UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSJEK MATEMATIKA

Prof. Dr. Mehmed Nurkanović

DISKRETNI DINAMIČKI SISTEMI

Skripta - u izradi

Sadržaj

1 Dinamika jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema 5
1.1 Uvod 5
1.2 Linearne diferentne jednadžbe prvog reda 6
1.2.1 Rješavanje homogene jednadžbe 6
1.2.2 Nehomogena linearna jednadžba 8
1.2.3 Vježbe 12
1.3 Stabilnost 14
1.3.1 Tačka ekvilibrijuma i periodičnost 14
1.3.2 Vježbe 18
1.3.3 Pojam stabilnosti i grafičke iteracije 19
1.3.4 Linearizirana stabilnost 21
1.3.5 Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma 28
1.3.6 Vježbe 38
1.4 Stabilnost periodičnih tačaka 38
1.4.1 Vježbe 40
1.5 Globalna stabilnost 41
1.5.1 Disipativna preslikavanja 46
1.5.2 Vježbe 49
1.6 Bifurkacije 50
1.6.1 Ruta bifurkacije udvostručavanja perioda do haosa 51
1.6.2 Teorem Sharkovskog i udvostručavanje perioda 53
1.6.3 Vježbe 57
1.6.4 Bifurkacija sedlastog čvora ili tangentna bifurkacija 59
1.6.5 Vježba 62
1.6.6 Lyapunovljevi eksponenti i haotične orbite 63
1.6.7 Vježba 66

2 Dinamika dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema 67
2.1 Uvod 67
2.2 Stabilnost 69
2.2.1 Stabilnost linearnih sistema 69
2.2.2 Vježba 72
2.2.3 Stabilnost preko linearizacije 73

2.2.4 Vježba 80
2.2.5 Metod Lyapunovljeve funkcije 81
2.2.6 Vježba 84
2.3 Diskretni Dirichletov teorem 85
2.3.1 Vježba 87

Literatura **91**

Poglavlje 1

Dinamika jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema

1.1 Uvod

U ovom poglavlju ćemo se baviti ispitivanjem dinamike diferentne jednadžbe prvog reda

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, ..., \tag{1.1}$$

gdje je $f : I \to I$ (I interval realnih brojeva) zadana funkcija.

Pod ispitivanjem dinamike diferentne jednadžbe podrazumijevamo sljedeće aktivnosti: odrediti tačke ekvilibrijuma i periodične tačke, analizirati njihovu stabilnost i asimptotsku stabilnost, odrediti neperiodične tačke, ispitati bifurkaciono ponašanje i haotično ponašanje.

Uvedimo sada terminologiju koju ćemo koristiti u narednom izlaganju. Jednadžbu (1.1) ćemo zvati i **jednodimenzionalnim diskretnim dinamičkim sistemom**. Funk-ciju f ćemo zvati **preslikavanjem** pridruženo (1.1). **Rješenje** jednadžbe (1.1) je svaki niz $\{\xi\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava jednadžbu (1.1) za sve $n = 0, 1, \dots$. Za neke klase diferentnih jednadžbi, prije svega za neke linearne, moguće je doći do općeg rješenja. Međutim, u općenitom slučaju to je vrlo teško postići. Tako je jako malo klasa diferentnih jednadžbi, čak i prvog reda, koje se mogu efikasno riješiti. Ukoliko je dat početni uvjet $x_0 = \alpha$, problem rješavanja diferentne jednadžbe (1.1) tako da rjedenje zadovoljava početni uvjet se naziva **problemom početnih vrijednosti** (PPV). **Opće rješenje** jednadžbe (1.1) je niz $\{\xi\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava jednadžbu (1.1) za sve $n = 0, 1, ...$ i uključuje konstantu C koja može biti izračunata koristeći početni uvjet. **Partikularno rješenje** je rješenje koje se dobije iz općeg rješenja za odredenu vrijednost konstante C, odnosno predstavlja rješenje odgovarajućeg PPV.

Kad je u pitanju dinamika diferentne jednadžbe prvog reda, ona može biti i vrlo komplicirana. Tako je, za razliku od diferencijalnih jednadžbi, moguće haotično po-našanje rješenja čak i u slučaju diferentnih jednadžbi prvog reda (npr. slučaj

Riccatijeve ili logističke diferentne jednadžbe). Kod diferencijalnih jednadžbi to je moguće tek u slučaju kad su one trećeg reda.

1.2 Linearne diferentne jednadžbe prvog reda

Definicija 1.2.1 *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.2}$$

gdje su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ poznati nizovi realnih brojeva, naziva se ***linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda****.*

U slučaju kada je $b_n = 0$ $(n = 0, 1, ...)$, jednadžba (1.2) se naziva ***homogenom****, dok se inače, to jest kada je $b_n \neq 0$ za bar jedno $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, jednadžba (1.2) naziva* ***nehomogenom****.*

Uočimo da se u jednadžbi (1.2) može općenito smatrati da indeks n polazi od nekog fiksnog prirodnog broja $n_0 \geq 1$. Medutim, smjenom $z_{n-n_0} = x_n$, taj slučaj svodimo na slučaj jednadžbe (1.2).

Obično se jednadžbi (1.2) dodaje takozvani uvjet početnih vrijednosti

$$x_0 = \alpha. \tag{1.3}$$

Diferentna jednadžba (1.2), zajedno s početnim uvjetom (1.3), čini tzv. *problem početnih vrijednosti* (PPV).

Moguće su izvjesne modifikacije jednadžbe (1.2) u ovisnosti o tome da li su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konstantni ili ne:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.5}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.6}$$

pri čemu su $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ poznate konstante.

1.2.1 Rješavanje homogene jednadžbe

Razmotrimo prvo slučaj homogene linearne jednadžbe prvog reda:

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \ . \tag{1.7}$$

Rješenje ove jednadžbe se može jednostavno dobiti iteriranjem:

$$x_n = a_{n-1}x_{n-1} = a_{n-1}\left(a_{n-2}x_{n-2}\right) = a_{n-1}a_{n-2}\left(a_{n-3}x_{n-3}\right) = ... =$$
$$= a_{n-1}a_{n-2}...a_0x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0.$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (1.7) je dato sa

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) C, \tag{1.8}$$

gdje je C proizvoljna konstanta, dok odgovarajuće rješenje PPV ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) \alpha. \tag{1.9}$$

Primjer 1.2.1 *Jednadžba*

$$x_{n+1} = 3x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ima opće rješenje

$$x_n = C \cdot 3^n,$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Odgovarajuće rješenje PPV je

$$x_n = \alpha \cdot 3^n.$$

Primjećujemo da je svako rješenje neograničeno. ♣

Primjer 1.2.2 *Jednadžba*

$$x_{n+1} - \frac{3n+1}{3n+7}x_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ima opće rješenje (prema (1.8))

$$x_n = C\prod_{i=0}^{n-1} \frac{3i+1}{3i+7} = \frac{4C}{\left(3n+1\right)\left(3n+4\right)},$$

(C - proizvoljna konstanta), iz čega se da zaključiti da $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. ♣

1.2.2 Nehomogena linearna jednadžba

Razmatrajmo sada slučaj nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda u najop-ćenitijem obliku (1.2). Jedinstveno rješenje ove jednadžbe može se naći također jednostavnim iteriranjem i primjenom matematičke indukcije. Naime,

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_0 x_0 + b_0, \\
x_2 &= a_1 x_1 + b_1 = a_1 (a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1, \\
x_3 &= a_2 x_2 + b_2 = a_2 (a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 = \\
&= a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2,
\end{aligned}$$

iz čega se može zaključiti da za sve $n \in \mathbb{Z}^+$ vrijedi:

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r. \tag{1.10}$$

Pri tome smo, po definiciji, uzimali da je

$$\prod_{i=0}^{-1} a_i = 1 \text{ i } \prod_{i=n}^{n-1} a_i = 1. \tag{1.11}$$

Formulu (1.10) dokažimo principom potpune matematičke indukcije. U tu svrhu pretpostavimo da je ona tačna za neki prirodni broj $n = k > 1$. Tada iz (1.2), za $n = k$, to jest

$$x_{k+1} = a_k x_k + b_k,$$

koristeći formulu (1.10), slijedi

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= a_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} a_i \right) x_0 + a_k \sum_{r=0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a_i \right) b_r + b_k \\
&= \left(\prod_{i=0}^{k} a_i \right) x_0 + \sum_{r=0}^{k-1} \left(\prod_{i=r+1}^{k} a_i \right) b_r + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a_i \right) b_k \\
&= \left(\prod_{i=0}^{k} a_i \right) x_0 + \sum_{r=0}^{k} \left(\prod_{i=r+1}^{k} a_i \right) b_r.
\end{aligned}$$

Pri tome smo koristili notaciju

$$\prod_{i=k+1}^{k} a_i = 1 \text{ i } \sum_{r=k+1}^{k} a_i = 0. \tag{1.12}$$

Znači, formula (1.10) zaista vrijedi za sve $n \in \mathbb{Z}^+$.

Naravno da će se formula (1.10) malo modificirati u slučaju jednadžbi (1.4), (1.5) ili (1.6).

Gornje razmatranje se može objediniti u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 1.2.1 *Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nizovi realnih brojeva. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbe (1.2) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. Takvo rješenje je oblika*

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.13}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (1.12).

Specijalno, kada je $a_n = a$ ili $b_n = b$ $(n = 0, 1, 2, ...)$, to jest kad je jednadžba (1.2) oblika (1.4), (1.5) ili (1.6), vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.2.2 *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tada postoji jedinstveno rješenje jednadžbi (1.4), (1.5), odnosno (1.6) uz početni uvjet $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. U slučaju jednadžbe (1.6) to je rješenje dato sa*

$$x_n = \begin{cases} \alpha + bn, & \text{ako je } a = 1, \\ \left(\alpha - \dfrac{b}{1-a}\right) a^n + \dfrac{b}{1-a}, & \text{ako je } a \neq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2... \,. \tag{1.14}$$

Rješenje jednadžbe (1.5) ima oblik

$$x_n = \alpha a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.15}$$

dok rješenje jednadžbe (1.4) ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\alpha + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.16}$$

vodeći pri tome računa o notaciji (1.12).

Napomena 1.2.1 *Neka je $b \neq 0$. Uočimo da je, u slučaju $a = 1$, svako rješenje jednadžbe (1.6) neograničeno. Takoder, u slučaju $a \neq 1$, jednadžba (1.6) ima konstantno rješenje*

$$x_n = \frac{b}{1-a}, \quad n = 0, 1, 2, ... \,. \tag{1.17}$$

*Takvo se rješenje naziva **ekvilibrijum rješenje** jednadžbe (1.6). Svako drugo rješenje jednadžbe (1.6), za $|a| < 1$, konvergira ka ekvilibrijum rješenju.*

Primjer 1.2.3 *Riješiti problem početnih vrijednosti*

$$x_{n+1} - 3x_n = e^n, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \quad x_0 = 2.$$

Rješenje. Data jednadžba je oblika (1.5), pa se njeno opće rješenje može, koristeći (1.15) i uvjet $\alpha = x_0 = 2$, predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} x_n &= 2 \cdot 3^n + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-k-1} e^k = 2 \cdot 3^n + 3^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e}{3}\right)^k = 2 \cdot 3^n + 3^{n-1} \frac{1-\left(\frac{e}{3}\right)^n}{1-\frac{e}{3}} \\ &= 2 \cdot 3^n + \frac{3^n - e^n}{3-e}, \quad n = 1, 2, \ldots \ . \end{aligned}$$

♣

Primjer 1.2.4 *Naći rješenje diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = 2\,(n+1)\,x_n + 3^n\,(n+1)!, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad x_0 = 1.$$

Rješenje. Prema (1.13) imamo

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{i=0}^{n-1} 2\,(i+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} 2\,(i+1) \right) 3^k\,(k+1)! \\ &= 2^n n! + \sum_{k=0}^{n-1} n! 2^{n-k-1} \cdot 3^k = 2^n n! + 2^{n-1} n! \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= 2^n n! + 2^{n-1} n! \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2^n n! \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) \\ &= 3^n n! \quad . \end{aligned}$$

♣

Primjer 1.2.5 *Poznato je da se neki lijek daje pacijentu na svakih šest sati. Neka S_n označava količinu tog lijeka u krvnom sistemu pacijenta na kraju n-tog vremenskog intervala. Poznato je, takoder, da tijelo pacijenta eliminira odredeni dio p lijeka u toku svakog vremenskog intervala. Ako je početna doza S_0, odrediti S_n i $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.*

Rješenje. Za ovaj proces može se formirati odgovarajući matematički model u obliku diferentne jednadžbe. Naime, kako je količina lijeka u krvnom sistemu pacijenta u $(n+1)$-vom vremenskom intervalu jednaka količini lijeka u n-tom intervalu, umanjenoj za dio p te količine koju tijelo eliminira i uvećanoj za novu dozu S_0, dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$S_{n+1} = (1-p)\,S_n + S_0 \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Prema (1.14) imamo

$$S_n = \left[S_0 - \frac{S_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{S_0}{p} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_0}{p}.$$

Tako u konkretnom slučaju, za $S_0 = 2$ kubna centimetra (ccm) i $p = 0,4$, dobijamo jednadžbu

$$S_{n+1} = 0,6 S_n + S_0, \quad S_0 = 2.$$

Tabela 3.1 sadrži podatke o količini S_n, za $0 \leq n \leq 7$.

Takoder, važno je uočiti da je u ovom slučaju $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_0}{p} = 5$, ali i da je, prema (1.17), $S^* = \dfrac{S_0}{1-0,6} = 5\ ccm$, gdje S^* označava ekvilibrijum sadržaja lijeka u krvi (a koji se približno dostiže nakon nekoliko vremenskih intervala, što podrazumijeva da treba pratiti tabelu).

Tabela 3.1 Vrijednosti za S_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7
S_n	2	$3,2$	$3,92$	$4,352$	$4,6112$	$4,7667$	$4,86$	$4,916$

♣

Navedimo sada jedan poseban diskretni dinamički sistem u ekonomiji kojim se opisuje tzv. **Amortizacija otplate zajma.** Amortizacija je proces kojim se otplaćuje odredeni zajam putem niza periodičnih rata, pri čemu svaka od njih sadrži i dio otplate osnovnog duga (glavnice) i dio kamate koja se zaračunava na neotplaćeni dio duga za svaki vremenski period posebno. Pretpostavljamo, dakle, da je u pitanju obračun kamate na zatečeni iznos, koji se primjenjuje po stopi r za svaki vremenski period otplate ukupnog duga. Sa p_n označimo neotplaćeni dio duga nakon n-te uplate g_n (dakle, uplate u općem slučaju ne moraju biti jednake).
Formulacija našeg modela ovdje je bazirana na činjenici da je neotplaćeni dio duga p_{n+1}, nakon $(n+1)$-ve rate otplate duga, jednak zbiru neotplaćenog dijela duga p_n nakon n-te rate otplate duga i kamate rp_n obračunate u toku $(n+1)$-og perioda, umanjenog za ratu g_n. Dakle,

$$p_{n+1} = p_n + rp_n - g_n = (1+r)\, p_n - g_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Prema (1.15), imamo

$$p_n = (1+r)^n\, p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1}\, g_k.$$

U praksi, rata otplaćivanja duga g_n je konstantna i, recimo, jednaka G. Zamjenom u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} p_n &= (1+r)^n\, p_0 - (1+r)^n\, G \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k-1} \\ &= (1+r)^n\, p_0 - [(1+r)^n - 1] \left(\frac{G}{r}\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ako želimo zajam otplatiti u tačno n rata, postavlja se pitanje kolika će biti rata otplate duga? Naravno, tada je $p_n = 0$, pa zamjenom u (1.18), imamo

$$G = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]. \tag{1.19}$$

Primjer 1.2.6 *Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od* 100$ *uz kamatnu stopu od* 5% *mjesečno. Amortizacioni plan treba da sadrži: mjesec (odnosno, broj rate), neplaćeni dio glavnice početkom mjeseca, iznos rate otplate duga na kraju mjeseca (anuitet), strukturu anuiteta, koja podrazumijeva iznos kamate obračunate na neplaćeni dio duga na kraju obračunskog perioda (tj. mjeseca) i dio otplate glavnice. Plan praviti prema pretpostavci da će zajam biti otplaćen u pet rata.*

Rješenje. Izračunajmo prvo iznos mjesečne rate otplate duga (anuiteta). Uzimajući da je $p_0 = 100\$$ i $r = 5\% = \dfrac{5}{100}$, iz (1.19) dobijamo

$$G = 100\frac{\frac{5}{100}}{1-\left(1+\frac{5}{100}\right)^{-5}} = 23.09748(\$) \approx 23.10(\$).$$

Tabela 2.2 Amortizacioni plan

Mjesec	Neplaćeni dio glavnice poč. mj.	Anuitet	Kamata od 5% (dio anuiteta)	Otplata glavnice (dio an.)
1	100.00$	23.10$	5.00$	18.10$
2	81.90	23.10	4.10	19.00
3	62.90	23.10	3.14	19.96
4	42.94	23.10	2.15	20.95
5	21.99	23.10	1.10	22.00
6	−0.01			
Ukupno:		115.50$	15.49$	100.01$

Uočimo da je na kraju prvog mjeseca na dug od 100$ obračunato 5% kamate, što iznosi 5.00$. To znači da dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice iznosi $23.10 - 5.00 = 18.10$ ($). Zbog toga je početkom drugog mjeseca neotplaćeni dio glavnice $100.00 - 18.10 = 81.90$ ($). Na taj se iznos obračunava 5% kamate, što iznosi 4.10$, pa je dio anuiteta koji se odnosi na otplatu glavnice $23.10 - 4.10 = 19.00$ ($), i tako dalje. Iz ovoga se vidi da se vremenom učešće kamate u anuitetu smanjuje, a dio koji se odnosi na otplatu glavnice raste. ♣

1.2.3 Vježbe

1.2.1 *Riješiti sljedeće diferentne jednadžbe:*

a) $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}x_n$,

b) $x_{n+1} = \dfrac{3n+1}{2n+5}x_n$,

c) $x_{n+1} - e^{2n} x_n = 0,$
d) $x_{n+1} - e^{\cos 2n} x_n = 0,$
e) $x_{n+1} - 2^n x_n = 0.$

1.2.2 *Naći opće rješenje svake od sljedećih diferentnih jednadžbi:*
a) $x_{n+1} - 2x_n = 3,$
b) $x_{n+1} - 3x_n = 3 \cdot 2^n,$
c) $x_{n+1} - 4x_n = 4^n.$

1.2.3 *Naći opće rješenje svake od sljedećih diferentnih jednadžbi:*
a) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1} x_n = 2,$
b) $x_{n+1} - (n+1)\, x_n = 3^n\,(n+1)!,$
c) $x_{n+1} = 2x_n + e^{3n},$
d) $x_{n+1} + \frac{x}{n} x_n = \frac{e^{-x}}{n},$
e) $x_{n+1} - \frac{3n+1}{3n+7} x_n = \frac{n}{(3n+4)(3n+7)},$
f) $x_{n+1} = x_n + (n+1)^2\,.$

1.2.4 *Naći rješenje svakog od sljedećih PPV:*
a) $x_{n+1} - 3x_n = e^n, \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, 3, ...,$
b) $x_{n+1} + 2\,(n-1)\, x_n + 2n + 3 = 0, \quad x_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...,$
c) $x_{n+1} - 4x_n = 3 \cdot 5^n, \quad x_0 = -1, \quad n = 0, 1, 2, ... \;.$

1.2.5 *Naći opće rješenje svake od sljedećih diferentnih jednadžbi:*
a) $x_{n+1} - 3x_n = n6^n,$
b) $x_{n+1} - \frac{n+2}{n+1} x_n = (n+2)^{(2)}\,,$
c) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1} x_n = \frac{n}{n+1}.$

1.2.6 *Riješiti svaku od narednih jednadžbi i odrediti* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$*:*
a) $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad x_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...,$
b) $x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+3}}{2^{2n+3}\,(2n+3)!} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$
c) $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...,$
d) $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}, \quad x_1 \in (-\infty, \infty)\,, \quad n = 1, 2, ...$

1.2.7 *Ako je* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *rješenje PPV*

$$x_{n+1} - (n+1)\,x_n = n+1, \quad x_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, ... ,$$

izračunati proizvod

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right).$$

1.2.8 *Poznato je da se gama funkcija definira sa* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$.
a) Pokazati da je $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\quad \Gamma(1) = 1$.
b) Ako je n *pozitivan cio broj, pokazati da je* $\Gamma(n+1) = n!$.

1.2.9 *Neka je* $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *u diferencijalnoj jednadžbi* $y'(x) = y(x) + e^x$.
a) Pokazati da $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *zadovoljava diferentnu jednadžbu*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

b) Koristeći rješenje jednadžbe pod a), odrediti $y(x)$.

