ekvilibrijuma.

Definicija 3.4 *Tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ nazivamo* ***polustabilnom odozdo*** *ako postoji broj $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (3.1) sa $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$, tada je taj niz monotono strogo rastući i konvergira ka $\bar{x}$.

ii) Ako je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (3.1) sa $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$, tada postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$\bar{x} < x_0 < ... < x_{N-1} < \bar{x} + r \leq x_N.$$

Definicija 3.5 *Tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ nazivamo* **polustabilnom odozgo** *ako postoji broj $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (3.1) sa $\bar{x} - r < x_0 < \bar{x}$, tada postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$x_N \leq \bar{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \bar{x}.$$

ii) Ako je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (3.1) sa $\bar{x} < x_0 < \bar{x} + r$, tada je taj niz monotono strogo opadajući i konvergira ka $\bar{x}$.

Definicija 3.6 *Tačku ekvilibrijuma $\bar{x}$ nazivamo* **polustabilnom** *ako je ona polustabilna odozdo ili polustabilna odozgo.*

Navešćemo sada kriterij za ispitivanje polustabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1), u slučaju kada je $f''(\bar{x}) \neq 0$.

Teorem 3.4 *Pretpostavimo da je $f \in C^2[I, I]$, $f'(\bar{x}) = 1$ i $f''(\bar{x}) \neq 0$. Tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) polustabilan. Preciznije,*

i) ako je $f''(\bar{x}) < 0$, tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) polustabilan odozgo;

ii) ako je $f''(\bar{x}) > 0$, tada je ekvilibrijum $\bar{x}$ jednadžbe (3.1) polustabilan odozdo.

Primjer 3.7 *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n} \qquad (n = 0, 1, ...,), \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Rješenje:

Data jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$. Kako je $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, imamo $f'(0) = 1$ i $f''(0) = -2 < 0$, pa prema Teoremu 3.4 $\bar{x} = 0$ je polustabilan odozgo. ♣

Sljedeći teorem nam daje kriterij polustabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (3.1), u slučaju kada je $f''(\bar{x}) = 0$.

Teorem 3.5 *Pretpostavimo da je $f \in C^3[I, I]$, $f'(\bar{x}) = 1$ i $f''(\bar{x}) = 0$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je $f'''(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilan (sink).

ii)Ako je $f'''(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ repeler.

Primjer 3.8 *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n \qquad (n = 0, 1, ...,), \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Rješenje:

Data jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$. Kako je $f(x) = x^3 + x$, imamo $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6 > 0$, pa prema Teoremu 3.5 $\bar{x} = 0$ je nestabilna. Preciznije $\bar{x} = 0$ je repeler.

U ovom slučaju karakter stabilnosti tačke ekvilibrijuma mogli smo ustanoviti i elementarnim putem. Naime, ako je $x_0 > 0$, tada je $x_1 = x_0^3 + x_0 > x_0$. Koristeći indukciju, može se pokazati da je $x_n > x_{n-1}$ za $n = 1, 2, ...,$. Dakle, niz (x_n) konvergira ka tački ekvilibrijuma ili divergira ka $+\infty$. No, kako je $\bar{x} = 0$ jedina tačka ekvilibrijuma, zaključujemo da (x_n) divergira ka $+\infty$. Ako sada pretpostavimo da je $x_0 < 0$, tada je $x_1 = x_0^3 + x_0 < x_0$, odnosno indukcijom se dobije da je $x_n < x_{n-1}$ za $n = 1, 2, ...,$. Ovo implicira da (x_n) divergira ka $-\infty$. Prema tome ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je repeler. ♣

No, može se dobiti i općenitiji rezultat od prethodna dva teorema.

Teorem 3.6 *Neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1). Pretpostavimo da je $f \in C^k[I, I]$ $(k \geq 2)$ i da je*

$$f'(\bar{x}) = 1, \qquad f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., k-1), \qquad f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

i) Ako je k paran broj, tada je $\bar{x}$:

a) polustabilan odozdo ako je $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$,

b) polustabilan odozgo ako je $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$.

ii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

iii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilan.

Dokaz:

i) Pretpostavimo da je k paran broj. Prema Taylorovom teoremu, za dovoljno malo h postoji $\xi \in (\bar{x}, \bar{x} + h)$ tako da je

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(\bar{x})}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k)!}h^k. \qquad (3.13)$$

Ako je $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije $f^{(k)}$, za dovoljno malo h, vrijedi $f^{(k)}(\xi) > 0$. Zbog toga iz (3.13) slijedi

$$f(\bar{x} + h) = \bar{x} + h + \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k)!}h^k > \bar{x} + h.$$

Analogno

$$f(\bar{x} - h) = \bar{x} - h + \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k)!}h^k > \bar{x} - h.$$

Odavde slijedi $f(\bar{x}+h) > \bar{x}+h$ i $\bar{x}-h < f(\bar{x}-h) < \bar{x}$, čime je dokazana polunestabilnost odozdo. Analogno se dokazuje polunestabilnost odozgo.