1.2.10 *Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od* 10000$ *uz kamatnu stopu od* 0.5% *mjesečno Plan praviti prema pretpostavci da će zajam biti otplaćen u deset mjeseci, s mjesečnim anuitetima.*

1.3 Stabilnost

1.3.1 Tačka ekvilibrijuma i periodičnost

Već smo napomenuli kako je za mnoge klase diferentnih jednadžbi prvog reda nemoguće doći do općeg rješenja. Zbog toga se, umjesto rješavanja jednadžbe, pažnja posvećuje ispitivanju ponašanja njenog rješenja u ovisnosti o početnom uvjetu x_0, odnosno pitanju stabilnosti tačaka kevilibrijuma. Oznaka $f^r(\alpha)$ predstavljat će nam r-tu iteraciju funkcije f koja starta u tački α. Drugim riječima,

$$f^r(\alpha) = \underbrace{f(f(...f}_{r}(\alpha))).$$

Prije svega, uvedimo osnovne pojmove neophodne za isptivanje ponašanja rješenja diferentne jednadžbe prvog reda.

Definicija 1.3.1 *1.* ***Pozitivna orbita*** *tačke* $x_0 = \alpha$ *za dinamički sistem (1.1) je niz*

$$\mathcal{O}^+(\alpha) := \{x_0, x_1, x_2, ...\} = \left\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ...\right\}.$$

2. ***Tačka ekvilibrijuma*** *(fiksna tačka preslikavanja f ili tačka ravnoteže) dinamičkog sistema (1.1) je tačka $\bar{x} \in \mathbb{R}$, takva da je*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

3. ***Eventualna tačka ekvilibrijuma*** *jednadžbe (1.1) je tačka $x^* \in \mathbb{R}$ za koju postoji $r \in \mathbb{N}$ i fiksna tačka $\bar{x}$ od f tako da je*

$$f^r(x^*) = \underbrace{f(f(...f}_{r}(x^*))) = \bar{x} \quad i \quad f^{r-1}(x^*) \neq \bar{x}.$$

4. *Tačka $p \in \mathbb{R}$ naziva se* ***periodičnom tačkom perioda*** *k dinamičkog sistema (1.1) ako je*

$$f^k(p) = p.$$

   Tačka $p \in \mathbb{R}$ naziva se ***periodičnom tačkom minimalnog perioda*** *k (ili prostog perioda k) ako je k najmanji broj za koji vrijedi*

$$f^k(p) = p,$$

   odnosno $f^l(p) \neq p$ za sve $l = 1, 2, ...k - 1$.

   Ako je p periodična tačka, tada se $\mathcal{O}^+(p)$ naziva ***periodičnom orbitom*** *i ona je tada konačan skup $\mathcal{O}^+(\alpha) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$. Za orbite koje nisu periodične kaže se da su* ***neperiodičn****e. (Očito je periodična tačka minimalnog perioda k ustvari fiksna tačka preslikavanja f^k.)*

5. *Tačka $p^* \in \mathbb{R}$ naziva se* ***eventualnom periodičnom tačkom minimalnog perioda*** *k za diferentnu jednadžbu (1.1) ili eventualna periodična tačka za preslikavanje f, ako postoji $r \in \mathbb{N}$ i periodična tačka p minimalnog perioda k tako da je*

$$f^r(p^*) = p \quad i \quad f^{r-1}(p^*) \neq p.$$

Inače, simbol $f^r(x)$ predstavlja r-tu iteraciju preslikavanja f počev od tačke x.

Kako bi sve bilo malo jasnije, sljedećim primjerom ilustrirat ćemo nalaženje tačke ekvilibrijuma i periodičnog rješenja diferentne jednadžbe.

Primjer 1.3.1 *U* ***logističkoj diferentnoj jednadžbi***

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4x_n(1 - x_n) \tag{1.20}$$

odredimo tačke ekvilibrijuma, neke eventualne tačke ekvilibrijuma, periodične tačke minimalnog perioda dva i neke odgovarajuće eventualne periodične tačke.

Rješenje. Tačke ekvilibrijuma tražimo rješavajući jednadžbu

$$\bar{x} = f(\bar{x}) = 4\bar{x}(1-\bar{x}),$$

odakle je

$$\bar{x} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{x} = \frac{3}{4}.$$

Odredimo eventualne tačke ekvilibrijuma reda 1, 2 i 3.

Za $r = 1$ imamo

$$\begin{gathered}(f(x^*) = 0 \wedge x^* \neq 0) \Longleftrightarrow (4x^*(1-x^*) = 0 \wedge x^* \neq 0) \Longleftrightarrow x^* = 1, \\ \left(f(x^*) = \frac{3}{4} \wedge x^* \neq \frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow \left(4x^*(1-x^*) = \frac{3}{4} \wedge x^* \neq \frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow x^* = \frac{1}{4},\end{gathered}$$

a odgovarajuće pozitivne orbite su

$$\mathcal{O}^+(1) = \{1, 0, 0, 0, ...\}, \quad \mathcal{O}^+\left(\frac{1}{4}\right) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, ...\right\}.$$

Za $r = 2$ je

$$\begin{aligned}&\left(f^2(x^*) = 0 \wedge f(x^*) \neq 0\right) \\ &\Longleftrightarrow \{f(f(x^*)) = 16x^*(1-x^*)(1-4x^*(1-x^*)) = 0 \wedge 4x^*(1-x^*) \neq 0\} \\ &\Longleftrightarrow f(x^*) = 4x^*(1-x^*) = 1 \Longleftrightarrow x^* = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}&\left(f^2(x^*) = \frac{3}{4} \wedge f(x^*) \neq \frac{3}{4}\right) \\ &\Longleftrightarrow \left\{f(f(x^*)) = 16x^*(1-x^*)(1-4x^*(1-x^*)) = \frac{3}{4} \wedge 4x^*(1-x^*) \neq \frac{3}{4}\right\} \\ &\Longleftrightarrow f(x^*) = 4x^*(1-x^*) = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x^*_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4},\end{aligned}$$

a odgovarajuće pozitivne orbite su oblika

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, ...\right\}, \quad \mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, ...\right\},$$
$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, ...\right\}.$$

U slučaju $r = 3$, na primjer, rješavanjem jednadžbe

$$f(x^*) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4},$$

dobije se $x^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$, pa je odgovarajuća pozitivna orbita

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}\right) = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, ...\right\}.$$

Analogno, iz jednadžbe

$$f(x^*) = \frac{1}{2}$$

slijedi da je $x^* = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2}$, pa je

$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, ...\right\},$$
$$\mathcal{O}^+\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, ...\right\}.$$

Jednadžba (1.20), takoder, ima periodično rješenje minimalnog perioda dva (ili P_2 rješenje)

$$\left\{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}, \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}\right\},$$

koja se dobiju rješavanjem jednadžbe

$$f^2(p) = f(f(p)) = p \Longleftrightarrow 16p(1-p)(1-4p(1-p)) = p.$$

Rješavanjem jednadžbi

$$f(f(x)) = 16x(1-x)(1-4x(1-x)) = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5},$$

dobiju se dvije eventualno periodične tačke perioda dva

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

jer je

$$f\left(f\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}. \quad \clubsuit$$

Pitanje egzistencije fiksne tačke preslikavanja f moguće je ispitivati na različite načine. No, ovdje ćemo navesti samo dva jednostavna kriterija zasnovana samo na neprekidnosti funkcije.

Teorem 1.3.1 *Neka je $f : I \to I$ neprekidno preslikavanje, a $I = [a, b]$ zatvoreni interval u $\mathbb{R}$. Tada f ima fiksnu tačku.*

Dokaz. Formirajmo novo preslikavanje g sa $g(x) = f(x) - x$. Očito je i g neprekidno preslikavanje. Ako je $f(a) = a$ ili $f(b) = b$, dokaz je završen. Zato pretpostavimo da je $f(a) \neq a$ i $f(b) \neq b$. Zbog pretpostavke da je $f : I \to I$, jasno je da mora biti $f(a) > a$ ili $f(b) < b$, što impicira $g(a) > 0$ i $g(b) < 0$. Prema poznatom teoremu o meduvrijednosti iz analize (osobine neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu) slijedi postoji neka tačka $c \in (a, b)$ takva da je $g(c) = 0$, odnosno $f(c) = c$ i c je fiksna tačka preslikavanja f. ■

Teorem 1.3.1 ustvari govori o tome da za neprekidno preslikavanje f za koje je $f(I) \subset I$ vrijedi da ima fiksnu tačku. No, kako to pokazuje sljedeći teorem, ista tvrdnja vrijedi i kad je $f(I) \supset I$.

Teorem 1.3.2 *Nek je $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje za koje vrijedi $f(I) \supset I$. Tada f ima fiksnu tačku u I.*

Dokaz. Vidjeti Vježbe 1.3.2, Zadatak 1.3.8 . ■

1.3.2 Vježbe

1.3.1 *Odrediti tačke ekvilibrijuma (fiksne tačke), eventualne tačke ekvilibrijuma, tačke minimalnog perioda dva i minimalnog perioda tri i eventualno periodične tačke minimalnog perioda dva i minimalnog perioda tri, kao i odgovarajuće periodične orbite, za tzv.* ***tent*** *preslikavanje (po dijelovima linearna verzija logističke jednadžbe)*

$$x_{n+1} = T_2(x_n), \quad n = 0, 1, ...,$$

gdje je

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1.3.2 *Neka je $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv.* ***tent funkcija*** *s kosinom* 3

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{ako je } x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 3 - 3x & \text{ako je } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Odrediti tačke ekvilibrijuma jednadžbe

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \; . \tag{1.21}$$

b) Pokazati da su tačke $\dfrac{k}{3^m}$, $0 < \dfrac{k}{3^m} < 1$, $(k, m \in \mathbb{N})$ *eventualne tačke ekvilibrijuma diferentne jednadžbe (1.21).*

Odrediti tačke ekvilibrijuma (fiksne tačke), eventualne tačke ekvilibrijuma, tačke minimalnog perioda dva i eventualno periodične tačke minimalnog perioda dva, kao i odgovarajuće periodične orbite sljedećih preslikavanja (1.3.3-1.3.7).

1.3.3 $Q(x) = x^2 - \frac{17}{20}$

1.3.4 $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

1.3.5 $f(x) = 3 - \frac{4}{x}$

1.3.6 $g(x) = \frac{2-x}{5x+2}$

1.3.7 $h(x) = |2 - 3x|$

1.3.8 *Dokazati Teorem 1.3.2.*

1.3.3 Pojam stabilnosti i grafičke iteracije

Jedan od glavnih zadataka u ispitivanju diskretnih dinamičkih sistema jeste proučavanje ponašanja orbita u blizini fiksnih i periodičnih tačaka, odnosno ponašanje rješenja i periodičnih rješenja diferentne jednadžbe u okolini tačaka ekvilibrijuma. Odgovarajuća teorija koja prati to ispitivanje se naziva **teorijom stabilnosti**. Navest ćemo prvo osnovne pojmove iz teorije stabilnosti, a nakon toga bavit ćemo se kriterijima stabilnosti, za eventualne grafičke ilustracije.

1. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (1.1) se naziva* ***stabilnom****, ili* ***lokalno stabilnom,*** *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da*
$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

2. *Tačka ekvilibrijuma naziva se* ***nestabilnom*** *ako nije stabilna.*

3. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (1.1) se naziva* ***lokalnim atraktorom*** *ako postoji $\gamma > 0$ takvo da*
$$x_0 \in I \quad i \quad |x_0 - \bar{x}| < \gamma \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (1.1) se naziva* ***lokalno asimptotski stabilnom****, ili* ***sinkom****, ili atraktivnom fiksnom tačkom preslikavanja f ako je ona stabilna i ako je lokalni atraktor.*

5. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (1.1) se naziva* ***globalnim atraktorom*** na intervalu I *ako*
$$x_0 \in I \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

6. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (1.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom*** *ako je ona stabilna i ako je globalni atraktor.*

7. *Tačka ekvilibrijuma $\bar{x}$ jednadžbe (1.1) se naziva* ***odbijajućom tačkom,*** *ili* ***repelerom****, ako postoji $r > 0$ takvo da, za svako $x_0 \in I$, za koje je $0 < |x_0 - \bar{x}| < r$, postoji $N \geq 1$ tako da je*

$$|x_N - \bar{x}| \geq r.$$

Napomena 1.3.1 *Stavljajući da je*

$$y_n = x_n - \bar{x} \quad i \quad g(y) = f(\bar{x} + y) - f(\bar{x})$$

i uvrštavajući to u jednadžbu (1.1), dobijamo:

$$\begin{aligned} \bar{x} + y_{n+1} &= f(\bar{x} + y_n) \\ y_{n+1} &= f(\bar{x} + y_n) - \bar{x} = f(\bar{x} + y_n) - f(\bar{x}) = g(y_n) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Možemo zapaziti da je 0 tačka ekvilibrijuma transformirane jednadžbe (1.22), i da ona odgovara tački ekvilibrijuma jednadžbe (1.1). Dakle, možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je 0 tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1). Rješenje

$$x_n = 0, \qquad n = 0, 1, ...$$

jednadžbe (1.1) se ponekad naziva trivijalnim rješenjem.

Napomena 1.3.2 *Razne definicije stabilnosti tačke ekvilibrijuma jednadžbe (1.1) možemo proširiti na bilo koje rješenje $\{\bar{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ jednadžbe (1.1). Na primjer, niz $\{\bar{x}_n\}$ se naziva stabilnim ako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da*

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta \;\Rightarrow\; |x_n - \bar{x}_n| < \varepsilon, \qquad \text{za sve } n \geq 0.$$

Primjer 1.3.2 *Koristeći definiciju pokazati da je tačka ekvilibrijuma $\bar{x} = 1$, jednadžbe*

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \qquad n = 0, 1, ..., \tag{1.23}$$

za $x_0 > 0$, stabilna, ali ne i sink.

Rješenje. Primijetimo da je svako rješenje $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ jednadžbe (1.23) oblika:

$$x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ...$$

Dakle, svako rješenje je periodično rješenje perioda dva. Ekvilibrijum $\bar{x} = 1$ nije lokalno asimptotski stabilan. Naime, niti jedno rješenje $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0 \neq 1$, ne može konvergirati ka ekvilibrijumu $\bar{x} = 1$, bez obzira kako blizu ekvilibrijumu izabrali početnu vrijednost x_0. S druge strane, ekvilibrijum $\bar{x} = 1$ jeste stabilan. Pa, uvjerimo se u to.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Ako je

$$x_0 > 0 \quad \text{i} \quad |x_0 - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

onda

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x_0 - 1 < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

i posebno

$$x_0 > \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Dakle,

$$|x_n - 1| = \begin{cases} |x_0 - 1|, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \left|\frac{1}{x_0} - 1\right|, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Ali

$$|x_0 - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

pa je

$$\left|\frac{1}{x_0} - 1\right| = \frac{|x_0 - 1|}{x_0} < \frac{\delta}{\frac{1}{1+\varepsilon}} = \frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}} = \varepsilon. \quad \clubsuit$$

Napomena 1.3.3 *Ispitivanje lokalne (pa i globalne) asimptotske stabilnosti, kao i nestabilnosti, tačke ekvilibrijuma diferentne jednadžbe (odnosno fiksne tačke preslikavanuja dinamičkog sistema) (1.1) može se demonstrirati putem stepenastog dijagrama (dijagram stubišta) ili dijagrama paukove mreže (dijagram paučine), kao i pomoću tzv. grafika vremenske serije.*

Primjer 1.3.3 *Koristeći dijagram paukove mreže za pronalaženje fiksnih tačaka kvadrat-nog preslikavanja $F_\alpha(x) = x^2 - \alpha$ na intervalu $[-2, 2]$ gdje je $\alpha \in [0, 2]$, a nakon toga na istom dijagramu ispitati stabilnost svih fiksnih tačaka za neke vrijednosti od α.*

Rješenje. Fiksne tačke preslikavanja F_α su rješenja jednadžbe $\overline{x}^2 - \alpha = \overline{x}$, odakle se dobiju dvije fiksne tačke: $\overline{x}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}$ i $\overline{x}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}$. Za $\alpha = 1$ imamo $\overline{x}_1 \approx -0.618$ i $\overline{x}_2 \approx 1.618$. Uzimajući početni uvjet $x_0 = 1.3$, s dijagrama je vidljivo da je $\overline{x}_2$ nestabilna, dok je $\overline{x}_1$ asimptotski stabilna fiksna tačka. $\clubsuit$

1.3.4 Linearizirana stabilnost

Prvo ćemo navesti tzv. Teorem linearizirane stabilnosti ili Test prvog izvoda, koji daje dovoljne uvjete za stabilnost i nestabilnost fiksne tačke preslikavanja dinamičkog sistema (*1.1*) koristeći vrijednost prvog izvoda preslikavanja u fiksnoj tački.

Teorem 1.3.3 ***(Teorem linearizirane stabilnosti - Test prvog izoda)*** *Neka je $\bar{x}$ fiksna tačka preslikavanja $f : I \to I$ (I je interval realnih brojeva) koje je neprekidno diferencijabilno u okolini tačke $\bar{x}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Ako je

$$\left|f'(\bar{x})\right| < 1,$$

tada je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilno (sink).

(ii) Ako je

$$\left|f'(\bar{x})\right| > 1,$$

tada je $\bar{x}$ odbijajuća fiksna tačka (repeler), tj. $\bar{x}$ je nestabilan ekvilibrijum.

Dokaz. *(i)* S obzirom na pretpostavku da je f neprekidno diferencijabilna funkcija i da je $|f'(\bar{x})| < 1$, postoje pozitivni brojevi r i ρ, $\rho < 1$, takvi da je za sve $x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$,

$$\left|f'(x)\right| \leq \rho.$$

Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti, za svaku tačku $x_0 \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$ je

$$|x_1 - \bar{x}| = |f(x_0) - f(\bar{x})| = \left|f'(\xi_1)\right| |x_0 - \bar{x}| \leq \rho |x_0 - \bar{x}|,$$

gdje je ξ_1 tačka izmedu x_0 i $\bar{x}$, stoga $\xi_1 \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$. Takoder primjećujemo da je $x_1 \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, jer je $\rho < 1$. Slično, nalazimo da je

$$|x_2 - \bar{x}| \leq \rho^2 |x_0 - \bar{x}|,$$

i općenito

$$|x_n - \bar{x}| \leq \rho^n |x_0 - \bar{x}|, \qquad n = 0, 1, ... \ .$$

Kako je (zbog $\rho < 1$) $|x_n - \bar{x}| < |x_0 - \bar{x}|$, uzimajući da je $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ i $\delta = \varepsilon$, slijedi $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ za sve $n = 0, 1, 2, ...$, tj. $\bar{x}$ je stabilan. S druge strane je $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - \bar{x}| = 0$, pa je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$, što znači da je $\bar{x}$ lokalno asimptotski stabilan ekvilibrijum. Dakle, $\bar{x}$ je sink.

(ii) Na osnovu pretpostavke teorema, postoje pozitivni brojevi r i R, $R > 1$, takvi da, za sve $x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, imamo da je

$$\left|f'(x)\right| \geq R.$$

Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti, postoji broj ξ_2 izmedu x_0 i $\bar{x}$, takav da je

$$|x_1 - \bar{x}| = |f(x_0) - f(\bar{x})| = \left|f'(\xi_2)\right| |x_0 - \bar{x}| \geq R |x_0 - \bar{x}|.$$

Na sličan način, ako $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, onda

$$|x_k - \bar{x}| \geq R^k |x_0 - \bar{x}|.$$

Na osnovu posljednje nejednakosti zaključujemo da je ekvilibrijum $\bar{x}$ repeler. ■

Nažalost, kada je

$$\left|f'(\bar{x})\right| = 1,$$

Teorem linearizirane stabilnosti ne daje nikakve indicije u vezi sa stabilnošću ekvilibrijuma $\bar{x}$. U tom slučaju potrebna su dodatna ispitivanja koja se odnose na drugi, odnosno treći izvod, o čemu će posebno biti riječi nešto kasnije.

Definicija 1.3.2 *Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidno diferencijabilna funkcija, a $\bar{x}$ neka je tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1).*

1. *$\bar{x}$ se naziva* ***hiperboličnom fiksnom tačkom*** *ako je*
$$\left|f'(\bar{x})\right| \neq 1.$$
2. *$\bar{x}$ se naziva* ***nehiperboličnom fiksnom tačkom*** *ako je*
$$\left|f'(\bar{x})\right| = 1.$$

Slučaj nehiperboličnog ekvilibrijuma, ne samo kod diferentnih jednadžbi prvog reda, nego i kod diferentnih jednadžbi bilo kojeg reda ili sistema diferentnih jednadžbi, specifičan je i mora se posebno razmatrati u svakom slučaju pojedinačno. Pokazuje se da je to ispitivanje vrlo komplicirano i da vrlo često, danas, ne možemo sa sigurnoćšu doći do potpunih rezultata.

Sljedeći teorem predstavlja proširenje Teorema linearizirane stabilnosti, kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 1.3.4 *Neka je I interval realnih brojeva i $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $\bar{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1), i da je, za neko $r > 0$, funkcija f neprekidno diferencijabilna na intervalu $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$. Tada vrijedi:*

(i) ako je
$$\left|f'(\bar{x})\right| < 1$$
ili
$$\left|f'(x)\right| < 1 \qquad \text{za sve } x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \setminus \{\bar{x}\},$$
ekvilibrijum $\bar{x}$ je lokalno asimptotski stabilan;

(ii) ako je
$$\left|f'(\bar{x})\right| > 1$$
ili
$$\left|f'(x)\right| > 1 \qquad \text{za sve } x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \setminus \{\bar{x}\},$$
ekvilibrijum $\bar{x}$ je repeler .

Istaknimo još jedan vrlo važan rezultat.

Teorem 1.3.5 *Razmotrimo diferentnu jednadžbu*
$$x_{n+1} = \lambda x_n + f(x_n)x_n, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.24}$$
gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$, I je interval koji sadrži 0, $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna u 0, takva da je $f(0) = 0$, i $\lambda x + f(x) \in I$ za sve $x \in I$. Vrijede sljedeće tvrdnje.

(i) Ako je $|\lambda| < 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (1.24) je lokalno asimptotski stabilno.

(ii) Ako je $|\lambda| > 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (1.24) je nestabilno.

(iii) Ako je $|\lambda| = 1$, trivijalno rješenje jednadžbe (1.24) može biti stabilno ili može biti nestabilno.

Dokaz. *(i)* Pretpostavimo da je $|\lambda| < 1$. Neka je $\varepsilon > 0$ takvo da je $|\lambda| + \varepsilon < 1$. Kako je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, postoji $\delta > 0$ takvo da $|x| < \delta$ implicira $|f(x)| < \varepsilon$. Da bismo dokazali tvrdnju teorema, dovoljno je pokazati da $|x_0| < \delta$ implicira

$$|x_n| \le (|\lambda| + \varepsilon)^n |x_0|, \qquad \text{za sve } n \ge 0.$$

Gornju nejednakost dokazat ćemo primjenom principa matematičke indukcije.

Za $n = 0$ nejednakost je tačna. Pretpostavimo da je tačna za neko $n \ge 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}| &= |\lambda x_n + f(x_n)x_n| \\
&\le (|\lambda| + |f(x_n)|)\,|x_n| \\
&\le (|\lambda| + \varepsilon)\,(|\lambda| + \varepsilon)^n\,|x_0| \\
&= (|\lambda| + \varepsilon)^{n+1}\,|x_0|\,.
\end{aligned}$$

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je data nejednakost tačna za sve $n \ge 0$. Dakle, trivijalno rješenje je lokalno asimptotski stabilno.

(ii) Pretpostavimo da je $|\lambda| > 1$ i da je trivijalno rješenje jednaždbe (*1.24*) stabilno. Izaberimo $\varepsilon > 0$ takvo da je $\varepsilon < |\lambda| - 1$. Onda postoje δ_1, δ_2, $0 < \delta_1 < \delta_2$, takvi da

$$|x| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

i

$$|x_0| < \delta_2 \Rightarrow |x_n| < \delta_1, \qquad \text{za sve } n \ge 0.$$

Neka je $0 < |x_0| < \delta_2$. Tada, za sve $n \ge 0$, imamo

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}| &= |\lambda x_n + f(x_n)x_n| \\
&\ge |\lambda|\,|x_n| - |f(x_n)|\,|x_n| \\
&= (|\lambda| - |f(x_n)|)\,|x_n| \\
&> (|\lambda| - \varepsilon)\,|x_n|\,.
\end{aligned}$$

Dakle, za $|\lambda| - \varepsilon > 1$, slijedi $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je trivijalno rješanje jednadžbe (*1.24*) stabilno. Stoga je trivijalno rješenje jednadžbe (*1.24*) nestabilno.

(iii) Dokaz ovog dijela teorema demonstrirat ćemo pomoću sljedeća dva primjera. ■

Primjer 1.3.4 *Neka je $x_0 \in [0,1]$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \qquad n = 0, 1, \dots \quad . \tag{1.25}$$

Nula ekvilibrijum jednadžbe (1.25) je sink. Dokazati.

Rješenje. Ovdje je $\lambda = 1$, $f(x) = -x$, $I = [0, 1]$. Ako je $x_0 = 0$, onda je $x_n \equiv 0$ za sve $n \geq 0$. Ako je $x_0 = 1$, opet je $x_n \equiv 0$ za sve $n \geq 1$. Konačno je, za $0 < x_0 < 1$,

$$0 < x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n.$$

Zato je $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, za neko $l \in [0, 1)$. Kako je $l = l - l^2$, slijedi $l = 0$. Dakle, svako rješenje, s početnim uvjetom $0 < x_0 < 1$, monotono opada ka nuli. ♣

Primjer 1.3.5 *Neka $x_0 \in [0, \infty)$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2, \qquad n = 0, 1, ... \quad . \tag{1.26}$$

Nula ekvilibrijum jednadžbe (1.26) je repeler. Dokazati.

Rješenje. Ovdje je $\lambda = 1$, $f(x) = x$, $I = [0, \infty)$. Ako je $x_0 > 0$, onda je

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 > x_n,$$

pa je ili $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, ili $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, za neki pozitivan realan broj l. Ako bi takav broj l zaista postojao, imali bismo da je $l = l + l^2$, što je nemoguće.

Zbog toga primjećujemo da rješenje $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ monotono divergira ka ∞, dakle, nula ekvilibrijum je repeler. ♣

Navedimo još nekoliko karakterističnih diferentnih jednadžbi.

Primjer 1.3.6 *Nelinearnu diferentnu jednadžbu*

$$N_{n+1} = N_n \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_n}{K}\right)\right\}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.27}$$

mnogi smatraju diskretnim analogonom logističke diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{1.28}$$

i to je razlog zašto se jednadžba (1.27) naziva ***logističkom diferentnom jednadžbom****. Ovdje N_n označava gustinu pojedine populacije u n-toj generaciji. Konstanta r je koeficijent brzine rasta populacije, a konstanta K predstavlja nivo zasićenja. Ispitajmo lokalnu stabilnost jednadžbe (1.27) za $r > 0$, $K > 0$ i uz pretpostavku da je početni uvjet proizvoljna pozitivna konstanta.*

Rješenje. $\overline{N} = K$ je jedina pozitivna tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.27). Neka je $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija definirana sa

$$f(x) = x \exp\left\{r\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right\}.$$

Pokazuje se da je

$$f'(x) = \left(1 - \frac{rx}{K}\right) \exp\left\{r\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right\}.$$

Zbog toga je $f'(K) = 1 - r$, pa na osnovu teorema linearizirane stabilnosti slijedi da je K sink za $0 < r < 2$, a za $2 < r$ je repeler. ♣

Drugi diskretan analogon logističke diferencijalne jednaždbe (1.28) je

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{h} = rN_n\left(1 - \frac{N_n}{K}\right), \qquad n = 0, 1, ..., \quad ♣ \tag{1.29}$$

gdje je h korak diskretizacije.

Ukoliko uvedemo smjene:

$$N_n = \left(1 + \frac{1}{rh}\right)Kx_n \qquad \text{i} \qquad a = 1 + rh,$$

jednaždba (1.29) svodi se na jednadžbu

$$x_{n+1} = ax_n\left(1 - x_n\right), \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.30}$$

koja se obično naziva *logističkom jednadžbom.*

Jasno je da bismo, ukoliko želimo nenegativna rješenja, trebali početnu vrijednost x_0 birati iz $[0, 1]$. Stavimo

$$f(x) = ax(1 - x) \qquad \text{za} \qquad x \in [0, 1].$$

Tada je

$$f'(x) = a - 2ax,$$
$$f''(x) = -2a < 0.$$

Dakle, f ima lokalni maksimum u $x_M = \frac{1}{2}$. Kako je $f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$, to da bismo imali $f : [0, 1] \to [0, 1]$, moramo nametnuti uvjet da je $0 < a \leq 4$.

Primjer 1.3.7 *Ispitati lokalnu stabilnost tačaka ekvilibrijuma logističke jednadžbe (1.30), za $a \in (0, 4]$ i $x_0 \in [0, 1]$.*

Rješenje. Uočimo prvo da je $\bar{x} = 0$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.30). Jednadžba (1.30) će imati pozitivan ekvilibrijum ako i samo ako jednadžba

$$ax(1 - x) = x$$

ima pozitivno rješenje, tj. ako i samo ako je $a > 1$. U ovom slučaju jedini pozitivni ekvilibrijum je $\bar{x} = \frac{a-1}{a}$.

Razmotrimo najprije ekvilibrijum $\bar{x} = 0$. Kako je $f'(0) = a$, to na osnovu Teorema linearizirane stabilnosti slijedi da je, za $0 < a < 1$, ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ sink, odnosno repeler za $1 < a \leq 4$.

Neka je, dalje, $1 < a \leq 4$. Ispitajmo stabilnost ekvilibrijuma $\bar{x} = \frac{a-1}{a}$. Kako je

$$f'(\frac{a-1}{a}) = a - 2a\frac{a-1}{a} = 2 - a,$$

opet, na osnovu Teorema linearizirane stabilnosti, slijedi da je, za $1 < a < 3$, ekvilibrijum $\bar{x} = \frac{a-1}{a}$ sink, odnosno, za $3 < a \leq 4$, repeler. ♣

Primjer 1.3.8 *Neka je $x_0 \in [0, \infty)$ i $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma jednadžbe (**Beverton-Holtova** ili **Pielouova jednadžba**)*

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}, \qquad n = 0, 1, ... \ . \tag{1.31}$$

Rješenje. Kako je

$$f(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}, \qquad x \geq 0,$$

tačke ekvilibrijuma tražimo rješavajući jednadžbu

$$\bar{x} = \frac{\alpha \bar{x}}{1 + \beta \bar{x}},$$

odakle slijedi da su

$$\bar{x} = 0 \qquad \text{i} \qquad \bar{x} = \frac{\alpha - 1}{\beta},$$

tražene tačke ekvilibrijuma, pri čemu pozitivni ekvilibrijum $\bar{x} = \frac{\alpha-1}{\beta}$ postoji ako je $\alpha > 1$. Budući da je izvod funkcije f dat sa

$$f'(x) = \frac{\alpha}{(1 + \beta x)^2},$$

potražimo li apsolutnu vrijednost prvog izvoda u tačkama ekvilibrijuma, dobijamo

$$\left| f'(0) \right| = \alpha,$$

i

$$\left| f'(\frac{\alpha - 1}{\beta}) \right| = \frac{1}{\alpha}.$$

S obzirom na Teorem linearizirane stabilnosti slijedi:

(a) Ekvilibrijum $\bar{x} = 0$ je sink za $\alpha < 1$, odnosno repeler za $\alpha > 1$.
(b) Ekvilibrijum $\bar{x} = \frac{\alpha-1}{\beta}$ je sink za $\alpha > 1$.

Ako je $\alpha = 1$, onda jednadžba (1.31) postaje

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \beta x_n},$$

i ima samo jednu tačku ekvilibrijuma $\bar{x} = 0$. Kako je

$$\left| f'(0) \right| = \alpha = 1,$$

nemamo odgovor na pitanje stabilnosti ekvilibrijuma, jer nam Teorem o lineariziranoj stabilnosti ne nudi nikakva rješenja. Odgovor se, međutim, može naći, jednostavnim rezonovanjem, iz nejednakosti $x_{n+1} < x_n$. ♣

1.3.5 Stabilnost nehiperboličkog ekvilibrijuma

Vidjeli smo da Teorem linearizirane stabilnosti daje odgovor o prirodi stabilnosti hiperboličkog ekvilibrijuma $\overline{x}$ diferentne jednadžbe (1.1), ali da ne daje nikakve informacije o stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma, to jest u slučaju kada je

$$\left|f'(\overline{x})\right| = 1.$$

Tom pitanju će sada biti posvećena posebna pažnja. Razmatraćemo dva kvalitativno različita slučaja: $f'(\overline{x}) = 1$ i $f'(\overline{x}) = -1$.

1. Slučaj: $f'(\overline{x}) = 1$

Uvedimo prvo pojam polustabilnosti ekvilibrijuma.

Definicija 1.3.3 *Tačku ekvilibrijuma $\overline{x}$ nazivamo* ***polustabilnom odozdo*** *ako postoji broj $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (1.1) sa $\overline{x} - r < x_0 < \overline{x}$, tada je taj niz monotono strogo rastući i konvergira ka $\overline{x}$.

ii) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (1.1) sa $\overline{x} < x_0 < \overline{x} + r$, tada postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$\overline{x} < x_0 < ... < x_{N-1} < \overline{x} + r \leq x_N.$$

Definicija 1.3.4 *Tačku ekvilibrijuma $\overline{x}$ nazivamo* ***polustabilnom odozgo*** *ako postoji broj $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (1.1) sa $\overline{x} - r < x_0 < \overline{x}$, tada postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$x_N \leq \overline{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \overline{x}.$$

ii) Ako je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ rješenje jednadžbe (1.1) sa $\overline{x} < x_0 < \overline{x} + r$, tada je taj niz monotono strogo opadajući i konvergira ka $\overline{x}$.

Definicija 1.3.5 *Tačku ekvilibrijuma $\overline{x}$ nazivamo* ***polustabilnom*** *ako je ona polustabilna odozdo ili polustabilna odozgo.*

Navešćemo sada kriterij za ispitivanje polustabilnosti tačke ekvilibrijuma $\overline{x}$ jednadžbe (1.1), u slučaju kada je $f''(\overline{x}) \neq 0$, tzv. Test drugog izvoda.

Teorem 1.3.6 ***(Test drugog izvoda)*** *Pretpostavimo da je $f \in C^2[I, I]$, $f'(\overline{x}) = 1$ i $f''(\overline{x}) \neq 0$. Tada je ekvilibrijum $\overline{x}$ jednadžbe (1.1) polustabilan. Preciznije,*

i) ako je $f''(\overline{x}) < 0$, tada je ekvilibrijum $\overline{x}$ jednadžbe (1.1) polustabilan odozgo;

ii) ako je $f''(\overline{x}) > 0$, tada je ekvilibrijum $\overline{x}$ jednadžbe (1.1) polustabilan odozdo.

Dokaz. *i)* Pretpostavimo da je $f''(\overline{x}) < 0$. Budući da je $f \in C^2[I, I]$, slijedi da postoji neko $r > 0$ takav da, ako je $0 < |x - \overline{x}| < r$, tada vrijedi

$$f'(x) > 1 \text{ ako je } \overline{x} - r < x < \overline{x}$$

i

$$0 < f'(x) < 1 \text{ ako je } \overline{x} < x < \overline{x} + r.$$

Vidimo, dakle, da je f rastuća funkcija na intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$.

Dokažimo sada da je $\overline{x}$ jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, to jest da postoji $\widetilde{x} \in (\overline{x} - r, \overline{x} + r)$, $\widetilde{x} \neq \overline{x}$ i $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.

Ako je $\overline{x} - r < \widetilde{x} < \overline{x}$, tada postoji $\xi \in (\widetilde{x}, \overline{x})$ takav da je (zbog $f'(\xi) > 1$)

$$\widetilde{x} = \widetilde{x} - \overline{x} + \overline{x} = f(\widetilde{x}) - f(\overline{x}) + \overline{x} = f'(\xi)(\widetilde{x} - \overline{x}) + \overline{x} < (\widetilde{x} - \overline{x}) + \overline{x} = \widetilde{x},$$

što je nemoguće.

Ako je $\overline{x} < \widetilde{x} < \overline{x} + r$, tada postoji $\xi \in (\widetilde{x}, \overline{x})$ takav da je (zbog $f'(\xi) < 1$)

$$\widetilde{x} = \widetilde{x} - \overline{x} + \overline{x} = f(\widetilde{x}) - f(\overline{x}) + \overline{x} = f'(\xi)(\widetilde{x} - \overline{x}) + \overline{x} < (\widetilde{x} - \overline{x}) + \overline{x} = \widetilde{x},$$

što je, takoder, nemoguće.

Prema tome, $\overline{x}$ je jedina tačka ekvilibrijuma od f u intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$.

Pretpostavimo da je $\overline{x} - r < x_0 < \overline{x}$. Tada postoji $\eta \in (x_0, \overline{x})$ takav da je (zbog $f'(\eta) > 1$)

$$\begin{aligned} x_1 = f(x_0) &= f(x_0) - \overline{x} + \overline{x} = f(x_0) - f(\overline{x}) + \overline{x} \\ &= f'(\eta)(x_0 - \overline{x}) + \overline{x} < (x_0 - \overline{x}) + \overline{x} = x_0. \end{aligned}$$

Kako je $\overline{x}$ jedina tačka ekvilibrijuma od f u intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$, postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$x_N \leq \overline{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \overline{x}.$$

Neka je sada $\overline{x} < x_0 < \overline{x} + r$. Budući da je f rastuća funkcija na intervalu $(\overline{x}, \overline{x} + r)$, vrijedi $\overline{x} = f(\overline{x}) < f(x_0) = x_1$. Takoder, postoji $\eta \in (x_0, \overline{x})$ takav da je (zbog $f'(\eta) < 1$)

$$\begin{aligned} x_1 = f(x_0) &= f(x_0) - \overline{x} + \overline{x} = f(x_0) - f(\overline{x}) + \overline{x} \\ &= f'(\eta)(x_0 - \overline{x}) + \overline{x} < (x_0 - \overline{x}) + \overline{x} = x_0. \end{aligned}$$

Dakle, pošto je $\overline{x}$ jedina tačka ekvilibrijuma od f u intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$, zaključujemo da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo opadajući i i konvergira ka $\overline{x}$, što znači da je ekvilibrijum $\overline{x}$ jednadžbe (1.1) polustabilan odozgo.

ii) Dokaz za slučaj $f''(\overline{x}) > 0$ je analogan dokazu pod *i)*. ■

Primjer 1.3.9 *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} \qquad (n = 0, 1, ...), \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Rješenje. Data jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\overline{x} = 0$. Kako je $f(x) = \frac{x}{1+x}$, imamo $f'(0) = 1$ i $f''(0) = -2 < 0$, pa prema Teoremu 1.3.6, $\overline{x} = 0$ je polustabilan odozgo. ♣

Sljedeći teorem nam daje kriterij polustabilnosti tačke ekvilibrijuma $\overline{x}$ jednadžbe (1.1), u slučaju kada je $f''(\overline{x}) = 0$, tzv. Test trećeg izvoda.

Teorem 1.3.7 ***(Test trećeg izvoda)*** *Pretpostavimo da je $f \in C^3[I, I]$, $f'(\overline{x}) = 1$ i $f''(\overline{x}) = 0$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*
i) Ako je $f'''(\overline{x}) < 0$, tada je $\overline{x}$ lokalno asimptotski stabilan (sink).
ii) Ako je $f'''(\overline{x}) > 0$, tada je $\overline{x}$ repeler.

Dokaz. *i)* Pretpostavimo da je $f'''(\overline{x}) < 0$.
Tada postoji $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje:
(a) $f''(\overline{x}) > 0$ za $\overline{x} - r < x < \overline{x}$,
(b) $f''(\overline{x}) < 0$ za $\overline{x} < x < \overline{x} + r$,
(c) $0 < f'(x)$ za $\overline{x} - r < x < \overline{x} + r$.
Drugim riječima, f je rastuća funkcija na intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$.
Neka je $\overline{x} - r < x < \overline{x}$. Postoji $\xi \in (x, \overline{x})$ takav da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \overline{x})^2 \\ &= \overline{x} + (x - \overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \overline{x})^2 \\ &> \overline{x} + (x - \overline{x}) = x. \end{aligned}$$

Slično se pokazuje da, za $\overline{x} < x < \overline{x} + r$, vrijedi $f(x) < x$. Prema tome, vrijedi nejednakost

$$(f(x) - x)(x - \overline{x}) < 0 \quad \text{za sve} \quad x \in (\overline{x} - r, \overline{x} + r) \setminus \{\overline{x}\}. \tag{1.32}$$

Također, $\overline{x}$ je jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$. Sada smo u mogućnosti dokazati da je $\overline{x}$ sink.