Dokazi za slučajeve *ii)* i *iii)* slično se izvode kao i u slučaju *i)*. ■

Primjer 3.9 *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$ diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n^4) + 5x_n^6, \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad .$$

Rješenje:

Ovdje je $f(x) = x(1 - x^4) + 5x^6$ sa $f'(0) = 1$, $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = -120 < 0$. Prema Teoremu 3.6, $\bar{x} = 0$ je asimptotski stabilan ekvilibrijum. ♣

Primjer 3.10 *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$ diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n e^{-x_n^k} \qquad (n = 0, 1, 2, ...,),$$

gdje su $x_n \in \boldsymbol{R}$, a k prirodni broj.

Rješenje:

Neka je $f(x) = xe^{-x^k}$. Imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 + (-x^k) + \frac{1}{2!}(-x^k)^2 + \frac{1}{3!}(-x^k)^3 + ...\right) \\ &= x - x^{k+1} + \frac{1}{2!}x^{2k+1} - \frac{1}{3!}x^{3k+1} + ... \quad . \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$f'(0) = 1, \qquad f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \qquad (j = 2, 3, ..., k), \qquad f^{(k+1)}(\bar{x}) = -(k+1)! < 0.$$

Prema Teoremu 3.6 vrijedi:

a) ako je k paran, onda je ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ asimptotski stabilan,

b) ako je k neparan, onda je ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ nestabilan (repeler). ♣

2. **Slučaj kada je** $f'(\bar{x}) = -1$

Neka je $g : I \to I$ definirana sa $g(x) = f(f(x))$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu

$$y_{n+1} = g(y_n), \qquad n = 0, 1, ... \quad . \tag{3.14}$$

Lema 3.1 *Pretpostavimo da je $g \in C(I)$.*

i) Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1), tada je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma i jednadžbe (3.14).

ii) Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1) lokalno asimptotski stabilna u odnosu na jednadžbu (3.14), onda je ona lokalno asimptotski stabilna i u odnosu na jednadžbu (3.1).

iii) Ako je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1) repeler u odnosu na jednadžbu (3.14), onda je repeler i u odnosu na jednadžbu (3.1).

U izlaganju koje slijedi koristićemo pojam tzv. *Schwarzianovog izvoda* ili *Schwarziana.*

Definicija 3.7 *Za dato $x \in I$, pri čemu je $f'(x) \neq 0$, izraz*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

nazivamo ***Schwarzianovim izvodom*** *ili* ***Schwarzianom****.*

Uočimo da, ako je $f'(\bar{x}) = -1$, vrijedi

$$Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2.$$

Sada ćemo navesti jedan važan kriterij za ispititvanje karaktera stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u slučaju kada je $f'(\bar{x}) = -1$.

Teorem 3.7 *Neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1) i pretpostavimo da je $f'(\bar{x}) = -1$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je $Sf(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilan.

ii) Ako je $Sf(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (preciznije, $\bar{x}$ je repeler).

Dokaz:

i) Prema Lemi 3.1, $\bar{x}$ je tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.14). Ako je $x \in I$, sigurno je da vrijedi

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x),$$

pa je

$$g'(\bar{x}) = f'(f(\bar{x}))f'(\bar{x}) = f'(\bar{x})f'(\bar{x}) = (-1)(-1) = 1.$$

Također, vrijedi

$$g''(x) = f''(f(x))[f'(x)]^2 + f'(f(x))f''(x),$$

odakle je

$$\begin{aligned} g''(\bar{x}) &= f''(f(\bar{x}))[f'(\bar{x})]^2 + f'(f(\bar{x}))f''(\bar{x}) \\ &= f''(\bar{x})(-1)^2 + f'(\bar{x})f''(\bar{x}) \\ &= f''(\bar{x}) - f''(\bar{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ostatak dokaza slijedi primjenom Teorema 3.6, s tim što treba da odredimo i $g'''(\bar{x})$. Naime, kako je

$$g'''(x) = f'''(f(x))[f'(x)]^3 + 3f''(f(x))f'(x)f''(x) + f'(f(x))f'''(x),$$

vrijedi

$$\begin{aligned} g'''(\bar{x}) &= f'''(f(\bar{x}))[f'(\bar{x})]^3 + 3f''(f(\bar{x}))f'(\bar{x})f''(\bar{x}) + f'(f(\bar{x}))f'''(\bar{x}) \\ &= f'''(\bar{x})(-1)^3 + 3f''(\bar{x})(-1)f''(\bar{x}) + f'(\bar{x})f'''(\bar{x}) \\ &= -2f'''(\bar{x}) - 3[f''(\bar{x})]^2. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 3.11 *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = -x_n^3 + 2x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Rješenje:

Data jednadžba ima tri tačke ekvilibrijuma: 0, -1 i 1. Pri tome je

$$f(x) = -x^3 + 2x, \quad f'(0) = 2, \quad f'(\pm 1) = -1, \quad f''(\pm 1) = \mp 6 \quad i \quad f'''(\pm 1) = -6.$$

Iz Teorema linearizirane stabilnosti slijedi da je ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ nestabilan (repeler).

Kako je $Sf(\pm 1) = -48 < 0$, to su obje tačke ekvilibrijuma, i -1 i 1, prema Teoremu 3.7, lokalno asimptotski stabilne. ♣

Teorem 3.8 *Neka je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (3.1). Pretpostavimo da je $f \in C^{2k-1}[I, I]$ $(k \geq 1)$ i da je*

$$f'(\bar{x}) = -1, \quad f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = 2, 3, \ldots, k-1), \quad f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

i) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ asimptotski stabilan.
ii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).
iii) Pretpostavimo da je k paran i da postoji cio broj $l < k$ tako da je

$$f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, \ldots, 2l-3), \quad f^{(2l-1)}(\bar{x}) \neq 0.$$

a) Ako je $f^{(2l-1)}(\bar{x}) > 0$, tada je $\bar{x}$ asimptotski stabilan.
b) Ako je $f^{(2l-1)}(\bar{x}) < 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

iv) Pretpostavimo da je k paran i da je

$$f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, \ldots, 2k-3).$$

a) Ako je $\frac{k}{2}\left(\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} > 0$, tada je $\bar{x}$ asimptotski stabilan.

b) Ako je $\frac{k}{2}\left(\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} < 0$, tada je $\bar{x}$ nestabilan (repeler).

Primjer 3.12 *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma* $\bar{x} = 0$ *diferentnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} i) x_{n+1} &= -x_n + x_n^4 + x_n^5 - 3x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, ..., \\ ii) x_{n+1} &= -x_n + x_n^4 - x_n^5 - 3x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad . \end{aligned}$$

Rješenje:

i) Ovdje je $f(x) = -x + x^4 + x^5 - 3x^6$ sa $f'(0) = -1$, $f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Prema Teoremu 3.8 iii), zbog $l = 3$ i $f^{(5)}(0) = 120 > 0$, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je asimptotski stabilan.

ii) Sada je $f(x) = -x + x^4 - x^5 - 3x^6$ sa $f'(0) = -1$, $f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Prema Teoremu 3.8 iii), zbog $l = 3$ i $f^{(5)}(0) = -120 < 0$, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je nestabilan (repeler). ♣

4. Primjena diferentnih jednadžbi prvog reda

Razmotrićemo neke slučajeve iz prakse koji se mogu matematički modelirati, pri čemu su ti modeli linearne diferentne jednadžbe prvog reda.

4.1. Medicinska praksa

Primjer 4.1 *Poznato je da se neki lijek daje pacijentu na svakih šest sati. Neka S_n označava količinu tog lijeka u krvnom sistemu pacijenta na kraju n-tog vremenskog intervala. Poznato je, također, da tijelo pacijenta eliminira određeni dio p lijeka u toku svakog vremenskog intervala. Ako je početna doza S_0, odrediti S_n i $\lim_{n\to\infty} S_n$.*

Rješenje:

Za ovaj proces može se formirati odgovarajući matematički model u obliku diferentne jednadžbe. Naime, kako je količina lijeka u krvnom sistemu pacijenta u (n+1)-vom vremenskom intervalu jednaka količini lijeka u n-tom intervalu, umanjenoj za dio p te količine koju tijelo eliminira i uvećanoj za novu dozu S_0, dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$S_{n+1} = (1-p)S_n + S_0 \quad n = 1, 2, ... \quad .$$

Prema (2.13) imamo

$$S_n = \left[S_n - \frac{S_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{S_0}{p} \qquad i \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_0}{p}.$$

Tako u konkretnom slučaju, za $S_0 = 2$ kubna centimetra (ccm) i $p = 0,4$, dobijamo jednadžbu

$$S_{n+1} = 0,6S_n + S_0, \quad S_0 = 2.$$

Tabela 4.1 sadrži podatke o količini S_n, za $0 \leq n \leq 7$.