1. Neka je $\overline{x} - r < x_0 < \overline{x}$. Tada je $x_1 = f(x_0) < f(\overline{x}) = \overline{x}$, jer je f rastuća funkcija. Zbog (1.32) i $x_0 < \overline{x}$, imamo $x_1 = f(x_0) > x_0$, odnosno

$$\overline{x} - r < x_0 < x_1 < \overline{x}.$$

Indukcijom zaključujemo da vrijedi

$$\overline{x} - r < x_0 < x_1 < ... < x_n < ... < \overline{x},$$

tako da postoji $l \in (\overline{x} - r, \overline{x}]$ takav da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo rastući i da konvergira ka l. Zbog toga l mora biti tačka ekvilibrijuma od f (dokazati!). No, kako je $\overline{x}$ jedini ekvilibrijum u $(\overline{x} - r, \overline{x}]$, to znači da niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo rastući konvergira ka $\overline{x}$.

2. Neka je $\overline{x} < x_0 < \overline{x} + r$. Analogno kao u slučaju 1. dokazuje se sada da niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ strogo opadajući konvergira ka $\overline{x}$.

ii) Pretpostavimo da je $f'''(\overline{x}) > 0$.
Tada postoji $r > 0$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $f''(\overline{x}) < 0$ za $\overline{x} - r < x < \overline{x}$,

(b) $f''(\overline{x}) > 0$ za $\overline{x} < x < \overline{x} + r$.

Neka je sada $\overline{x} - r < x < \overline{x}$. Tada postoji $\xi \in (x, \overline{x})$ takav da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \overline{x})^2 \\ &= \overline{x} + (x - \overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \overline{x})^2 \\ &< \overline{x} + (x - \overline{x}) = x. \end{aligned}$$

Analogno se pokazuje da, za $\overline{x} < x < \overline{x} + r$, vrijedi $f(x) > x$. Takoder, $\overline{x}$ je jedina tačka ekvilibrijuma funkcije f u intervalu $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$. Sada smo u mogućnosti dokazati da je $\overline{x}$ repeler.

1.) Neka je $\overline{x} - r < x_0 < \overline{x}$. Tada je $x_1 = f(x_0) < x_0 < \overline{x}$. Budući da je $\overline{x}$ jedini ekvilibrijum u $(\overline{x} - r, \overline{x} + r)$, slijedi da postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$x_N < \overline{x} - r < x_{N-1} < ... < x_0 < \overline{x}.$$

2.) U slučaju da je $\overline{x} < x_0 < \overline{x} + r$, slično se dokazuje da postoji prirodni broj $N \geq 1$ takav da je

$$\overline{x} < x_0 < ... < x_{N-1} < \overline{x} + r < x_N.$$

■

Primjer 1.3.10 *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n \quad (n = 0, 1, ...), \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Rješenje. Data jednadžba ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $\overline{x} = 0$. Kako je $f(x) = x^3 + x$, imamo $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6 > 0$, pa prema Teoremu 1.3.7, $\overline{x} = 0$ je nestabilna. Preciznije, $\overline{x} = 0$ je repeler.

U ovom slučaju karakter stabilnosti tačke ekvilibrijuma mogli smo ustanoviti i elementarnim putem. Naime, ako je $x_0 > 0$, tada je $x_1 = x_0^3 + x_0 > x_0$. Koristeći indukciju, može se pokazati da je $x_n > x_{n-1}$ za $n = 1, 2, ...$. Dakle, niz (x_n) konvergira ka tački ekvilibrijuma ili divergira ka $+\infty$. No, kako je $\overline{x} = 0$ jedina tačka ekvilibrijuma, zaključujemo da $\{x_n\}$ divergira ka $+\infty$. Ako sada pretpostavimo da je $x_0 < 0$, tada je $x_1 = x_0^3 + x_0 < x_0$, odnosno indukcijom se dobije da je $x_n < x_{n-1}$

za $n = 1, 2, \ldots$. Ovo implicira da $\{x_n\}$ divergira ka $-\infty$. Prema tome, ekvilibrijum $\overline{x} = 0$ je repeler. ♣

No, može se dobiti i općenitiji rezultat od prethodna dva teorema, tzv. Test izvoda višeg reda.

Teorem 1.3.8 ***(Test izvoda višeg reda)*** *Neka je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1). Pretpostavimo da je $f \in C^k[I, I]$ $(k \geq 2)$ i da je*

$$f'(\overline{x}) = 1, \qquad f^{(j)}(\overline{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, ..., k-1), \qquad f^{(k)}(\overline{x}) \neq 0.$$

i) Ako je k paran broj, tada je $\overline{x}$:
a) polustabilan odozdo ako je $f^{(k)}(\overline{x}) > 0$,
b) polustabilan odozgo ako je $f^{(k)}(\overline{x}) < 0$.
ii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\overline{x}) > 0$, tada je $\overline{x}$ nestabilan (repeler).
iii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\overline{x}) < 0$, tada je $\overline{x}$ lokalno asimptotski stabilan.

Dokaz. *i)* Pretpostavimo da je k paran broj. Prema Taylorovom teoremu, za dovoljno malo h, postoji $\xi \in (\overline{x}, \overline{x} + h)$ tako da je

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(\overline{x})}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}h^k. \quad (1.33)$$

Ako je $f^{(k)}(\overline{x}) > 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije $f^{(k)}$, za dovoljno malo h, vrijedi $f^{(k)}(\xi) > 0$. Zbog toga iz (1.33) slijedi

$$f(\overline{x} + h) = \overline{x} + h + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}h^k > \overline{x} + h.$$

Analogno

$$f(\overline{x} - h) = \overline{x} - h + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}h^k > \overline{x} - h.$$

odavde slijedi $f(\overline{x} + h) > \overline{x} + h$ i $\overline{x} - h < f(\overline{x} - h) < \overline{x}$, čime je dokazana polustabilnost odozdo. Analogno se dokazuje polustabilnost odozgo.

Dokazi za slučajeve *ii)* i *iii)* slično se izvode kao i u slučaju *i)*. ■

Primjer 1.3.11 *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\overline{x} = 0$ diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - x_n^4\right) + 5x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Rješenje. Ovdje je $f(x) = x\left(1 - x^4\right) + 5x^6$ sa $f'(0) = 1$, $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ i $f^{(5)}(0) = -120 < 0$. Prema Teoremu 1.3.8, $\overline{x} = 0$ je asimptotski stabilan ekvilibrijum. ♣

Primjer 1.3.12 *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma $\overline{x} = 0$ diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = x_n e^{-x_n^k} \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$

gdje su $x_n \in \mathbb{R}$, a k prirodni broj.

Rješenje. Neka je $f(x) = xe^{-x^k}$. Imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 + \left(-x^k\right) + \frac{1}{2!}\left(-x^k\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-x^k\right)^3 + ...\right) \\ &= x - x^{k+1} + \frac{1}{2!}x^{2k+1} - \frac{1}{3!}x^{3k+1} + ... \ . \end{aligned}$$

odavde slijedi

$$f'(0) = 1, \qquad f^{(j)}(\overline{x}) = 0 \quad (j = 2, 3, ..., k), \qquad f^{(k+1)}(\overline{x}) = -(k+1)! < 0.$$

Prema Teoremu 1.3.8 vrijedi:

a) ako je k paran, onda je ekvilibrijum $\overline{x} = 0$ asimptotski stabilan,

b) ako je k neparan, onda je ekvilibrijum $\overline{x} = 0$ nestabilan (polustabilan odozgo).

♣

2. Slučaj: $f'(\overline{x}) = -1$

Neka je $g : I \to I$ definirana sa $g(x) = f(f(x))$. Promatrajmo diferentnu jednadžbu

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, ... \ . \tag{1.34}$$

Lema 1.3.1 *Pretpostavimo da je $g \in C(I)$.*

i) Ako je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1), tada je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma i jednadžbe (1.34).

ii) Ako je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1) lokalno asimptotski stabilna u odnosu na jednadžbu (1.34), onda je ona lokalno asimptotski stabilna i u odnosu na jednadžbu (1.1).

iii) Ako je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1) repeler u odnosu na jednadžbu (1.34), onda je ona repeler i u odnosu na jednadžbu (1.1).

Dokaz. Neka je x_n rješenje jednadžbe (1.1), a y_n rješenje jednadžbe (1.34). Ubuduće ćemo pretpostaviti da je $x_0 = y_0$. Zbog toga je $y_n = x_{2n}$.

i) Jednostavno se vidi da je

$$g(\overline{x}) = f(f(\overline{x})) = f(\overline{x}) = \overline{x}.$$

ii) Pretpostavimo da je $\overline{x}$ stabilan u odnosu na jednadžbu (1.34). Tada, za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, postoji $\delta_1(\varepsilon_1) > 0$ takav da $|y_0 - \overline{x}| = |x_0 - \overline{x}| < \delta_1$ implicira

$|y_n - \overline{x}| = |x_{2n} - \overline{x}| < \varepsilon_1$ za sve $n \geq 0$. Zbog neprekidnosti funkcije f u tački $\overline{x}$, imamo da, za proizvoljno $\varepsilon_2 > 0$, postoji $\delta_2(\varepsilon_2) > 0$ takav da $|x - \overline{x}| < \delta_2$ implicira $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon_2$. Izaberemo li sada ε_1 da bude $\varepsilon_1 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$, tada postoji $\delta_1(\delta_2(\varepsilon_2)) > 0$ tako da $|x_0 - \overline{x}| < \delta_1$ implicira $|f(x_{2n}) - f(\overline{x})| = |x_{2n+1} - \overline{x}| < \varepsilon_2$ za sve $n \geq 0$. Otuda, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, ako uzmemo da je $\delta = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_1(\delta_2(\varepsilon)))$, imamo da $|x_0 - \overline{x}| < \delta$ implicira $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$ za sve $n \geq 0$. To znači da je $\overline{x}$ stabilan u odnosu na jednadžbu (1.1).

Pretpostavimo da postoji $\eta > 0$ tako da $|y_0 - \overline{x}| < \eta$ implicira $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{x}$. Tada, za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, postoji prirodni broj $N_1(\varepsilon_1) > 0$, takav da je $|y_n - \overline{x}| = |x_{2n} - \overline{x}| < \varepsilon_1$ za sve $n \geq N_1$. Iz neprekidnosti funkcije f u tački $\overline{x}$, imamo da, za proizvoljno $\varepsilon_2 > 0$, postoji $\delta(\varepsilon_2) > 0$ takav da $|x - \overline{x}| < \delta$ implicira $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon_2$. Izaberimo sada ε_1 da bude $\varepsilon_1 = \delta(\varepsilon_2) > 0$. Tada postoji $N_1(\delta(\varepsilon_2)) > 0$ takav da $|f(x_{2n}) - f(\overline{x})| = |x_{2n+1} - \overline{x}| < \varepsilon_2$ za sve $n \geq N_1$. Otuda, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, ako uzmemo da je $N = \min(N_1(\varepsilon), N_1(\delta(\varepsilon)))$, imamo da je $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$ za sve $n \geq N$. Dakle, $\overline{x}$ je asimptotski stabilan u odnosu na jednadžbu (1.1).

iii) Pretpostavimo da je $\overline{x}$ nestabilan, to jest repeler, u odnosu na jednadžbu (1.34). Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da, za proizvoljno $\delta > 0$, postoje x_0 ($|x_0 - \overline{x}| < \delta$) i $n \geq 0$ takvi da je $|y_n - x_0| \geq \varepsilon$. Kako je $y_n = x_{2n}$, zaključujemo da je $\overline{x}$ nestabilan, to jest repeler, u odnosu na jednadžbu (1.1). ■

U izlaganju koje slijedi koristit ćemo pojam tzv. *Schwarzianovog izvoda* ili *Shwarziana.*

Definicija 1.3.6 *Za dato $x \in I$, pri čemu je $f'(x) \neq 0$, izraz*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

nazivamo ***Schwarzianovim izvodom*** *ili* ***Shwarzianom****.*

Uočimo da, ako je $f'(\overline{x}) = -1$, vrijedi

$$Sf(\overline{x}) = -f'''(\overline{x}) - \frac{3}{2}\left(f''(\overline{x})\right)^2.$$

Sada ćemo navesti jedan važan kriterij za ispitivanje karaktera stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma u slučaju kada je $f'(\overline{x}) = -1$.

Teorem 1.3.9 *Neka je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1) i pretpostavimo da je $f'(\overline{x}) = -1$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

i) Ako je $Sf(\overline{x}) < 0$, tada je $\overline{x}$ lokalno asimptotski stabilan.

ii) Ako je $Sf(\overline{x}) > 0$, tada je $\overline{x}$ nestabilan (preciznije, $\overline{x}$ je repeler).

Dokaz. *i)* Prema Lemi 1.3.1, $\overline{x}$ je tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.34). Ako je $x \in I$, sigurno je da vrijedi

$$g'(x) = f'(f(x))\, f'(x),$$

pa je

$$g'(\overline{x}) = f'(f(\overline{x}))\, f'(\overline{x}) = f'(\overline{x})\, f'(\overline{x}) = (-1)(-1) = 1.$$

Takoder, vrijedi

$$g''(x) = f''(f(x)) \left[f'(x)\right]^2 + f'(f(x))\, f''(x),$$

odakle je

$$\begin{aligned} g''(\overline{x}) &= f''(f(\overline{x})) \left[f'(\overline{x})\right]^2 + f'(f(\overline{x}))\, f''(\overline{x}) \\ &= f''(\overline{x})(-1)^2 + f'(\overline{x})\, f''(\overline{x}) \\ &= f''(\overline{x}) - f''(\overline{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ostatak dokaza slijedi primjenom Teorema 1.3.8, s tim što treba da odredimo i $g'''(\overline{x})$. Naime, kako je

$$g'''(x) = f'''(f(x)) \left[f'(x)\right]^3 + 3f''(f(x))\, f'(x)\, f''(x) + f'(f(x))\, f'''(x),$$

vrijedi

$$\begin{aligned} g'''(\overline{x}) &= f'''(f(\overline{x})) \left[f'(\overline{x})\right]^3 + 3f''(f(\overline{x}))\, f'(\overline{x})\, f''(\overline{x}) + f'(f(\overline{x}))\, f'''(\overline{x}) \\ &= f'''(\overline{x})(-1)^3 + 3f''(\overline{x})(-1)\, f''(\overline{x}) + f'(\overline{x})\, f'''(\overline{x}) \\ &= -2f'''(\overline{x}) - 3\left[f''(\overline{x})\right]^2. \end{aligned}$$

■

Primjer 1.3.13 *Ispitati karakter stabilnosti tačaka ekvilibrijuma diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = -x_n^3 + 2x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \; .$$

Rješenje. Data jednadžba ima tri tačke ekvilibrijuma: $0, -1$ i 1. Pri tome je

$$f(x) = -x^3 + 2x, \quad f'(0) = 2, \quad f'(\pm 1) = -1, \quad f''(\pm 1) = \mp 6, \quad f'''(\pm 1) = -6.$$

Iz Teorema linearizirane stabilnosti slijedi da je ekvilibrijum $\overline{x} = 0$ nestabilan (repeler).

Kako je $Sf(\pm 1) = -48 < 0$, to su obje tačke ekvilibrijuma, i -1 i 1, prema Teoremu 1.3.9, lokalno asimptotski stabilne. ♣

Slično Teoremu 1.3.8 i ovdje postoji općenitiji kriterij za odredivanje karaktera stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma.

Teorem 1.3.10 *Neka je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (1.1). Pretpostavimo da je $f \in C^{2k-1}[I,I]$ $(k \geq 1)$ i da je*

$$f'(\overline{x}) = -1, \qquad f^{(j)}(\overline{x}) = 0 \quad (j = 2, 3, ..., k-1), \qquad f^{(k)}(\overline{x}) \neq 0.$$

i) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\overline{x}) > 0$, tada je $\overline{x}$ asimptotski stabilan.
ii) Ako je k neparan i $f^{(k)}(\overline{x}) < 0$, tada je $\overline{x}$ nestabilan (repeler).
iii) Pretpostavimo da je k paran i da postoji cio broj $l < k$ tako da je

$$f^{(j)}(\overline{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, ..., 2l-3), \qquad f^{(2l-1)}(\overline{x}) \neq 0.$$

a) Ako je $f^{(2l-1)}(\overline{x}) > 0$, tada je $\overline{x}$ asimptotski stabilan.
b) Ako je $f^{(2l-1)}(\overline{x}) < 0$, tada je $\overline{x}$ nestabilan (repeler).
iv) Pretpostavimo da je k paran i da je

$$f^{(j)}(\overline{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, ..., 2k-3).$$

a) Ako je $\frac{k}{2}\left(\frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}\right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\overline{x})}{(2k-1)!} > 0$, tada je $\overline{x}$ asimptotski stabilan.
b) Ako je $\frac{k}{2}\left(\frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}\right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\overline{x})}{(2k-1)!} < 0$, tada je $\overline{x}$ nestabilan (repeler).

Dokaz. Primjenom Taylorovog teorema, imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{f''(\overline{x})}{2!}(x-\overline{x})^2 \\
&\quad + ... + \frac{f^{(2k-1)}(\overline{x})}{(2k-1)!}(x-\overline{x})^{2k-1} + o\left((x-\overline{x})^{2k-1}\right) \\
&= \overline{x} - (x-\overline{x}) + \sum_{i=k}^{2k-1} a_i (x-\overline{x})^i + o\left((x-\overline{x})^{2k-1}\right),
\end{aligned}$$

gdje je $a_k = \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}$. Dalje je

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(f(x)) \\
&= \overline{x} - (f(x)-\overline{x}) + \sum_{i=k}^{2k-1} a_i (f(x)-\overline{x})^i + o\left((f(x)-\overline{x})^{2k-1}\right) \\
&= \overline{x} - \left\{-(x-\overline{x}) + \sum_{i=k}^{2k-1} a_i (x-\overline{x})^i\right\} \\
&+ \sum_{i=k}^{2k-1}\left(a_i\left\{-(x-\overline{x}) + \sum_{j=k}^{2k-1} a_j (x-\overline{x})^j\right\}^i\right) + o\left(\left((x-\overline{x})^{2k-1}\right)\right) \\
&= x + \sum_{i=k}^{2k-1}\left(a_i\left\{-1 + (-1)^i\right\}(x-\overline{x})^i\right) \\
&+ k a_k^2 (-1)^{k-1} (x-\overline{x})^{2k-1} + o\left((x-\overline{x})^{2k-1}\right).
\end{aligned}$$

Ako je k neparan, onda je

$$g(x) = x - 2a_k (x - \overline{x})^k + o\left((x - \overline{x})^k\right).$$

Dakle, imamo

$$g'(\overline{x}) = 1, \quad g^{(i)}(\overline{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, ..., k-1), \quad g^{(k)}(\overline{x}) = -2f^{(k)}(\overline{x}) \neq 0.$$

Iz Teorema 1.3.8 i Leme 1.3.1 slijedi tačnost tvrdnji *i)* i *ii)*.
Pretpostavimo da je k paran. Tada je

$$g(x) = x - 2\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} a_{k+2i-1} (x - \overline{x})^{k+2i-1} - k a_k^2 (x - \overline{x})^{2k-1} + o\left((x - \overline{x})^{2k-1}\right).$$

U slučaju *iii)* imamo

$$g(x) = x - 2a_{2l-1} (x - \overline{x})^{2l-1} + o\left((x - \overline{x})^{2l-1}\right).$$

Dakle,

$$g'(\overline{x}) = 1, \quad g^{(i)}(\overline{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, ..., 2l-2), \quad g^{(2l-1)}(\overline{x}) = -2f^{(2l-1)}(\overline{x}).$$

Iz Teorema 1.3.8 i Leme 1.3.1 slijedi tačnost tvrdnje *iii)*. U slučaju *iv)* imamo

$$g(x) = x - \left(2a_{2k-1} + k a_k^2\right) (x - \overline{x})^{2k-1} + o\left((x - \overline{x})^{2k-1}\right).$$

Prema tome, dobija se

$$\begin{aligned} g'(\overline{x}) = 1, \qquad g^{(i)}(\overline{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, ..., 2k-2), \\ g^{(2l-1)}(\overline{x}) = -2(2k-1)!\left(\frac{k}{2} a_k^2 + a_{2k-1}\right). \end{aligned}$$

Iz Teorema 1.3.8 i Leme 1.3.1 slijedi tačnost tvrdnje *iv)*. ■

Primjer 1.3.14 *Ispitati prirodu stabilnosti tačke ekvilibrijuma* $\overline{x} = 0$ *diferentnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} &i) \quad x_{n+1} = -x_n + x_n^4 + x_n^5 - 3x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, ..., \\ &ii) \quad x_{n+1} = -x_n + x_n^4 - x_n^5 - 3x_n^6, \quad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Rješenje. i) Ovdje je $f(x) = -x + x^4 + x^5 - 3x^6$ sa $f'(0) = -1$, $f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Prema Teoremu 1.3.10 iii), zbog $l = 3$ i $f^{(5)}(0) = 120 > 0$, ekvilibrijum $\overline{x} = 0$ je asimptotski stabilan.

ii) Sada je $f(x) = -x + x^4 - x^5 - 3x^6$ sa $f'(0) = -1$, $f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Prema Teoremu 1.3.10 iii), zbog $l = 3$ i $f^{(5)}(0) = -120 < 0$, ekvilibrijum $\overline{x} = 0$ je nestabilan (repeler). ♣

1.3.6 Vježbe

1.3.9 *U zadacima (1.3.3-1.3.7) iz Vježbi 1.3.2 ispitati lokalnu stabilnost svake od fiksnih tačaka uz grafičku ilustraciju pomoću dijagrama paukove mreže i pomoću grafika vremenske serije..*

1.3.10 *Ispitati lokalnu stabilnost tačaka kevilibrijuma (uz grafičku ilustraciju) sljedećih diferentnih jednadžbi:*
(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(\pi x_n), \quad n = 0, 1, ...,$
(b) $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), \quad n = 0, 1, ...,$
(c) $x_{n+1} = e^{-x_n} - 1, \quad n = 0, 1, ...,$
(d) $x_{n+1} = x_n + \cos(x_n) - 1, \quad n = 0, 1, ...,$
(e) $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{x_n-1}, \quad n = 0, 1, ...$

1.3.11 *Sljedeća diferentna jednadžba predstavlja jedan populacioni model ptica*

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3.2x_n & za\ 0 \le x_n \le 1 \\ 0.5x_n + 2.7 & za\ x_n > 1 \end{cases}$$

gdje je x_n broj ptica u n-toj godini. Odrediti tačke ekvilibrijuma i ispitati njihovu stabilnost (uz grafičke ilustracije).