Također, važno je uočiti da je u ovom slučaju $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_0}{p} = 5$, ali i da je, prema

(2.16), $S^* = \dfrac{S_0}{1-0,6} = 5ccm$, gdje S^* označava ekvilibrijum sadržaja lijeka u krvi (a koji se približno dostiže nakon nekoliko vremenskih intervala, što podrazumijeva da treba pratiti tabelu).

n	0	1	2	3	4	5	6	7
S_n	2	3,2	3,92	4,95	4,97	4,98	4,988	4,993

Tabela 4.1 Vrijednosti za S_n ♣

4.2. Primjena u matematici

U ovoj sekciji biće navedeni neki primjeri primjene diferentnih jednadžbi u rješavanju nekih matematičkih problema različitog karaktera, kao što su: izračunavanje konačnih suma i numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Izračunavanje konačnih suma

Promatrajmo sljedeću konačnu sumu

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), \tag{4.1}$$

gdje je $f(k)$ data funkcija od k. Pokazaćemo kako se izračunavanje ove sume može jednostavno svesti na rješavanje odgovarajuće linearne diferentne jednadžbe prvog reda. Naime, vrijedi

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k) + f(n+1) = S_n + f(n+1),$$

odnosno,

$$S_{n+1} - S_n = f(n+1), \tag{4.2}$$

što i jeste jedna nehomogena linearna diferentna jednadžba prvog reda koja zadovoljava početni uvjet

$$S_0 = f(0). \tag{4.3}$$

Rješenje diferentne jednadžbe (4.2), koje zadovoljava početni uvjet (4.3), daje zbir promatrane konačne sume (4.1).

Primjer 4.2 *Odrediti konačnu sumu* $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Rješenje:

Data suma, prema (4.2), zadovoljava jednadžbu

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2,$$

odnosno

$$\Delta S_n = (n+1)^2.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} S_n &= \Delta^{-1}(n^2 + 2n + 1) = \Delta^{-1}(n(n-1) + 3n + 1) \\ &= \Delta^{-1}(n^{(2)} + 3n^{(1)} + 1) \\ &= \frac{n^{(3)}}{3} + 3\frac{n^{(2)}}{2} + n + C = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + 3\frac{n(n-1)}{2} + n + C \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + C. \end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $S_0 = 0$, imamo da je $C = 0$, pa se kao rezultat dobije

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \clubsuit$$

Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Poznato je da se diferencijalne jednadžbe veoma mnogo koriste kao matematički modeli u ispitivanju različitih fizičkih, hemijskih i drugih procesa. Takvi modeli opisuju populacije ili objekte koji se razvijaju neprekidno i u kojima je vrijeme (ili neovisna varijabla) podskup skupa realnih brojeva. Nasuprot njima, diferentne jednadžbe opisuju populacije ili objekte koji se razvijaju diskretno i u kojima je vrijeme (ili neovisna varijabla) podskup skupa cijelih brojeva. U mnogim slučajevima nije moguće riješiti datu diferencijalnu jednadžbu. Zbog toga se u takvim situacijama pristupa korištenju numeričkih metoda za približno rješavanje diferencijalne jednadžbe. Korištenje numeričkih shema pri aproksimaciji rješenja diferencijalne jednadžbe dovode do konstrukcija odgovarajućih diferentnih jednadžbi koje su pristupačnije za računanja bilo upotrebom grafičkih kalkulatora, bilo upotrebom kompjutera. Ovdje ćemo predstaviti jednu od jednostavnijih numeričkih shema. Riječ je o jednom od najstarijih numeričkih metoda, dobro poznatom *Eulerovom metodu.*

Promatrajmo sljedeći Caushyjev problem (sa diferencijalnom jednadžbom prvog reda)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \le t \le T. \tag{4.4}$$

Podjelimo interval $[t_0, T]$ na N jednakih dijelova tačkama podjele (čvorovima) $t_0, t_1, ..., t_N = T$. Dužinu svakog od dobijenih podintervala možemo označiti sa

$h = \dfrac{T - t_0}{N}$. Jasno je sada da vrijedi

$$t_k = t_0 + kh, \qquad k = 0, 1, ..., N.$$

Ideja u Eulerovom metodu je da se $x'(t)$ aproksimira sa

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Izvršimo li ovu zamjenu u jednadžbi (4.4), dobije se

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)).$$

Za $t = t_0 + nh$, imamo

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hf(t_0 + nh, x(t_0 + nh))$$

za $n = 0, 1, ..., N-1$. Zamjenom $x(t_0 + nh) = x_n$, konačno dobijamo odgovarajuću diferentnu jednadžbu

$$x_{n+1} = x_n + hf(n, x_n), \tag{4.5}$$

koja predstavlja *Eulerov algoritam* za aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe (4.4) u tačkama podjele (čvorovima).

Uočimo da je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (4.5) ako i samo ako je $f(\bar{x}) = 0$. Dakle, diferencijalna jednadžba (4.4) i diferentna jednadžba (4.5) imaju iste tačke ekvilibrijuma.

Primjedba 4.1 *Slično prethodnoj diferentnoj shemi, može se doći i do nekih drugih. To se, recimo, može postići tako što se $x'(t)$ može aproksimirati nekim od sljedećih izraza*

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h}, \qquad \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h},$$

odnosno, ako se u jednadžbi (4.4) pojavljuje $x^2(t)$, da se on aproksimira nekim od izraza

$$x_n^2, \quad x_{n+1}x_n, \quad x_{n+1}^2, \quad \frac{x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2}{3},$$

i tome slično.

4.3. Ekonomski modeli

Primjena diferentnih jednadžbi u ekonomiji je vrlo rasprostranjena, jer se mnogi ekonomski procesi mogu modelirati u obliku diferentnih jednadžbi. Svakako je najčešći slučaj obračuna kamate i amortizacije, ali i neki drugi vrlo važni, kao što je rast nacionalnog dohotka i tome slično.

Obračun kamate

Primjer 4.3 *Odrediti broj godina potrebnih da se određena suma novca uložena u banku udvostruči, ako se na nju primjenjuje složeno ukamaćivanje (kamata na kamatu) s kamatnom stopom od 2% godišnje.*

Rješenje:

Označimo li sa A_n iznos novca na kraju n-te godine, vidimo da je on jednak zbiru iznosa novca na kraju $(n-1)$-ve godine i obračunate kamate na taj iznos, to jest

$$A_n = A_{n-1} + rA_{n-1} = (1+r)A_{n-1},$$

gdje je r kamatna stopa (u našem slučaju $r = 2\%$). Rješavanjem posljednje diferentne jednadžbe, dobije se

$$A_n = (1+r)^n A_0,$$

gdje je A_0 iznos uložene sume novca. Prema uvjetima zadatka imamo $A_n = 2A_0$, pa vrijedi

$$2A_0 = (1+r)^n A_0 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log(1+r)} = \frac{\log 2}{\log(1+\frac{2}{100})} = 35,0027.$$

Dakle, za 35 godina će se suma novca, uz navedene uvjete, udvostručiti. ♣

Primjer 4.4 *Pretpostavimo da se konstantna suma novca R deponuje na kraju svakog obračunskog perioda u nekoj banci, pri čemu se na taj novac primjenjuje složeni kamatni račun (kamata na kamatu) sa stoptom r po svakom obračunskom periodu. Koliko novca banka duguje na kraju svakog obračunskog perioda?*

Rješenje:

Očito je da je iznos novca koji banka duguje na kraju $(n+1)$-og obračunskog perioda jednak zbiru iznosa novca koji banka duguje na kraju n-tog perioda, kamate obračunate na taj iznos po stopi r i novca u iznosu R koji se uplaćuje za svaki obračunski period, tj.

$$A_{n+1} = (1+r)A_n + R \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

gdje je $A_0 = 0$. Rješenje ove diferentne jednadžbe je

$$A_n = R\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad ♣$$

Amortizacija

Amortizacija je proces kojim se otplaćuje određeni zajam putem niza periodičnih rata, pri čemu svaka od njih sadrži i dio otplate osnovnog duga (glavnice) i dio kamate koja se zaračunava na neotplaćeni dio duga za svaki vremenski period posebno. Pretpostavljamo, dakle, da je u pitanju složeni kamatni račun, koji se primjenjuje po stopi r za svaki vremenski period otplate ukupnog duga. Sa p_n označimo neotplaćeni dio duga nakon n-te uplate g_n (dakle, uplate u općem slučaju ne moraju biti jednake).

Formulacija našeg modela ovdje je bazirana na činjenici da je neotplaćeni dio duga p_{n+1}, nakon $(n+1)$-ve rate otplate duga, jednak zbiru neotplačenog dijela duga p_n nakon n-te rate otplate duga i kamate rp_n obračunate u toku $(n+1)$-og perioda, umanjenog za ratu g_n. Dakle,

$$p_{n+1} = p_n + rp_n - g_n = (1+r)p_n - g_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Prema (2.14), imamo