1.3.12 *Data je diferentna jednadžba*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 + p}, \quad n = 0, 1, ..., \ x_0 \neq 0, \ p > 0.$$

Ova diferentna jednadžba predstavlja Newtonov metod za numeričko rješavanje kubne jednadžbe $x^3 + px + 1$.
(a) Odrediti tačke ekvilibrijuma i periodične tačke minimalnog perioda dva date dife-rentne jednadžbe.
(b) Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma.

1.4 Stabilnost periodičnih tačaka

Imajući na umu da je periodična tačka minimalnog perioda k preslikavanja f ustvari fiksna tačka preslikavanja f^k, koristeći Teorem 1.3.6 i lančano pravilo, dobija se sljedeći kriterij stabilnosti periodične tačke.

Teorem 1.4.1 *Neka je $f \in C^1[I, I]$, a $\mathcal{O}(p) = \{p, f(p), ..., f^{k-1}(p)\}$ orbita periodične tačke minimalnog perioda k preslikavanja f. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
(i) Tačka p je lokalno aimptotski stabilna ako je

$$\left| f'(p) f'(f(p)) \cdots f'\left(f^{k-1}(p)\right) \right| < 1.$$

(ii) Tačka p je nestabilna ako je

$$\left| f'(p) f'(f(p)) \cdots f'\left(f^{k-1}(p)\right) \right| > 1.$$

Dokaz. Koristeći lančano pravilo, pokazuje se da je

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f^k(p) &= \frac{d}{dx}f\left(f^{k-1}(p)\right) = f'\left(f^{k-1}(p)\right)\frac{d}{dx}f^{k-1}(p)\\ &= f'\left(f^{k-1}(p)\right)f'\left(f^{k-2}(p)\right)\frac{d}{dx}f^{k-2}(p)\\ &= ... = f'\left(f^{k-1}(p)\right)f'\left(f^{k-2}(p)\right)\cdots f'(f(p))\,f'(p).\end{aligned}$$

■

Primjer 1.4.1 *Neka je* $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$. *Odrediti sve periodične tačke minimalnog perioda dva i njihove orbite. Ispitati stabilnost periodične tačke* $p = 1$.

Rješenje. Odredimo prvo preslikavanje f^2:

$$\begin{aligned}f^2(x) &= f\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Periodične tačke minimalnog perioda dva su rješenja jednadžbe $f^2(x) = x$, za koje je $f(x) \neq x$, tj. tačke -1 i 1 jer su $\sqrt{5} - 2$ i $-\sqrt{5} - 2$ fiksne tačke preslikavanja f. Orbita tačke $p = 1$ je $\mathcal{O}(1) = \{1, -1\}$. Budući da je $f'(x) = -x - 1$ i

$$\left|f'(1)\,f'(-1)\right| = |(-2)\cdot 0| = 0 < 1,$$

zaključujemo da je periodična tačka $p = 1$ lokalno asimptotski stabilna. ♣

Primjer 1.4.2 *Odrediti periodične tačke minimalnog perioda dva logističke diferentne jednadžbe*

$$x_{n+1} = 3.5x_n(1 - x_n)$$

i ispitati njihovu stabilnost.

Rješenje. Funkcija pridružena datoj diferentnoj jednadžbi je $f(x) = 3.5x(1 - x)$, pa su periodične tačke minimalnog perioda dva rješenja jednadžbe

$$3.5(3.5x(1 - x))(1 - 3.5x(1 - x)) = x$$

za koje je $3.5x(1 - x) \neq x$, tj. $\frac{6}{7}$ i $\frac{3}{7}$. Dakle, orbita tačke $p = \frac{3}{7}$ je $\mathcal{O}\left(\frac{3}{7}\right) = \left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right\}$, pa je

$$\left|f'\left(\frac{3}{7}\right)f'\left(\frac{6}{7}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right| = \frac{5}{4} > 1,$$

što znači da je periodična tačka $p = \frac{3}{7}$ nestabilna. ♣

1.4.1 Vježbe

1.4.1 *Tent preslikavanje T je definirano kao*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Odrediti sve periodične tačke minimalnog perioda dva i minimalnog perioda tri od preslikavanja T i njihove orbite, a zatim ispitati stabilnost tih tačaka.

1.4.2 *U zadacima (1.3.3-1.3.7) iz Vježbi 1.3.2 naći periodične tačke milnimalnog perioda dva i ispitati lokalnu stabilnost svake od njih.*

1.4.3 *Odrediti periodične tačke minimalnog perioda dva i ispitati njihovu stabilnost u sljedećim diferentnim jednadžbama:*
(a) $x_{n+1} = 1 - x_n^2$,
(b) $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$.

1.4.4 *Neka je* $F(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$

(a) Ako je $\{\alpha, \beta\}$ orbita periodične tačke minimalnog pewrioda dva $p = \alpha$ tako da je $F'(\alpha) F'(\beta) = -1$, dokazati da je p lokalno asimptotski stabilna.

(b) Ako je $\{\alpha, \beta\}$ orbita periodične tačke minimalnog pewrioda dva $p = \alpha$ tako da je $F'(\alpha) F'(\beta) = 1$, ispitati da li je tačka p stabilna ili nestabilna.

1.4.5 *Ako je $h(x) = ax^3 - bx + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, odrediti vrijednosti od a i b tako da periodična tačka $p = 1$ s orbitom $\mathcal{O}(1) = \{0, 1\}$ bude lokalno asimptotski stabilna.*

1.4.6 *Odrediti vrijednosti parametara α i β za koje Beverton-Holtova jednadžba ima periodičnih rješenja minimalnog perioda dva i ispitati stabilnost tih rješenja.*

1.4.7 *Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{A}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, ..., \;\; x_0 \neq 0, \;\; A > 0.$$

Ova diferentna jednadžba predstavlja Newtonov metod za numeričko rješavanje jednadžbe $x^2 + A = 0$.

(a) Odrediti tačke ekvilibrijuma i periodične tačke minimalnog perioda dva.

(b) Ispitati stabilnost periodičnih tačaka minimalnog perioda dva.

1.4.8 *Populacija odredene vrste je modelirana diferentnom jednadžbom $x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}$, $x_n > 0$, $a > 0$. Za koje vrijednosti od a jednadžba ima periodična rješenja minimalnog perioda dva? Može li se odrediti priroda stabilnosti tih tačaka?*

1.5 Globalna stabilnost

Ranije smo se upoznali s pojmovima globalne atraktivnosti i globalne asimptotske stabilnosti. Jasno je da su globalno atraktivni ekvilibrijumi ujedno i lokalno atraktivni, te stoga globalna asimptotska stabilnost implicira lokalnu asimptotsku stabilnost. Dokazano je (Sedaghat, 1977. godine) da ako je preslikavanje f neprekidno, onda globalno atraktivni ekvilibrijum mora biti lokalno asimptotski stabilan, što opet znači da je taj ekvilibrijum i globalno asimptotski stabilan. Dakle, u slučaju neprekidnog preslikavanja f, globalna atraktivnost fiksne tačke je ekvivalentna s globalnom asimptotskom stabilnošću. Medutim, kada preslikavanje f nije neprekidno, fiksna tačka može biti globalno atraktivna, a da nije i globalno asimptotski stabilna, kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.5.1 *Promatrajmo preslikavanje* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *definirano sa*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Nije teško uočiti da za diferentnu jednadžbu $x_{n+1} = f(x_n)$*, uz bilo koji pošetni uvjet* $x_0 \in [0, +\infty)$ *vrijedi da je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$*. Dakle, ekvilibrijum* $\overline{x} = 2$ *je globlni atraktor. Neka je* $\varepsilon = \frac{1}{2}$*. Tada za* $2 < x < 2 + \varepsilon$ *je* $x_1 < 1 + \varepsilon$*, pa imamo*

$$|x_1 - \overline{x}| = |x_1 - 2| > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

što znači da ekvilibrijum $\overline{x} = 2$ *nije lokalno asimptotski stabilan.* ♣

Osim odredivanja globalno atraktirajuće fiksne tačke ili atraktirajuće periodične tačke α, interes nam je da lociramo i maksimalni skup koji je atraktivan ka α. Takav se skup naziva **bazenom privlačenja** od α i označavat ćemo ga s $\mathcal{B}(\alpha)$.

Definicija 1.5.1 *Neka je* $\overline{x}$ *lokalno asimptotski stabilna fiksna tačka preslikavanja* f*.* ***Bazen privlačenja*** *od* $\overline{x}$ *definira se kao maksimalni skup* J *koji sadrži* $\overline{x}$ *i takav da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \overline{x} \quad \text{za svako } x \in J.$$

Bazen privlačenja od atraktirajuće periodične tačke perioda p *definira se analogno prethodnom, zamjenom* f *sa* p*-tom iteracijom* f^p*.*

Primjer 1.5.2 *Promatrajmo preslikavanje* $f : [0, 1] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x(1 - x)$*, koje odgovara logističkoj diferentnoj jednadžbi* $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$*. Preslikavanje* f *je strogo rastuće u* $\left[0, \frac{1}{2}\right)$*, a strogo opadajuće u* $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$*, s dvije fiksne tačke* $\overline{x}_1 = 0$ *i* $\overline{x}_2 = \frac{1}{2}$*. Ako je* $0 < x_0 < \frac{1}{2}$*, zbog strogog rasta preslikavanja* f*, imamo da je* $x_0 < x_1 < ... < x_n$*, to jest niz* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je strogo monotono rastući i ograničen je odzgo s* $\frac{1}{2}$*, pa je konvergentan. Označimo li graničnu vrijednost niza* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *s* l*, imat ćemo*

$$l = 2l(1 - l) \Longrightarrow \left(l = 0 \vee l = \frac{1}{2}\right),$$

pri čemu mogućnost $l = 0$ očito ne dolazi u obzir.

S druge strane, ako je $1 > x_0 > \frac{1}{2}$, tada je (očito) $x_1 = 2x_0(1 - x_0) < \frac{1}{2}$ i ovaj se slučaj svede na prethodni počev od indeksa 1 za niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dakle, ako je $x_0 \in (0, 1)$,tada je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$, pa je, prema Definiciji 1.5.1, $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 1)$. ♣

Pokazuje se da bazeni privlačenja mogu imati vrlo komplicirane strukture, čak i u slučaju vrlo jednostavnih preslikavanja. Zbnog toga je odredivanje bazena privlačenja tačke ekvilibrijuma ili periodične tačke općenito težak zadatak. Ovdje ćemo predstaviti jednu baznu topološku osobinu bazena privlačenja.

Definicija 1.5.2 *Za skup M reći ćemo da je* ***invarijantan*** *pod preslikavanjem f ako je $f(M) \subset M$, to jest, ako za svako $x \in M$ elementi orbite $\mathcal{O}^+(x)$ pripadaju skupu M.*

Teorem 1.5.1 *Ako je $\overline{x}$ atraktirajuća fiksna tačka preslikavanja f, onda je bazen privlačenja $\mathcal{B}(\overline{x})$ invarijantan otvoreni interval.*

U nastavku ove sekcije pretpostavljat ćemo da su nametnute odredene restrikcije na početne uvjete i na preslikavanje f. Naime, zbog primjene diferentnih jednadžbi u praksi (matematička biologija, ekonomija i sl.), smatrat ćemo da su rješenja jednadžbe nenegativna. Zbog toga ćemo smatrati da je $f : [0, a) \to [0, a)$ i uzimati $x_0 \in [0, a)$, $0 < a \leq \infty$. U modelima matematičke biologije čest je slučaj da je 0 ekvilibrijum ($f(0) = 0$). Ako postoji i pozitivni ekvilibrijum ($f(\overline{x}) = \overline{x}$), od posebnog je interesa ustanoviti kada su 0 ili pozitivni ekvilibrijum globalno asimptotski stabilni. U tu svrhu navodimo prvi rezultat koji se odnosi na globalnu asimptotsku stabilnost nultog ekvilibrijuma.

Teorem 1.5.2 *Pretpostavimo da preslikavanje f zadovoljava sljedeće uvjete:*
(i) $f : [0, a) \to [0, a)$, $0 < a \leq \infty$,
(i) f je neprekidno na $[0, a)$,
(iii) $0 < f(x) < x$ za sve $x \in (0, a)$.
Tada je ekvilibrijum 0 globalno asimptotski stabilan.

Dokaz. Koristeći pretpostavku (iii), imamo da je $0 < f^n(x_0) < ... < f^2(x_0) < f(x_0) < x_0$ za $x_0 \in (0, a)$. To znači da je niz $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ monotono opadajući i ograničen odozdo s 0, pa je i konvergentan. Dakle, postoji $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = l$. Uočimo da je l fiksna tačka od f zbog neprekidnosti funkcije f. Zaista,

$$l = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^{n-1}(x_0)\right) \overset{f \text{ nepr.}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0)\right) = f(l).$$

Kako je 0 jedina nenegativna fiksna tačka od f, slijedi da je $\overline{x} = l = 0$. Dakle, 0 je globalno atraktivna fiksna tačka, ali zbog neprekidnosti preslikavanja f slijedi da je ujedno i globalno asimptotski stabilna fiksna tačka. ∎

Primjer 1.5.3 *Promatrajmo malo modificiranu Beverton-Holtovu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{b + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

gdje je $f(x) = \frac{ax}{b+x}$ *i* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. *Ako je* $0 < a \leq b$, *postoji samo jedna nenegativna fiksna tačka preslikavanja* f, $\overline{x} = 0$, *a očito su zadovoljeni uvjeti (i)-(iii) Teorema 1.5.2. Prema tom teoremu je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$. ♣

Sljedeći teorem nam daje potrebne i dovoljne uvjete za globalnu asimptotsku stabilnost pozitivnog ekvilibrijuma.

Teorem 1.5.3 *Pretpostavimo da diferentna jednadžba (1.1) zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) $f : [0, a) \to [0, a)$, $0 < a \leq \infty$,

(i) f *je neprekidno na* $[0, a)$,

(iii) $f(0) = 0$, $f(\overline{x}) = \overline{x}$, $\overline{x} > 0$,

(iv) $f(x) > x$ *za* $0 < x < \overline{x}$,

(v) $f(x) < x$ *za* $\overline{x} < x < a$,

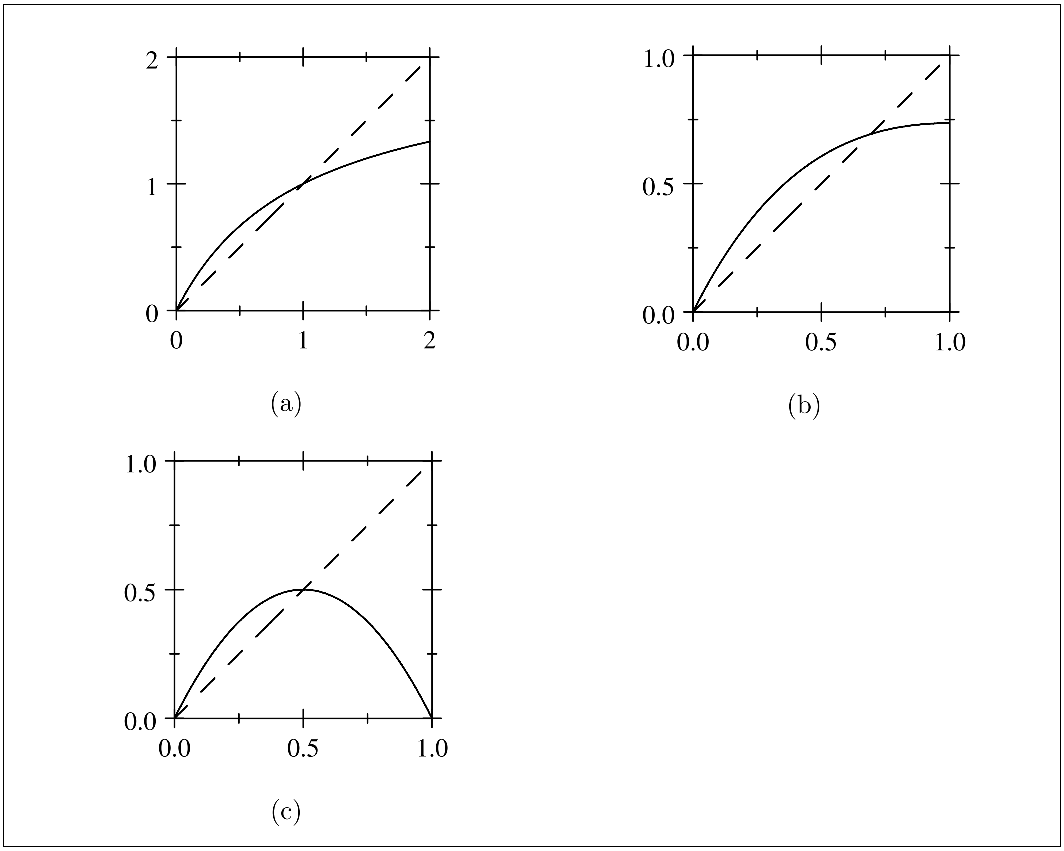
(vi) ako f *ima maksimum u* $x_M \in (0, \overline{x})$, *onda je* f *opadajuća za* $x > x_M$.

Tada diferentna jednadžba (1.1) ima globalno asimptotski stabilan ekvilibrijum $\overline{x}$ *ako i samo ako* f *nema periodičnih tačaka minimalnog perioda dva.*

Primjeri funkcija koje zadovoljavaju uvjete (i)-(vi) su:

$$\begin{aligned} f &: [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = \frac{2x}{1+x}, \\ f &: [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = 2xe^{-x}, \\ f &: [0, 1) \to [0, 1), \quad f(x) = 2x(1-x). \end{aligned}$$

Grafici tih funkcija dati su redom na sljedećoj slici.



Slika 1.1: Grafici funkcija: (a) $\frac{2x}{1+x}$, (b) $2xe^{-x}$ i (c) $2x(1-x)$

Primjer 1.5.4 *Promatrajmo modificiranu Beverton-Holtovu jednadžbu iz Primjera 1.5.3 uz uvjet* $a > b > 0$. *Jednadžba ima dva ekvilibrijuma,* $\overline{x}_1 = 0$ *i* $\overline{x}_2 = a - b$, *a funkcija* f *zadovoljava uvjete (i)-(vi) Teorema 1.5.3. Kako je* $f'(x) = \frac{ab}{(b+x)^2} > 0$, *zaključujemo da funkcija nema maksimuma na* $[0, \infty)$. *To znači da jednadžba nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva. Prema Teoremu 1.5.3 ekvilibrijum* $\overline{x}_2 = a - b$ *je globalno asimptotski stabilan.* ♣

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uvjete za neegzistenciju periodičnih rješenja minimalnog perioda dva.