$$p_n = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g_k.$$

U praksi, rata otplaćivanja duga g_n je konstantna i, recimo, jednaka G. Zamjenom u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} p_n &= (1+r)^n p_0 - (1+r)^n G \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k-1} \\ &= (1+r)^n p_0 - [(1+r)^n - 1]\left(\frac{G}{r}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ako želimo zajam otplatiti u tačno n rata, postavlja se pitanje kolika će biti rata otplate duga? Naravno, tada je $p_n = 0$, pa zamjenom u (4.6), dobije se

$$G = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]. \tag{4.7}$$

Primjer 4.5 *Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od 100\$ uz kamatnu stopu od 5% mjesečno. Amortizacioni plan treba da sadrži: mjesec (odnosno broj rate), neplaćeni dio glavnice početkom mjeseca, iznos rate otplate duga na kraju mjeseca (anuitet), strukturu anuiteta, koja podrazumijeva iznos kamate obračunate na neplaćeni dio duga na kraju obračunskog perioda (tj. mjeseca) i dio otplate glavnice.*

Rješenje:

Izračunajmo prvo iznos mjesečne rate otplate duga (anuiteta). Uzimajući da je $p_0 = 100\$$i $r = 5\% = \frac{5}{100}$, iz (4.7) dobijamo

$$G = 100\frac{\frac{5}{100}}{1-(1+\frac{5}{100})^{-5}} = 23,09748(\$) \approx 23,10(\$).$$

Mjesec	Neplaćeni dio glavnice poč. mj.	Anuitet	Kamata od 5% (dio anuiteta)	Otplata glavnice (dio an.)
1	100,00$	23,10$	5,00$	18,10$
2	81,90	23,10	4,10	19,00
3	62,90	23,10	3,14	19,96
4	42,94	23,10	2,15	20,95
5	21,99	23,10	1,10	22,00
6	0,00			
Ukupno		115,50$	15,49$	100,01$

Tabela 4.2 Amortizacioni plan

Uočimo da je na kraju prvog mjeseca na dug od 100$ obračunato 5% kamate, što iznosi 5, 00$, pa je dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice 23, 10$ - 5, 00$ = 18, 10$. Zbog toga je početkom drugog mjeseca neotplaćeni dio glavnice 100, 00$ - 18, 10$ = 81, 90$. Na taj se iznos Obračunava 5% kamate, što iznosi 4, 10$, pa je dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice 23, 10$ - 4, 10$ = 19, 00$, i tako dalje. Iz ovoga se vidi da se vremenom učešće kamate u anuitetu smanjuje, a dio koji se odnosi na otplatu glavnice raste. ♣

Rast nacionalnog dohotka

Opišimo sada jedan od klasičnih modela koji se koriste u proučavanju rasta nacionalnog dohotka u ekonomiji koja se razvija. Nacionalni dohodak se sastoji od dvije komponente: potrošnje i investicije. U daljem izlaganju zanimaće nas varijacije ovih kvantiteta tokom vremena. Smatraćemo da je vrijeme podijeljeno u jednake intervale, recimo godine, i uvedimo funkcije Y, C i I za nacionalni dohodak, potrošnju i investicije, respektivno. Dakle, domen svake od ovih funkcija biće skup (vremenskih) t-vrijednosti: 0,1,2,..., a Y_t, C_t, I_t označavaće respektivno vrijednosti tih funkcija u vremenu t. Prema tome, nacionalni dohodak se može izraziti u obliku

$$Y_t = C_t + I_t \qquad t = 0, 1, 2, ... \qquad . \tag{4.8}$$

Pretpostavljat ćemo da je potrošnja s nacionalnim dohotkom povezana relacijom

$$C_t = c + mY_t \qquad t = 0, 1, 2, ..., \tag{4.9}$$

gdje su c i m konstante (koje se određuju iz činjenice da je $C_t = c$ kad je $Y_t = 0$ i da je $\Delta C_t = m\Delta Y_t$). Uočimo da ovdje pretpostavljamo da su ove konstante neovisne o t, tako da je u stvari veza između potrošnje i dohotka neizmjenjena s porastom vremena t. Postavimo sljedeća ograničenja na parametre c i m:

$$c \geq 0, \qquad 0 < m < 1. \tag{4.10}$$

Druga od ovih nejednakosti samo predstavlja činjenicu da neki rast dohotka djelomično, ali ne i u potpunosti, izaziva i rast potrošnje.

Pretpostavimo, u cilju orjentacije, da smo u periodu pune zaposlenosti, s dohotkom na takvom nivou da se on ne troši u cijelosti, već da se određeni dio ostavlja za investicije. Kad se investira, ovaj će dio izazvati neki rast u kapacitetu (ili u ukupnom nacionalnom dohotku) sistema i ako puna zaposlenost bude sačuvana, investicijski troškovi će također imati porast. A ovaj rast u investiranju će opet izazvati rast kapaciteta, koji će opet povećati investiranje, itd. Stopa rasta investiranja sa zahtjevom da se sačuva puna zaposlenost se naziva Harrodova "garancijska stopa". Naš je cilj da odredimo ovu garancijsku stopu i da opišemo rast i investiranja i nacionalnog dohotka s vremenom.

Mi moramo, naravno, napraviti nekakav iskaz o preciznom ponašanju u kome će nivo investiranja uticati na nacionalni dohodak. Pretpostavimo da postoji neka konstanta, tzv. *faktor rasta*, koju ćemo označavati sa r, za koju vrijedi

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = rI_t \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{4.11}$$

Rast u kapacitetu izazvana jedinicom investiranja je, dakle, jednaka r i pretpostavimo da je

$$r > 0 \tag{4.12}$$

Prvo izvedimo diferentne jednadžbe koje zadovoljavaju funkcije Y i I. Polazeći od (4.11) i koristeći (4.8) i (4.9), imamo

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - Y_t &= rI_t \\ &= r(Y_t - C_t) \\ &= rY_t - r(c + mY_t), \end{aligned}$$

odnosno

$$Y_{t+1} = [1 + r(1 - m)]Y_t - rc \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{4.13}$$

Ovo je linearna diferentna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima koju zadovoljava funkcija nacionalnog dohotka.

Da bismo pronašli odgovarajuću jednadžbu za investicijski razvoj, pođimo od (4.8):

$$\begin{aligned} I_{t+1} - I_t &= (Y_{t+1} - C_{t+1}) - (Y_t - C_t) \\ &= (Y_{t+1} - Y_t) - (C_{t+1} - C_t). \end{aligned}$$

Koristeći (4.11) i (4.9), dobija se

$$I_{t+1} - I_t = rI_t - m(Y_{t+1} - Y_t) = rI_t - mrI_t.$$

Dakle,

$$I_{t+1} = [1 + r(1-m)]I_t \qquad t = 0, 1, 2, ... \quad . \tag{4.14}$$

Diferentna jednadžba (4.14) ima rješenje

$$I_t = [1 + r(1-m)]^t I_0 \qquad t = 0, 1, 2, ...$$

i, zbog činjenice da je $r(1-m) > 0$, niz $\{I_t\}$ divergira ka $+\infty$.

Analogno se rješava diferentna jednadžba nacionalnog dohotka (4.13), koristeći formulu (2.13) za $a = 1 + r(1-m)$, $b = -rc$. Pri tome je tačka ekvilibrijuma (v. (2.16)):

$$Y^* = \frac{b}{1-a} = \frac{c}{1-m}. \tag{4.15}$$

Zato je rješenje jednadžbe (4.13) (za dato Y_0) dato sa

$$Y_t = [1 + r(1-m)]^t (Y_0 - Y^*) + Y^* \qquad t = 0, 1, 2, ...,$$

tako da, ako je $Y_0 > Y^*$, niz $\{Y_t\}$ također divergira ka $+\infty$.

Harrod je promatrao specijalni slučaj u kome je $c = 0$. U ovom slučaju, kao što se najbolje vidi iz činjenice da jednadžbe (4.13) i (4.14) imaju isti oblik, dohodak i investiranje moraju rasti po istoj garantiranoj stopi, u obliku konstante $r(1-m)$, da bi se sačuvala puna zaposlenost.

Primjer 4.6 *Pretpostavimo da je u određenom periodu ekvilibrijum dohotka u visini $Y_0 = 100$, dok je $C_0 = 60$ i $I_0 40$. Funkcija potrošnje je $C_t = 0,60Y_{t-1}$, a investiranje je autonomno. Iznenada, iz nekog razloga, investiranje se mijenja od 40 na 50. Analizirati stabilnost novog ekvilibrijuma (u smislu da je ekvilibrijum Y^* stabilan ako vrijedi $\lim\limits_{t\to+\infty} Y_t = Y^*$).*

Rješenje:

Budući da je $Y_t = C_t + I_t$ i $I_t = 50$ $(t = 1, 2, ...)$, to dobijamo

$$Y_t = 0,60Y_{t-1} + 50 \qquad (t = 1, 2, ...).$$

Ovo je očito linearna diferentna jednadžba prvog rada, iz koje slijedi (novi ekvilibrijum)

$$Y^* = \frac{50}{1 - 0,60} = 125,$$

a prema (2.13) imamo kao rješenje te jednadžbe niz

$$Y_t = (Y_0 - 125)(0,60)^t + 125 = -25(0,60)^t + 125 \qquad (t = 1, 2, ...).$$

Ovdje je očito $\lim_{t\to+\infty} Y_t = 125 = Y^*$, što znači da je novi ekvilibrijum zaista stabilan. Zanimljivo je pratiti numerički pregled stanja iskazanog gornjim modelom (v. Tabelu 4.3).