Teorem 1.5.4 *Pretpostavimo da je* $f \in C^1[I, I]$ *i da je* $f'(x) \neq -1$ *za sve* $x \in I$. *Tada jednadžba (1.1) nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji periodično rješenje minimalnog perioda dva, to jest da vrijedi $f^2(p) = f(q) = p$, za neke p i q iz I. Tada je, zbog

$q = f(p)$,
$$0 \neq \int_p^q \left(1 + f'(x)\right) dx = (q + f(q)) - (p + f(p)) = 0,$$
što je kontradikcija, pa jednadžba (1.1) nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva. ■

Primjer 1.5.5 *Budući da Teorem 1.5.4 daje samo dovoljne uvjete za neegzistenciju periodičnih rješenja minimalnog perioda dva, možemo ga primijeniti u slučaju sljedeće pertubacione Beverton-Holtove jednadžbe*
$$x_{n+1} = \frac{ax_n^k}{b + x_n^k}, \quad n = 0, 1, \dots, \; a, b, k > 0 \text{ i } x_0 > 0.$$
Naime, iz
$$f'(x) + 1 = \frac{a\left[b + x^k (1-k)\right]}{\left(b + x^k\right)^2} + 1$$
slijedi da je $f'(x) + 1 > 0$ sigurno kad je $k \leq 1$ i tada ne postoje periodična rješenja minimalnog perioda dva. ♣

Navedimo još neke rezultate o globalno asimptotskoj stabilnosti tačke ekvilibrijuma diferentne jednadžbe (1.1).

Teorem 1.5.5 *Pretpostavimo da preslikavanje f zadovoljava uvjete (i) i (ii) Teorema 1.5.2, da je $\overline{x} \in (0, a)$ fiksna tačka preslikavanja f dinamičkog sistema (1.1) i da vrijedi $x < f(x) < \overline{x}$ za $0 < x < \overline{x}$ te $\overline{x} < f(x) < x$ za $x > \overline{x}$. Tada je fiksna tačka $\overline{x}$ globalno asimptotski stabilna.*

Dokaz. Lahko se zaključi da je niz $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ monotono rastući i ograničen odozgo s $\overline{x}$ ako je $x_0 < \overline{x}$, a da je niz $\{f^n(\widetilde{x}_0)\}_{n=0}^{\infty}$ monotono opadajući i ograničen odozdo s $\overline{x}$ ako je $\widetilde{x}_0 > \overline{x}$. Dakle, oba su niza konvergentna s pozitivnim limesima $y_1 = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)$ i $y_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(\widetilde{x}_0)$, koji moraju biti fiksne tačke preslikavanja f, jer vrijedi
$$y_1 = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^{n-1}(x_0)\right) \overset{f \text{ nepr.}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0)\right) = f(y_1),$$
$$y_2 = \lim_{n\to\infty} f^n(\widetilde{x}_0) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^{n-1}(\widetilde{x}_0)\right) \overset{f \text{ nepr.}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(\widetilde{x}_0)\right) = f(y_2).$$
Kako postoji jedinstvena pozitivna fiksna tačka $\overline{x}$ preslikavanja f, to mora bit $y_1 = y_2 = \overline{x}$. Dakle, fiksna tačka $\overline{x}$ je globalni atraktor, ali zbog neprekidnosti preslikavanja f ona je i globalno asimptotski stabilna. ■

Primjer 1.5.6 *Funkcija $y = \frac{ax}{b+x}$, $a > b > 0$, čiji je grafik za $a = 2$ i $b = 1$ prvi prikazan na gornjoj slici, zadovoljava uvjete Teorema 1.5.5, te globalna asimptotska stabilnost fiksne tačke $\overline{x} = a - b$ slijedi i na ovaj način.* ♣

Teorem 1.5.6 *(a) Pretpostavimo da preslikavanje f zadovoljava uvjete (i)-(v) Teorema 1.5.3, ali da nema maksimuma u $(0, \overline{x})$. Tada je $\overline{x}$ globalno asimptotska stabilna fiksna tačka preslikavanja f.*

(b) Pretpostavimo da preslikavanje f zadovoljava uvjete (i)-(vi) Teorema 1.5.3 i da ima maksimum za x_M u $(0, \overline{x})$. Tada je fiksna tačka $\overline{x}$ globalno asimptotski stabilna fiksna tačka preslikavanja f ako i samo ako je $f^2(x) > x$ za sve $x \in [x_M, \overline{x})$.

Primjer 1.5.7 *Teorem 1.5.6 može primijeniti na specijalni slučaj tzv.* ***Rickerovog modela***

$$x_{n+1} = 2x_n e^{-rx_n}, \quad n = 0, 1, ..., \ r > 0$$

(opći Rickerov model je oblika $x_{n+1} = ax_n e^{-rx_n}$, $n = 0, 1, ...,$ $a, r > 0$). Ovaj model ima dva ekvilibrijuma, $\overline{x}_1 = 0$ i $\overline{x}_2 = \frac{\ln 2}{r}$. Kako je $f'(x) = 2(1-x)e^{-rx}$, zaključujemo da funkcija f ima maksimum u $x_M = \frac{1}{r}$. Pošto je $\overline{x}_2 = \frac{\ln 2}{r} < \frac{1}{r} = x_M$, f nema maksimuma u $(0, \overline{x})$, to je prema Teoremu 1.5.6 ekvilibrijum $\overline{x}_2$ globalno asimptotski stabilan. ♣

1.5.1 Disipativna preslikavanja

Razmatrajmo sada jednu specijalnu klasu diskretnih dinamičkih sistema, tzv. disipativnih sistema oblika (1.1) za koji svaka njegova orbita eventualno ulazi u interval $[a, b]$, v. [4].

Definicija 1.5.3 *Za niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ kažemo da ima* ***eventualno*** *neku osobinu P ako postoji neki cio broj $N \geq n_0 > 0$ tako da svaki član niza $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ ima ovu osobinu P.*

Definicija 1.5.4 *Interval $[a, b]$ nazivamo* ***apsorbirajućim intervalom*** *ili* ***atraktirajućim intervalom*** *preslikavanja f ako svaka orbita diskretnog dinamičkog sistema (1.1) eventualno ulazi u interval $[a, b]$.*

Definicija 1.5.5 *Interval $[a, b]$ nazivamo* ***invarijantnim intervalom*** *preslikavanja f diskretnog dinamičkog sistema (1.1) ako svaka orbita koja upadne u taj interval ostaje u njemu zauvijek.*

U slučaju kada je disipativno preslikavanje f dinamičkog sistema (1.1) neprekidno i monotono, onda je dinamika tog sistema vrlo jednostavna, kao što pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 1.5.7 *Neka je $[a, b]$ invarijantni interval preslikavanja f, to jest $f([a, b]) \subset [a, b]$, i pretpostavimo da je f neprekidna neopadajuća funkcija koja ima jedinstvenu fiksnu tačku $\overline{x}$. Tada svako rješenje jednadžbe (1.1) s početnim uvjetom $x_0 \in [a, b]$ konvergira ka $\overline{x}$. Ako je sistem (1.1) disipativan, onda svako rješenje od (1.1) konvergira ka $\overline{x}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x_0 \in [a,b]$. Tada je $x_1 = f(x_0) \in [a,b]$, jer je $[a,b]$ invarijantni interval preslikavanja f. Dalje imamo

$$x_1 \left\{ \begin{array}{l} > x_0 \\ = x_0 \\ < x_0 \end{array} \right. \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} x_2 = f(x_1) \left\{ \begin{array}{l} \geq f(x_0) = x_1 \\ \leq f(x_0) = x_1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 \geq x_1 \geq x_0 \\ x_2 \leq x_1 \leq x_0 \end{array} \right.$$

$$\overset{\text{indukcija}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \uparrow \\ \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow \end{array} \right. .$$

Dakle, niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ograničen odozdo s a i odozgo s b, pa je konvergentan, to jest postoji $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zbog toga imamo

$$l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{f \text{ nepr}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(l),$$

što implicira da je $l = \overline{x}$.

Drugi dio dokaza slijedi iz definicije disipativnog preslikavanja i izvedenog dijela dokaza. ■

Primjer 1.5.8 *U diferentnoj jednadžbi (specijalnom slučaju Beverton-Holtove jednadžbe)*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, \quad n = 0,1,2,...,$$

funkcija $f = \frac{x}{1+x}$ zadovoljava uvjete Teorema 1.5.7 na intervalu $[0,1]$. Naime, očito je taj interval invarijantan pod djelovanjem preslikavanja f, ali je istovremeno i atraktirajući interval, jer sve iteracije počev od $n = 1$ upadaju u taj interval, pa je preslikavanje f disipativno. Prema prvom dijelu Teorema 1.5.7, svako rješenje ove jednadžbe koje starta u intervalu $[0,1]$ konvergira ka jedinstvenom ekvilibrijumu $\overline{x} = 0$. Prema drugom dijelu teorema, pošto je f disipativno preslikavanje, svako rješenje koje starta u $[1,\infty)$ već u prvom koraku upadne u invarijantni interval i konvergira ka ekvilibrijumu $\overline{x} = 0$. Drugim riješima, svako rješenje s nenegativnim početnim uvjetom konvergira ka ekvilibrijumu 0. Medutim, ukoliko želimo uzeti negativni početni uvjet, situacija postaje mnogo složenija, jer se susrećemo s problemom egzistencije rješenja (to jest, x_n može biti nedefinirano za neke n). Ipak, sretna okolnost u tome je što se jednadžba može riješiti u egzaktnom obliku. Naime, smjenom $x_n = \frac{1}{u_n}$ jednadžbe se svodi na linearnu

$$u_{n+1} = u_n + 1, \quad n = 0,1,...,$$

čije je rješenje $u_n = u_0 + n$, pa je $x_n = \frac{x_0}{1+nx_0}$ za $n \geq 0$, čak i za x_0 koje je negativno, osim za $x_0 = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$. ♣

Primjer 1.5.9 *Uočimo da će svi uvjeti Teorema 1.5.7 biti zadovoljeni i u slučaju jednadžbe*

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n^2}, \quad n = 0,1,2,...,$$

za koju je $[0,1]$ *invarijantni interval, ali i atraktirajući interval pošto će svaka iteracija, počev od prve, pasti u* $[0,1]$*, uključujući čak i slučaj negativnog početnog uvjeta. Dakle, prema Teoremu 1.5.7, svako rješenje promatrane jednadžbe će konvergirati ka jedinstvenom ekvilibrijumu* $\overline{x} = 0$*, što znači da je* $\overline{x} = 0$ *globalni atraktor na* $(-\infty, \infty)$*.* ♣

Sljedeći teorem vrijedi za slučaj kada je preslikavanje f opadajuće na invarijantnom intervalu, v. [4] i [**?**].

Teorem 1.5.8 *Neka je interval realnih brojeva* $[a,b]$ *invarijantan pod preslikavanjem* f*, koje je neprekidno i nerastuće s jedinstveniom fiksnom tačkom* $\overline{x}$*, i neka jednadžba (1.1) nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva. Tada svako rješenje od (1.1) koje eventualno upadne u* $[a,b]$ *konvergira ka* $\overline{x}$*. Osim toga, podnizovi* $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ *i* $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ *svakog rješenja jednadžbe (1.1) konvergiraju monotono ka* $\overline{x}$ *oscilirajući oko ekvilibrijuma tako da je*

$$(x_{n+1} - \overline{x})(x_n - \overline{x}) < 0 \quad za\ n = 0, 1, \dots\ .$$

Dokaz. Prvi dio dokaza ostavljamo za vježbu (v. Vježbu 1.5.6). Osciliranja rješenja oko ekvilibrijuma slijedi izsljedećeg

$$x_n \begin{cases} > \overline{x} \\ < \overline{x} \end{cases} \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} x_{n+1} = f(x_n) \begin{cases} < f(\overline{x}) = \overline{x} \\ > f(\overline{x}) = \overline{x} \end{cases} .$$

■

Primjer 1.5.10 *Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{1.35}$$

Očito je $[0,1]$ *njen invarijantni interval. Odgovarajuće preslikavanje* $f = e^{-x}$ *je uvijek opadajuće i nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva. Naime, ako bi takvo periodično rješenje egzistiralo, moralo bi vrijediti*

$$f^2(p) = e^{-e^{-p}} = p, \quad p \neq \overline{x}.$$

Medutim, funkcija $F(w) = e^{-e^{-w}} - w$ *ima sljedeće osobine:* $F(0) = \frac{1}{e} > 0$*,* $F(1) = \frac{1}{e^{e^{-1}}} - 1 < 0$ *i* F *je opadajuća za* $w \geq 0$ *jer je* $F'(w) = e^{-w-e^{-w}} - 1 < 0$ *za* $w \geq 0$*, što implicira da* F *ima jedinstvenu nulu na intervalu* $[0,1]$*, koje je fiksna tačka preslikavanja (dakle, nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva). Prema tome, preslikavanje* f *zadovoljava uvjete Teorema 1.5.8. Uočimo da je interval* $[0,1]$*, ne samo invarijantni interval za preslikavanje* f*, nego i atraktirajući interval budući da svako rješenje jednadžbe (1.35) ulazi u taj interval nakon najviše dvije iteracije, to jest sigurno je* $x_n = f^n(x_0) \in [0,1]$ *za sve* $n \geq 2$*. Dakle, preslikavanje* f *je disipativno, pa prema Teoremu 1.5.8 svako rješenje jednadžbe (1.35) konvergira ka ekvilibrijumu* $\overline{x}$ *oscilirajući oko njega sa svaka dva susjedna člana.* ♣

1.5.2 Vježbe

1.5.1 *Dokazati Teorem 1.5.6.*

1.5.2 *Za diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n, & |x_n| < 1, \\ 0, & |x_n| \geq 1, \end{cases}$$

gdje je $a > 1$, pokazati da je 0 globalni atraktor (za sve početne uvjete), ali da nije lokalno asimptotski stabilna tačka ekvilibrijuma.

1.5.3 *(a) Pokazati da se, ranije spomenuta, logistička diferencijalna jednadžba*

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad r, K > 0,$$

može diskretizacijom svesti na diferentnu jednadžbu Beverton-Holtovog tipa

$$x_{n+1} = \frac{\eta K x_n}{K + (\eta - 1)\, x_n}, \quad n = 0, 1, 2..., \tag{1.36}$$

gdje je $\eta = e^r > 1$.

(b) Pokazati da je pozitivni ekvilibrijum $\overline{x} = K$ jednadžbe (1.36) globalno asimptotski stabilan.

(c) Pokazati da se smjenom $u_n = \frac{1}{x_n}$ diferentna jednadžba (1.36) transformira u linearnu jednadžbu

$$u_{n+1} = \frac{1}{\eta} u_n + \frac{\eta - 1}{\eta K},$$

a zatim naći opće rješenje te jednadžbe.

(d) Pokazati da je

$$x_n = \frac{x_0 K \eta^n}{K + x_0\,(\eta^n - 1)}, \quad n = 0, 1, 2...$$

i odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Uputa: *Riješiti diferencijalnu jednadžbu integraleći po t u intervalu $[n, n+1]$ (što implicira integraciju po x u intervalu $[x_n, x_{n+1}]$).*

1.5.4 *Pretpostavimo da je u jednadžbi (1.1) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ i $f'(x) > 0$ za $x \in [0, \infty)$ i da postoje dva hiperbolička ekvilibrijuma, $\overline{x} > 0$ i nula. Ako je $0 < x_0 < \overline{x}$, dokazati da je tada ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ili je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

1.5.5 *Pokazati da Rickerov model za rast populacije*

$$x_{n+1} = x_n e^{r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)}, \quad n = 0, 1, 2..., \quad r, K > 0,$$

nema periodičnih rješenja minimalnog perioda dva za $0 < r < 2$. Specijalno, pokazati da je $f'(x) \neq -1$ za $x \in (0, \infty)$, a zatim zaključiti da je pozitivni ekvilibrijum $\overline{x} = K$ globalno asimptotski stabilan.

1.5.6 *Dokazati prvi dio Teorema 1.5.8.*

1.5.7 *Ispitati lokalnu i globalnu stabilnost tačaka ekvilibrijuma sljedeće Riccatijeve jednadžbe, poznate i kao Pielouova jednadžba*

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{1+x_n}, \quad n = 0, 1, ...$$

za $A \in \mathbb{R}$.

1.5.8 *Odrediti bazene privlačenja fiksnih tačaka preslikavanja*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \leq x \leq 1 \\ 4\sqrt{x} - 3, & 1 < x \leq 9 \end{cases}.$$

1.5.9 *Odrediti bazene privlačenja fiksnih tačaka preslikavanja* $G(x) = \mu \arctan x$, $\mu \neq 0$.

1.5.10 *Odrediti bazen privlačenja fiksne tačke* $\overline{x} = 1 - \frac{1}{a}$ *u slučaju logističkog preslikavanja* $F_a(x) = ax(1-x)$ *i* $1 < a < 3$ *(v. [2]).*

1.6 Bifurkacije

Razmotrimo prvo slučaj nehiperboličke fiksne tačke $\overline{x}$ kada je $f'(\overline{x}) = -1$. U ovom slučaju preslikavanje f nije monotono, ali jeste oscilatorno (i pretpostavljamo da je i neprekidno). Ako ekvilibrijum postaje nestabilan, onda se orbita preslikavanja f ne približava ka $\overline{x}$. Medutim, ukoliko je orbita ograničena moguće je da njeni parne iteracije (koje ostaju s jedne iste strane od $\overline{x}$) konvergiraju ka nekoj graničnoj vrijednosti, recimo, p, a njene neparne iteracije (koje takoder ostaju s jedne iste strane od $\overline{x}$) konvergiraju ka graničnoj vrijednosti $f(p)$. Ukoliko se ovo dešava, tada je $f(f(p)) = p$ i $f(p) \neq p$ (pri tome su p i $f(p)$ s različitih strana od $\overline{x}$), to jest p je periodična tačka minimalnog perioda dva. Zaista, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = p$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) \overset{f \text{ nepr}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_{2n}\right) = f(p)$$

i

$$f^2(p) = f(f(p)) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}\right) \overset{f \text{ nepr}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = p.$$

Ova promjena globalnog ponašanja orbita preslikavanja f se naziva **bifurkacija udvostručavanja perioda** ili **flip bifurkacija**.

1.6.1 Ruta bifurkacije udvostručavanja perioda do haosa

Sljedeći nam primjer jasno pokazuje pojavu periodičnih tačaka minimalnog perioda dva u slučajukad je $f'(\overline{x}) = -1$. Naime, u jednadžbi

$$x_{n+1} = -x_n, \quad n = 0, 1, ...$$

jedinstvena tačka ekvilibrijuma je 0, dok je svako njeno rješenje, osim tačke ekvilibrijuma, periodično rješenje minimalnog perioda dva.

Izraz bifurkacija, grubo rečeno, odnosi se na fenomen dinamičkog sistema koji pokazuje novo dinamičko ponašanje pri varijaciji parametra. Najjednostavnije nam je to objasniti na primjeru, već spomenutog, logističkog preslikavanja $f_a(x) = ax(1-x)$, $x \in [0,1]$ i $a > 0$. Ranije smo ustanovili da ovo preslikavanje ima dvije fiksne tačke, $\overline{x}_1 = 0$ i $\overline{x}_2 = 1 - \frac{1}{a}$, pri čemu je $\overline{x}_1 = 0$ lokalno asimptotski stabilan za $0 < a < 1$, a nestabilan za $a > 1$, dok je $\overline{x}_2 = 1 - \frac{1}{a}$ lokalno asimptotski stabilan za $1 < a < 3$, a za $a > 3$ nestabilan. Takoder, rješavanjem jednadžbe

$$f_a^2(x) = a^2 x(1-x)(1 - ax(1-x)) = x,$$

za $x \neq \overline{x}_1$ i $x \neq \overline{x}_2$, dobijaju se

$$p = \frac{a + 1 - \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a} \quad \text{i} \quad q = \frac{a + 1 + \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a},$$

što su periodične tačke minimalnog perioda dva preslikavanja f_a kad je $a > 3$. Ispitajmo kada je periodična orbita minimalnog perioda dva, $\{p, q\}$, preslikavanja f_a stabilna. To vrijedi kad je

$$\left| f_a'(f_a(p)) f_a'(p) \right| = \left| f_a'(q) f_a'(p) \right| < 1,$$

odnosno

$$|(a - 2ap)(a - 2aq)| < 1 \Longleftrightarrow \left| a^2 - 2a - 4 \right| < 1 \Leftrightarrow 3 < a < 1 + \sqrt{6}.$$

Uočavamo da se promjenom vrijednosti parametra a i kvalitativno ponašanje dinamike preslikavanja f_a mijenja. Do sada smo vidjeli da se takva promjena dešava za $a_0 = 1$, za $a_1 = 3$ i za $a_2 = 1 + \sqrt{6}$. Uočimo još da za $a = 1 + \sqrt{6}$ vrijedi

$$\left[f_a^2(p) \right]' = f_a'(q) f_a'(p) = -1$$

Neka nam a_k označava $(k+1)$-u promjenu vrijednosti parametra a koja prouzroči neki tip kvalitativne promjene dinamike preslikavanja f_a. Vrijednosti a_k zvat ćemo **bifurkacionim vrijednostima** parametra. Nastavljajući ovaj proces dalje, zaključujemo da se sljedeća bifurkaciona vrijednost, $a_3 = 3.544090...$, odnosi na periodične tačke minimalnog perioda četiri, a ne tri kako bi se moglo očekivati. Pokazuje se da je za $a \in (a_2, a_3)$ periodična orbita minimalnog perioda četiri lokalno asimptotski stabilna, a da periodična orbita minimalnog perioda dva postaje nestabilna.

Isto tako, može se pokazati da za $a \in (a_3, a_4)$ periodične tačke minimalnog perioda osam se pojavljuju i one su lokalno asimptotski stnabilne, dok su periodične tačke minimalnih perioda dva i četiri nestabilne. Na taj način se dobija niz $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ bifurkacionih vrijednosti parametra a sa sljedećom osobinom: za $a \in (a_k, a_{k+1})$ pojavljuje se periodične tačke minimalnog perioda 2^k koje su lokalno asimptotski stabilne, dok su periodične tačke minimalnih perioda $2, 2^2, ..., 2^{k-1}$ nestabilne. Istaknimo još da uvijek vrijedi

$$\left[f_{a_k}^{2^k}(p_1)\right]' = f'_{a_k}(p_1)\, f'_{a_k}(p_2) ... f'_{a_k}(p_{2^k}) = -1,$$

gdje je $\{p_1, ..., p_{2^k}\}$ periodična orbita periodične tačke p_1 minimalnog perioda 2^k preslikavanja f_a.

Ovaj fenomen je poznat pod nazivom **ruta bifurkacije udvostručavanja perioda do haosa**. Uočimo da se tada dešava sljedeće: kada parametar a raste iza a_1, tada se pozitivna fiksna tačka grana u periodične tačke minimalnog perioda dva; u vrijednosti a_2 se periodične tačke minimalnog perioda dva granaju u periodične tačke minimalnog perioda četiri, dok se u vriednosti a_3 periodične tačke minimalnog perioda četiri granaju u periodične tačke minimalnog perioda osam i tako dalje. Niz bifurkacija udvostručenja perioda se završava u vrijednosti koju označavamo s a_∞ i koja je približno jednaka $a_\infty = 3.56994...$. Nakon te vrijednosti parametra a pojavljuju se periodične tačke svih perioda, kao i neperiodične tačke. Ta situacija se često opisuje kao **haotično ponašanje** ili **haos**. Posljednji period koji nastaje u ovoj bifurkaciji je period tri i nastupa za $a = 1 + \sqrt{8}$.

Navedimo tri glavne karakteristike rute udvostručavanja perioda do haosa.

1. Periodi se javljaju u poretku $2, 4, 8, ..., 2^k, ...$ završavajući s 3. Ovaj poredak je poznat kao poredak Sharkovskog (o kome će još biti riječi u ovoj sekciji).

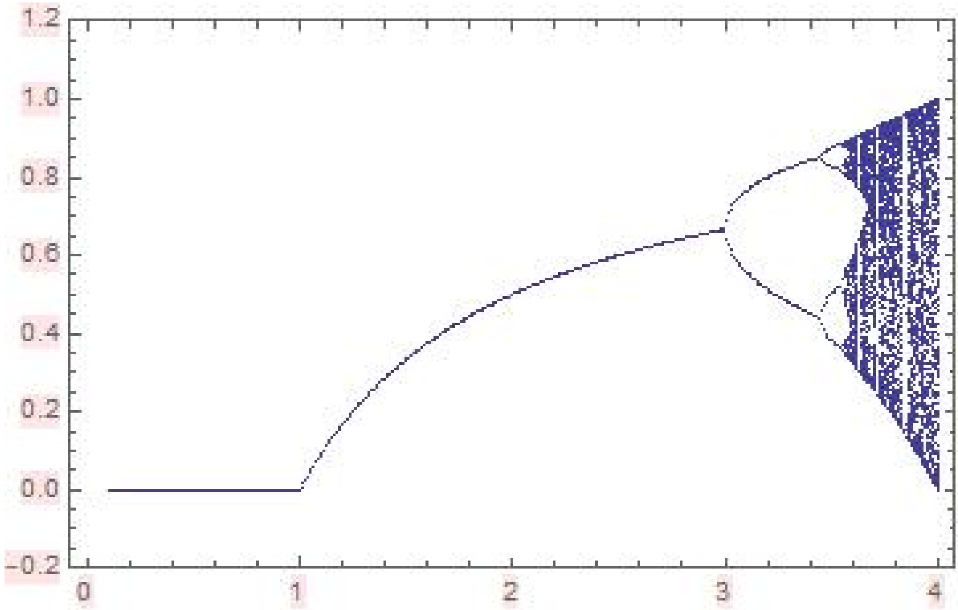
2. Postoji samo jedna periodična orbita koja je stabilna u intervalu (a_k, a_{k+1}), što je važan trezultat poznat kao Singerov teorem (o kome će takoder biti riječi u ovoj sekciji).

3. Niz$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ ima izvanrednu osobinu

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} = \delta \approx 4.66920.$$

Konstanta δ se naziva **Mybergov broj** ili **Feigenbaumov** broj. Značajno je napomenuti i Feigenbaumov rezultat koji pokazuje da broj δ ne ovisi o familiji dovoljno glatkih preslikavanja $f_a : I \to I$ (dok broj a_∞ ovisi o izboru te familije).

Fenomen bifurkacije se može predstaviti tzv. bifurkacionim dijagramom. Na tom dijagramu na horizontalnoj osi se nalaze vrijednosti parametra a, dok vertikalna osa predstavlja visoke iteracije $f_a^n(x)$. Tako za neko fiksno x_0 dijagram pokazuje eventualno ponašanje od $f_a^n(x_0)$. Naime, koristeći npr. softver *Mathematica* može se dobiti bifurkacioni dijagram kao skup tačaka $(a, f_a^n(x_0))$ za, recimo, $400 \le n \le 550$, $a \in [0, 4]$, uzimajući prirast od npr. $\frac{1}{400}$ za parametar a (v. Sliku 1.2). Na Slici 1.2 broj presjeka s vertikalnom linijom u bilo kojoj tački daje period atraktirajućeg rješenja za odgovarajuću vrijednost parametra a. Tako se jasno vidi izgled periodičnih rješenja minimalnih perioda dva, perioda četiri i perioda osam, što



Slika 1.2: Bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja

je početak rute udvostručavanja perioda do haosa. Takoder se vidi "bijeli prozor" za parametarske vrijednosti veće od 3.8, što nam sugerira egzistenciju periodičnog rješenja minimalnog perioda tri.

Općenito se formiranje bifurkacionog dijagrama može predstaviti sljedećim algoritmom.

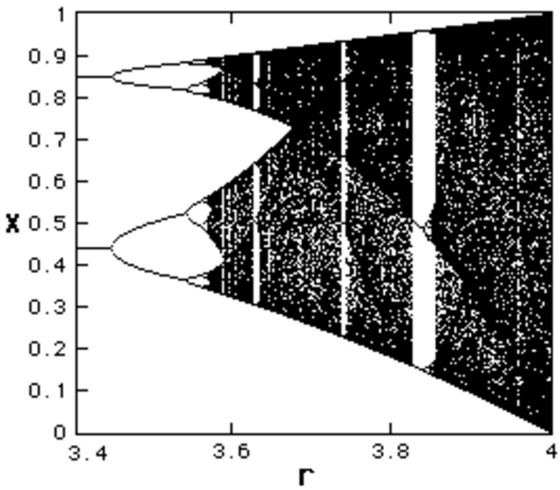
Neka su n_1, n_2, N_{koraci}, $a_{\min}$ i $a_{\max}$ dati brojevi.

1. Odabrati vrijednost parametra a, startajući s početnom vrijednošću $a_{\min}$.
2. Odabrati fiksnu tačku x_0.
3. Izračunati orbitu od x_0.
4. Zanemariti prvih $n_1 - 1$ iteracija i crtati orbitu od x_{n_1} do x_{n_2}.
5. Uzeti a kao $\frac{a_{\max}-a_{\min}}{N_{koraci}}$ i početi proceduru ponovo.

Za interaktivno crtanje bifurkacionog dijagrama logističkog preslikavanja vidjeti npr. *https://www.nathaniel.ai/logistic-map* ili *https://www.k-interact.net/bifurcation-diagram-1-d*.

1.6.2 Teorem Sharkovskog i udvostručavanje perioda

Egzistencija periodični tačaka minimalnog perioda tri obezbjeduje sigurnu pojavu haosa. Naime, Li i Yorke [9] su objavili rad "Period Three Implies Chaos" ("Period tri implicira haos") u kome su dokazali da neprekidno preslikavanje koje ima periodične tačke mini-malnog perioda tri mora imati periodične tačke bilo kojeg minimalnog perioda k. Slijedi precizna formulacija specijalnog slučaja tog teorema.



Slika 1.3: Bifurkacioni dijagram za 3.4<r<4

Teorem 1.6.1 ***(Period tri implicira haos)*** *Neka je $f : I \to I$ neprekidno preslikavanje na intervalu I. Ako ovo preslikavanje ima periodičnu tačku p_3* ***minimalnog perioda tri****, tada za svako $k = 1, 2, ...$ postoji periodična tačka p_k minimalnog perioda k.*

No, Teorem 1.6.1 je specijalni slučaj općenitijeg teorema kojeg je 1964. godine objavio A. N. Sharkovsky [**?**]. On je u tu svrhu uveo novo uredenje pozitivnih cijelih brojeva $\rhd$ u kome se broj 3 pojavljuje kao prvi. Da bismo shvatili njegov teorem, uvedimo **uredenje Sharkovskog** kao što slijedi:

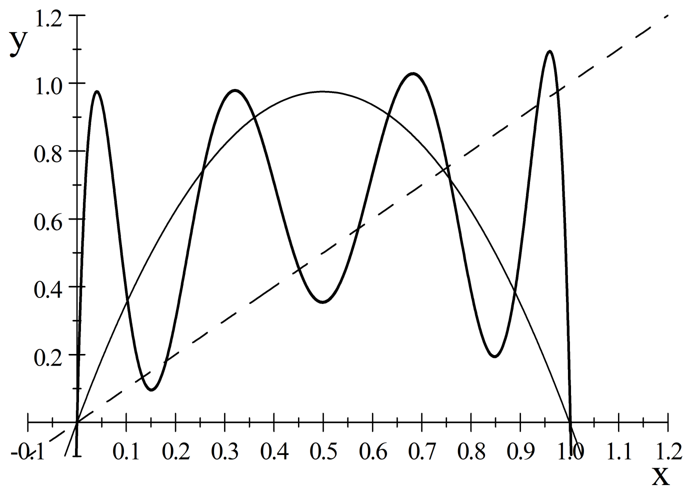
$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd ... \rhd 2{\times}3 \rhd 2{\times}5 \rhd ... \rhd 2^n{\times}3 \rhd 2^n{\times}5 \rhd ... \rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd ... \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Oznaka $k \rhd m$ znači se k javlja prije m u uredenju Sharkovskog. (Značaj Teorema 1.6.1, iako je on specijalan slučaj Teorema 1.6.2, je ipak u činjenici da Li i Yorke u radu u kome je objavljen ovaj teorem spominju pojam haosa.)

Slijedi spomenuti Teorem Sharkovskog (za dokaz vidjeti [2]).

Teorem 1.6.2 ***(Teorem Sharkovskog)*** *Neka je I interval u $\mathbb{R}$ (konačan ili beskonačan) i neka je $f : I \to I$ neprekidno preslikavanje. Ako f ima periodičnu tačku minimalnog peripoda k, tada ono mora imati i periodičnu tačku minimalnog perioda m za sve m za koje vrijedi $k \rhd m$.*

Već smo napomenuli kako se grafički određuju fiksne tačke i periodične tačke nekog preslikavanja. To nam je ujedno i najjednostavniji način da utvrdimo da li neko preslikavanje ima haotično ponašanje. Naime, prema Teoremu 1.6.2, ako postoji periodična tačka minimalnog perioda tri, tada sigurno imamo i haos, pa je dovoljno nacrtati grafike (pomoću nekog softvera) promatranog preslikavanja f, zatim preslikavanja f^3 i funkcija $y = x$ (simetrala prvog kvadranta). Ukoliko se simetrala prvog kvadranta i f^3 sijeku u nekim tačkama različitim od fiksnih tačaka preslikavanja f, tada postoji barem jedna tačka perioda tri, a prema Teoremu 1.6.2 postoje i tačke bilo kojeg drugog perioda (v. Sliku 1.4 u slučaju logističkog preslikavanja za $a = 3.9$).



Slika 1.4: Grafici f i f^3 preslikavanja $f(x) = 3.9x(1-x)$

Nažalost, u više dimenzija ne vrijedi Teorem Sharkovskog, niti postoje analogni rezultati ovom teoremu. No, istaknimo da je moguće konstruirati neprekidno preslikavanje koje ima periodičnu tačku minimalnog perioda 5, ali ne i perioda 3. Potvrduje nam to sljedeći općeniti rezultat (za dokaz vidjeti [2]).

Teorem 1.6.3 ***(Obrat Teorema Sharkovskog)*** *Za proizvoljni pozitivni cio broj r postoji preslikavanje $f_r : I \to I$ na zatvorenom intervalu I tako da f_r ima periodičnu tačku minimalnog perioda r, ali nema periodičnih tačaka minimalnog perioda s, za sve pozitivne cijele brojeve s takve da je $s \rhd r$.*

Sljedeći teorem, poznat kao Singerov teorem, daje nam djelimičan odgovor na pitanje: koliko atraktirajućih periodičnih orbita može imati diferencijabilno preslikavanje (za dokaz vidjeti [2].). Koristit ćemo već uvedenu oznaku $Sf(x)$ za Schwarzianov izvod funkcije f.

Teorem 1.6.4 ***(Singerov teorem)*** *Neka je $f : I \to I$ preslikavanje definirano na zatvorenom intervalu I tako da je $Sf(x) < 0$ za sve $x \in I$. Ako f ima n stacionarnih tačaka u I, onda za svaki pozitivan cio broj k, preslikavanje f ima najviše $n+2$ atraktirajućih periodičnih orbita perioda k.*

Primijetimo da logističko preslikavanje $f_a(x) = ax(1-x)$, $0 < a \leq 4$, $x \in [0,1]$, zadovoljava uvjete Teorema 1.6.4 te ima jednu stacionarnu tačku, $x = \frac{1}{2}$. Računajući dvije fiksne tačke kao periodične tačke perioda 1, prema Teoremu 1.6.4 slijedi da to preslikavanje ima najviše jednu atraktirajuću periodičnu orbitu periodične tačke minimalnog perioda k $(k \in \mathbb{N})$.

U prethodnoj sekciji smo imali priliku vidjeti neprekidna preslikavanja koja imaju globalno asimptotski stabilne fiksne tačke. Nameće se pitanje: šta je s globalnom stabilnošću periodičnih tačaka (ne fiksnih) neprekidnih preslikavanja? Odgovor je sadržan u sljedećem teoremu [2].

Teorem 1.6.5 ***(Elaydi-Yakubu)*** *Neka je $f : I \to I$ neprekidno preslikavanje na intervalu I. Tada f nema globalno asimptotski stabilnih periodičnih orbita.*

Dakle, globalno asimptotski stabilne mogu biti samo fiksne tačke neprekidnog preslikavanja.

Navedimo sada matematičke osnove bifurkacije udvostručavanja perioda.

Teorem 1.6.6 ***(Bifurkacija udvostručavanja perioda)***

Pretpostavimo da vrijedi

1. $F_a(\overline{x}) = \overline{x}$, *za sve a u intervalu oko a^*.*
2. $F'_{a^*}(\overline{x}) = -1$.
3. $\frac{\partial^2 F^2}{\partial a \partial x}(a^*, \overline{x}) \neq 0$.

Tada postoji interval I oko $\overline{x}$ i funkcija $p : I \to \mathbb{R}$ tako da je $F_{p(x)}(x) \neq x$ ali i $F^2_{p(x)}(x) = x$.

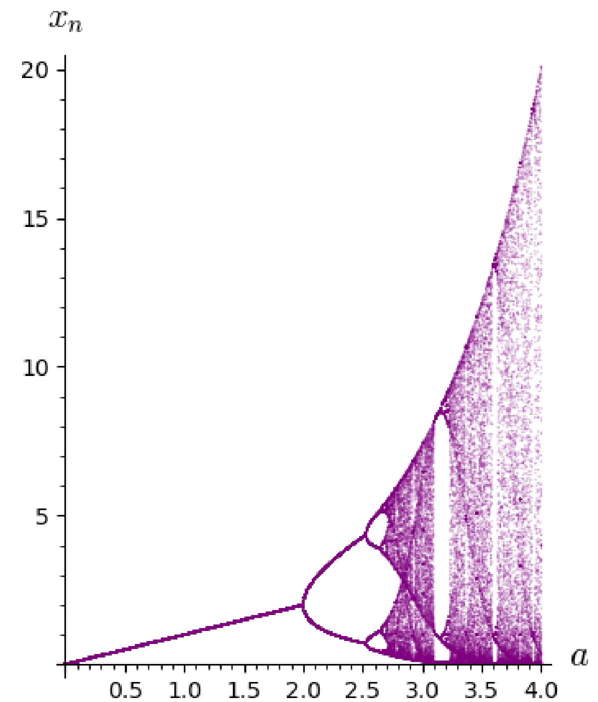
Dokaz. V. [2], dokaz Teorema 2.7. ■

Primjer 1.6.1 *Pokazati da se preslikavanje $H_a(x) = xe^{a-x}$ podvrgava bifurkaciji udvostručavanja perioda u $a^* = 2$. Nacrtati bifurkacioni dijagram ovog preslikavanja.*

Rješenje. Fiksne tačke preslikavanja $H_a(x)$ su rješenja jednadžbe

$$x = xe^{a-x},$$

to jest $\overline{x}_1 = 0$ i $\overline{x}_2 = a$. Kako je $H'_a(x) = (1-x)\, e^{a-x}$, imamo $H'_a(0) = e^a < 1$ za $a < 0$ i tada je fiksna tačka $\overline{x}_1 = 0$ lokalno asimptotski stabilna, dok je za $a > 0$ ona nestabilna (repeler). S druge strane je $H'_a(a) = 1 - a$, pa imamo $|H'_a(a)| = |1-a| < 1$ za $0 < a < 2$ i tada je fiksna tačka $\overline{x}_2 = a$ lokalno asimptotski stabilna, a za $a < 0$ ili $a > 2$ je nestabilan (repeler). Kako je $H'_a(a) = -1$ za $a = a^* = 2$, jasno je da se tada pojavljuje bifurkacija udvostručavanja perioda. Izračunavanje periodičnih rješenja ovdje je vrlo komplicirano (svodi se na rješavanje komplicirane transcendentne jednadžbe), tako da ćemo se zadovoljiti samo egzistencijom bifurkacije udvostručenja perioda. ♣



Slika 1.5: Bifurkacioni dijagram preslikavanja H_a

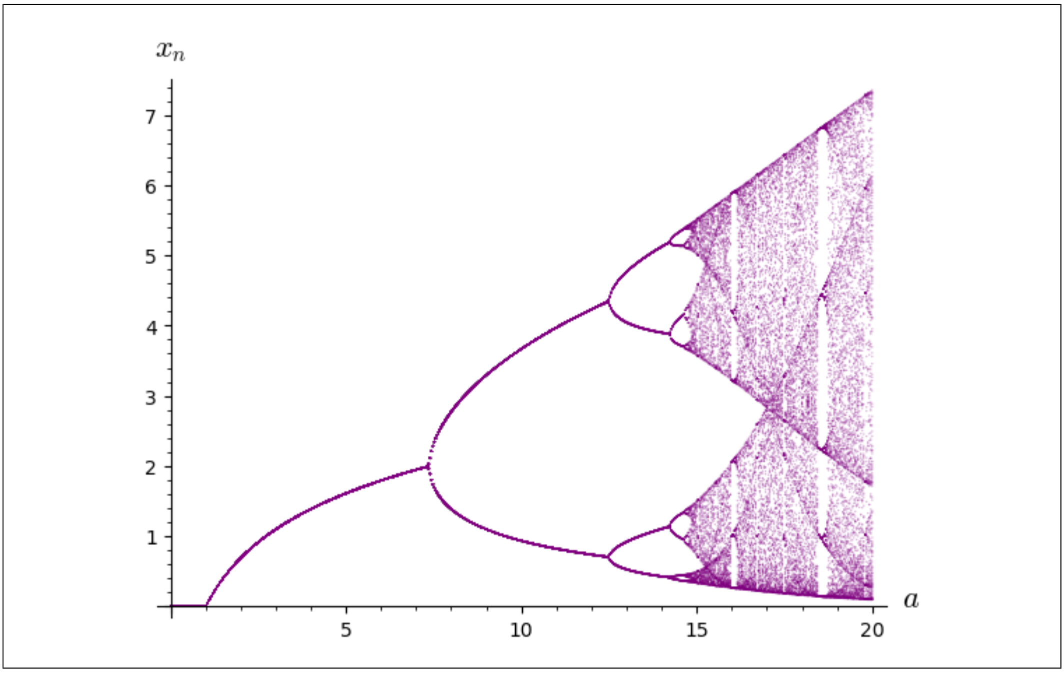
Bifurkacioni dijagram na Slici 1.5 dobijen je interaktivnim softverom na web stranici: https://www.k-interact.net/bifurcation-diagram-1-d za $x_0 = 0.1$ koristeći 500 iteracija. ♣

1.6.3 Vježbe

1.6.1 *Neka je $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ polinom stepena n takav da su svi korijeni njegovog izvoda $p'(x)$ različiti i realni. Tada je $Sp(x) < 0$ ($-\infty$ je uključeno). Dokazati.*

1.6.2 *(Rickerova jednadžba). Promatrajmo populacioni model* $x_{n+1} = H_a(x_n)$, *gdje je* $H_a(x) = axe^{-x}$ *i gdje* x_n *označava gustinu populacije u godini* n, *a* $a > 0$ *je brzina rasta populacije. Pokazati da se ovo preslikavanje podvrgava udvostručavanju perioda u* $a^* = e^2$. *Nacrtati bifurkacioni dijagram za ovo preslikavanje i interpretirati rezultate.*

Uputa: Bifurkacioni dijagram za $x_0 = 0.6$ *i* 500 *itaracija dat je na Slici 1.6.*



Slika 1.6: Bifurkacioni dijagram Rickerovog preslikavanja H_a

1.6.3 *Pokazati da se preslikavanje* $G_a(x) = -(1+a)x + x^3$ *podvrgava bifurkaciji udvostručavanja perioda u* $a^* = 0$. *Nacrtati bifurkacioni dijagram ovog preslikavanja.*

1.6.4 *Promatrajmo diferentnu jednadžbu*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 + p}, \quad n = 0, 1, ..., \quad x_0 \neq 0, \quad A > 0,$$

koja predstavlja Newtonov metod za numeričko rješavanje kubne jednadžbe $x^3 + px + 1 = 0$.