Period	**Investicija**	**Potrošnja**	**Dohodak**
0	40	60	100
1	50	60	110
2	50	66	116
3	50	69,6	119,6
4	50	71,76	121,76
5	50	73,056	123,056
6	50	73,8336	123,8336
...	...	...	...
$t \to +\infty$	50	$C_t \to 75,00$	$Y_t \to 125$

Tabela 4.3 Numerički pregled nacionalnog dohotka, potrošnje i investicija ♣

5. Zaključak

U posljednjih trideset godina diferentne jednadžbe su se počele intenzivnije proučavati kako zbog značajnih rezultata u matematici, tako i zbog velikih primjena u biologiji, fizici, ekonomiji itd. Diferentne jednadžbe kao zasebna oblast matematike rijetko su spominjane na našim prostorima, najčešće su povezivane, po sličnostima, s teorijom diferencijalnih jednadžbi, ali se pokazalo da one imaju i dosta različitosti. Iz tog razloga sam se odlučila u sklopu analize obraditi diferentne jednadžbe. Kako same po sebi predstavljaju široku oblast matematike odlučila sam se za jedan dio diferentnih jednadžbi, diferentne jednadžbe prvog reda. Ono čemu se posvetila najveća pažnja kada su u pitanju diferentne jednadžbe, jeste njihovo rješavanje, ali se razmatra i pitanje stabilnosti. Kao osnovne, zahtijevaju da se o njima prvo govori, jesu linearne jednadžbe prvog reda. Tu je akcenat stavljen na rješavanje homogene i nehomogene linearne jednadžbe. Pokazali smo da se one jednostavno mogu riješiti jednostavnim iteriranjem i primjenom matematičke indukcije. Uvidjelo se da je za mnoge klase diferentnih jednadžbi prvog reda nemoguće doći do općeg rješenja. Zbog toga se, umjesto rješavanja jednadžbe, pažnja posvetila ispitivanju ponašanja njenog rješenja u ovisnosti o početnom uvjetu x_0. Pa je tako uveden pojam ekvilibrijuma i periodičnosti rješenja diferentne jednadžbe. Nametnulo se i pitanje stabilnosti ekvilibrijuma, pa je tim povodom uveden i Teorem linearizirane stabilnosti. Bilo je riječi i o hiperboličnom i nehiperboličnom ekvilibrijumu. Primjetili smo da je slučaj nehiperboličnog ekvilibrijuma, ne samo kod diferentnih jednadžbi prvog reda, nego i kod diferentnih jednadžbi bilo kojeg reda ili sistema diferentnih jednadžbi, specifičan i mora se posebno razmatrati u svakom slučaju pojedinačno, pa smo tim povodom proširili Teorem linearizirane stabilnosti sa još jednim teoremom. Vidjeli smo da Teorem linearizirane stabilnosti daje odgovor o prirodi stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma $\bar{x}$, ali da ne daje nikakve informacije o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma, to jest u slučaju kada je $|f'(\bar{x})| = 1$. Tom pitanju je posvećena posebna pažnja. Razmatrali smo dva kvalitativno različita slučaja $f'(\bar{x}) = 1$ i $f'(\bar{x}) = -1$. Da diferentne jednadžbe mogu biti zanimljive pokazali smo kroz niz primjera iz života gdje se diferentne jednadžbe mogu primjeniti na situacije iz svakodnevnog života. Kako skoro svaki čovjek raspolaže novcem i ima otvoren račun u banci kamatu na uložena sredstva može vrlo jednostavno izračunati preko diskretnog modela, za koji smo vidjeli da se upravo opisuje diferentnom jednadžbom. Kroz primjere smo pokazali i primjenu diferentnih jednadžbi u matematici. Prije svega, za rješavanje nekih matematičkih problema kao što su: izračunavanje konačnih suma, geometrijski problemi kombinatornog tipa i numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Pored ekonomije i matematike diferentne jednadžbe su našle svoju primjenu i u medicini, što smo pokazali kroz primjer. Time smo neke slučajeve iz prakse koji se mogu matematički modelirati, upravo riješili pomoću linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda.

Literatura

[1] M. Nurkanović: *DIFERENTNE JEDNADŽBE - Teorija i primjene*, (univerzititski udžbenik), Denfas, Tuzla, 2008.

[2] S. Elaydi: *Discrete Chaos*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2000.

[3] V.Lakshmikantham, D. Triggiante: *Theory of Diference Equations*, Academic Press, Boston et al., 1988.