(a) Odrediti tačke ekvilibrijuma i periodične tačke minimalnog perioda dva date jednadžbe.

(b) Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma i periodičnih tačaka minimalnog perioda dva.

(c) Odrediti bifurkacionu vrijednost parametra p kada se javlja udvostručenje perioda.

(d) Nacrtati bifurkacioni dijagram i uporediti ga s prethodno dobijenim rezultatima.

1.6.5 *Izvesti isti proces kao u prethodnom zadatku za diferentne jednadžbu*

$$x_{n+1} = (1-a)\,x_n + ax_n^3, \quad n = 0, 1, ...,$$

(tzv. kubno preslikavanje).

1.6.4 Bifurkacija sedlastog čvora ili tangentna bifurkacija

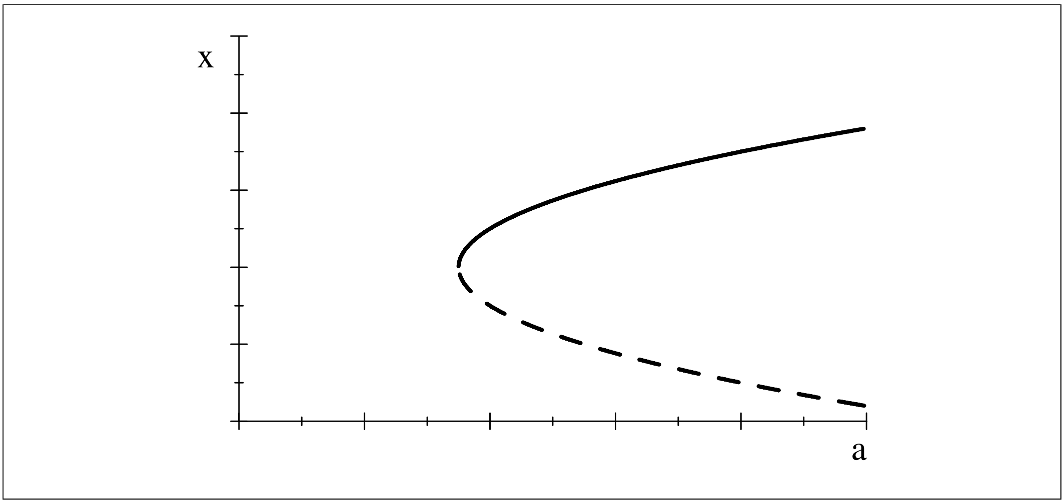
Logističko preslikavanje f_a se podvrgava još jednom zanimljivom tipu bifurkacije poznatom kao **sedlasti čvor** ili **tangentna** bifurkacija. Ova bifurkacija je pridružena pojavi nagiba 1, tj. izvoda jednakog 1. Već smo spomenuli da se periodična orbita perioda tri (odnosno periodične tačke minimalnog perioda tri) javlja za $\widetilde{a} = 1 + \sqrt{8} \approx 3.8284$. Graf preslikavanja f_a^3 za $a < \widetilde{a}$ ima samo dvije presječne tačke sa simetralom prvog kvadranta, to jest postoje samo fiksne tačke tog preslikavanja. U slučaju kad je $a = \widetilde{a}$, tada grafik of f_a^3 dodiruje simetralu prvog kvadranta u tri tačke, čije apcise predstavljaju periodičnu orbitu perioda tri, $\{p_1, p_2, p_3\}$. Kako je, dakle, $\left[f_a^3\,(p_i)\right]' = 1$ i $\left[f_a^3\,(p_i)\right]'' \neq 0$, slijedi da je periodična orbita perioda tri nestabilna (polustabilna je odozdo). Slučaj $a > \widetilde{a}$, kojeg smo već imali na Slici 1.3, krakterističan je po egzistenciji dvije periodične orbite perioda tri. Apcise onih presječnih tačaka grafika sa simetralom prvog kvadranta u kojima je nagib manji od 1 (ima ih tri), čine orbitu koja je atraktirajuća. Druga orbita je nestabilna jer su nagibi u tačkama koje joj odgovaraju veći od 1. Povećanjem parametra a u atraktirajućoj orbiti će nagib $\left(f_a^3\right)'$ opadati ka -1, u kojoj se periodična orbita perioda tri podvrgava bifurkaciji udvostručavanja perioda i pojavi $2^k \times 3$ periodičnih orbita, $k = 1, 2, ...$ Ako smanjujemo a (počev od $\widetilde{a} = 1 + \sqrt{8}$), periodične orbite perioda tri nestaju i tada dinamički sistem ima interesnatan fenomen poznat kao interminentnost. Ponašanje orbite preslikavanja f_a za $a = 2.828$ je takvo da njen dio izgleda kao periodična orbita perioda tri. Tada orbita prelazi u nestalno ponašanje da bi se ponovno vratila u "sablasne" orbite perioda tri. Takvo će se ponašanje ponavljati unedogled i uvijek je povezano s bifurkacijom sedlastog čvora.

Prethodnu diskusiju možemo formalizirati sljedećim teoremom.

Teorem 1.6.7 ***(Bifurkacija sedlastog čvora)*** *Pretpostavimo da je $F_a\,(x) = F\,(a, x)$ jedna C^2 parametarska familija jednodimenzionalnih preslikavanja (to jest, oba izvoda $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}$ postoje i neprekidni su) i $\overline{x}$ je fiksna tačka od F_{a^*}. Pretpostavimo dalje da je*

1. $F'_{a^*}\,(\overline{x}) = 1,$
2. $A = \frac{\partial F}{\partial a}\,(a^*, \overline{x}) \neq 0,$
3. $B = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(a^*, \overline{x}) \neq 0.$

Tada postoji interval I oko $\overline{x}$ i C^2 preslikavanje $a = p(x)$, gdje je $p : I \to \mathbb{R}$ tako da je $p(\overline{x}) = a^*$ i $F_{p(x)}(x) = x$. Osim toga, ako je $AB < 0$, fiksne tačke postoje za $a > a^*$, a ako je $AB > 0$, fiksne tačke postoje za $a < a^*$.



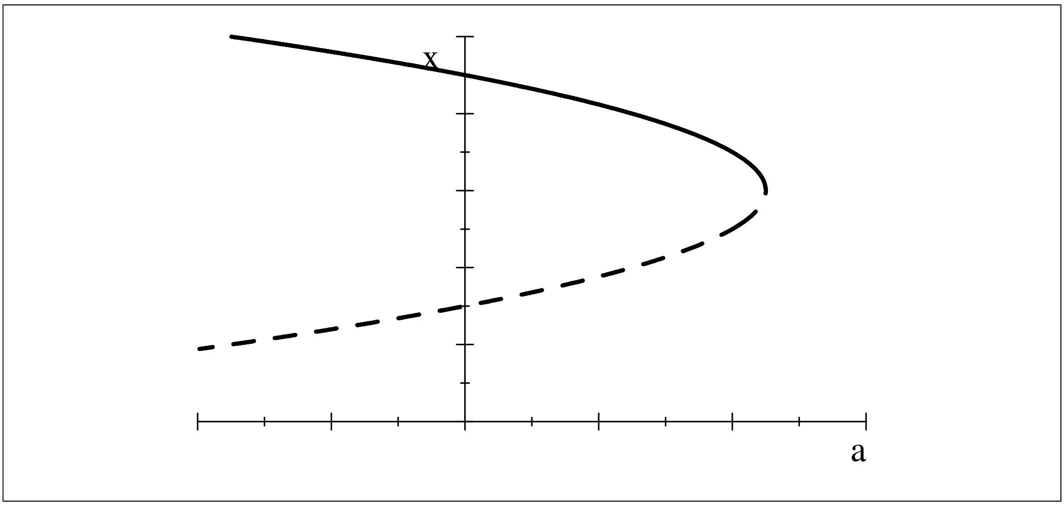
Slika 1.7: Bifurkacija sedlastog čvora kad je $AB < 0$

Napomena 1.6.1 *Tvrdnja prethodnog teorema podrazumijeva da dvije krive od fiksnih tačaka datih sa $a = p(x)$ proizilaze iz fiksne tačke $(a^*, \overline{x})$. Znak od AB određuje smjer te bifurkacije: ako je $AB < 0$, tada je situacija kao na Slici 1.7, a za $AB > 0$ imamo situaciju kao na Slici 1.8.*

Istaknimo još da se javljaju dva tipa bifurkacije kad je $\frac{\partial F}{\partial x}(a^*, \overline{x}) = 1$, ali $\frac{\partial F}{\partial a}(a^*, \overline{x}) = 0$. Prvi tip je poznat pod nazivom **transkritična bifurkacija**, koji se javlja kada je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a^*, \overline{x}) \neq 0$. Primjer takve bifurkacije nastupa u $a^* = 1$, $\overline{x} = 0$ za logističko preslikavanje $f_a(x) = ax(1-x)$. U ovoj bifurkaciji se dvije grane fiksnih tačaka, od kojih je jedna atraktirajuća ($\overline{x} = 0$), a druga nestabilna ($\overline{x} = 1 - \frac{1}{a}$), susreću kad je $a = 1$. Poslije $a = 1$, prva grana $x = 0$ postaje nestabilna, dok druga grana postaje atraktor. Drugim riječima, dolazi do izmjene stabilnosti u $a = 1$. Primijetimo još da je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -2 \neq 0$. (V. Sliku 1.9.)

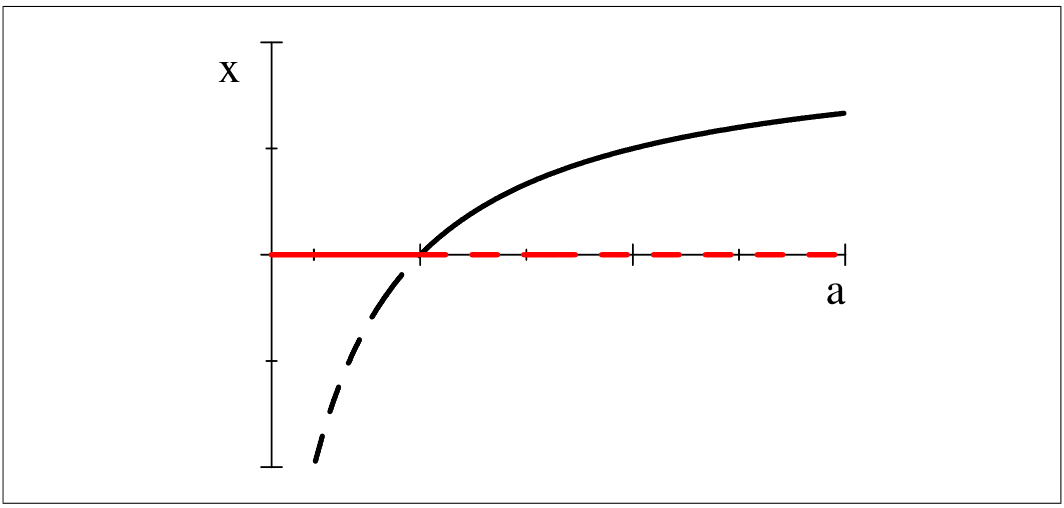
Uočimo, takoder, da preslikavanje H_a iz Primjera 1.6.1 ima transkritičnu bifurkaciju u $a^* = 0$, $\overline{x} = 0$.

Drugi tip bifurkacije, koji nastupa kad je $\frac{\partial F}{\partial x}(a^*, \overline{x}) = 1$ i $\frac{\partial F}{\partial a}(a^*, \overline{x}) = 0$, ali i $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a^*, \overline{x}) = 0$ poznat je **viljuškasta bifurkacija.** Preslikavanje $f_a(x) = ax - x^3$ ima taj tip bifurkacije u $\overline{x} = 0$ i $a^* = 1$. Ovdje je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 0$. Za $0 < a \leq 1$ postoji samo jedna grana atraktirajućih fiksnih tačaka: $x = 0$. Poslije $a = 1$ ova fiksna tačka gubi svoju stabilnost i pojavljuju se dvije nove grane atraktirajućih fiksnih tačaka $x = \pm\sqrt{a-1}$ (Slika 1.10).

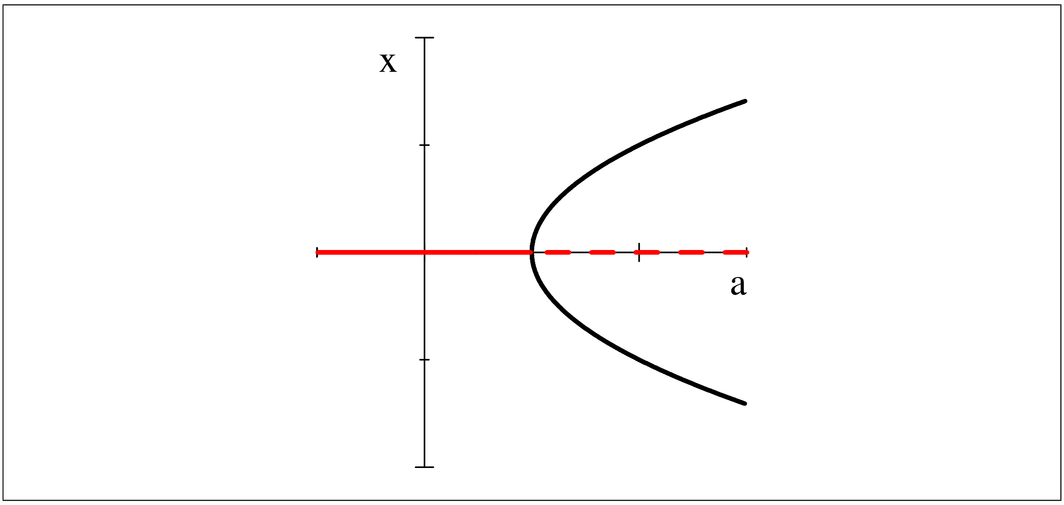


Slika 1.8: Bifurkacija sedlastog čvora kad je $AB > 0$

No, ove dvije bifurkacije nisu esencijalne (generičke) u smislu da bilo koja translacija preslikavanja dovodi do bifurkacije sedlastog čvora. Drugim riječima, preslikavanja $f_a(x) = ax(1-x) + \gamma$, $\gamma \neq 0$ i $g_a(x) = ax - x^3 + \gamma$, $\gamma \neq 0$ izvode bifurkaciju sedlastog čvora.



Slika 1.9: Transkritična bifurkacija



Slika 1.10: Viljuškasta bifurkacija

1.6.5 Vježba

1.6.6 *Za familiju preslikavanja $Q_c(x) = c - x^2$ ispitati koje tipove bifurkacije ima. Skicirati osnovni dio bifurkacionog dijagrama, a softverski nacrtati bifurkacioni dijagram.*

1.6.7 *Pokazati da preslikavanje $H_a(x) = a + x + x^2$ izvodi tangentnu bifurkaciju u $a^* = 0$ i nacrtati njegov bifurkacioni dijagram.*

1.6.8 *Pokazati da preslikavanje $f_a(x) = ax(1-x) + \gamma$, $\gamma \neq 0$ izvodi tangentnu bifurkaciju i skicirati njegov bifurkacioni dijagram.*

1.6.9 *Pokazati da preslikavanje $g_a(x) = ax - x^3 + \gamma$, $\gamma \neq 0$ izvodi tangentnu bifurkaciju i skicirati njegov bifurkacioni dijagram.*

1.6.10 *Promatrajmo sljedeće diferentne jednadžbe:*
(i) Riccatijeva diferentna jednadžba

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{1+x_n}, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

(ii) Racionalna diferentna jednadžba

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{1+x_n^2}, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

(iii) Unimodalna diferentna jednadžba

$$x_{n+1} = a\sin(\pi x_n), \quad n = 0, 1, \dots .$$

Za svaku od ovih jednadži:

(a) Odrediti tačke ekvilibrijuma i periodične tačke minimalnog perioda dva date jednadžbe.

(b) Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma i periodičnih tačaka minimalnog perioda dva.

(c) Odrediti bifurkacionu vrijednost parametra kada se javlja udvostručenje perioda.

(d) Nacrtati bifurkacioni dijagram i uporediti ga s prethodno dobijenim rezultatima.

1.6.11 *Pokazati da prozor perioda* 3 *za logističko preslikavanje* $f_a(x) = ax(1-x)$ *starta u* $a = 1 + \sqrt{8}$.

1.6.6 Lyapunovljevi eksponenti i haotične orbite

Jedna od glavnih karakteritika haotičnih sistema je njegova osjetljiva ovisnost o početnim uvjetima ili, metaforički rečeno, butterfly (leptirov) efekat ("kad u Brazilu leptir mahne krilima, izazove uragan u Sjevernoj Americi"). Drugim riječima, mala razlika u početnim podacima će se značajno uvećati iteracijama, odnosno haotična dinamika je karakterizirana eksponencijalnom divergencijom bliskih početnih tačaka. Ipak, u takvim sistemima kompjuterska izračunavanja mogu biti zavaravajuća. Slijedi formalna definicija osjetljivosti (senzibilnosti).

Definicija 1.6.1 *Za preslikavanje* f *na intervalu* I *kažemo da ima* ***osjetljivu ovisnost*** *o početnim uvjetima, ako postoji* $\nu > 0$ *takav da za bilo koje* $x_0 \in I$ *i* $\delta > 0$*, postoje* $y_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *i* $k \in \mathbb{N}$*, tako da je*

$$\left| f^k(x_0) - f^k(y_0) \right| \geq \nu.$$

Najjednostavniji primjer funkcije s osjetljivom ovisnošću je linearno preslikavanje $f(x) = ax$, $a > 1$. Naime, za početne tačke x_0 i $x_0 + \delta$ vrijedi

$$f^k(x_0 + \delta) - f^k(x_0) = a^k(x_0 + \delta) - a^k x_0 = a^k \delta.$$

Dakle, $\left|f^k(x_0 + \delta) - f^k(x_0)\right|$ će neograničeno rasti u ∞ kad k teži ka ∞, kako god malo δ uzeli. Ipak, linearno preslikavanje nije zanimljiv primjer budući da ono ne posjeduje bilo koju od osobina haosa.

Kako smo ranije nagovijestili, mnogo zanimljivijhi primjer je logističko preslikavanje, konkretno $f_4(x) = 4x(1-x)$. Ako se uzmu početni uvjeti $x_0 = 0.09$ i $x_0 + \delta = 0.11$, uočit ćemo da će se nakon svake iteracije greška skoro udvostručavati. Sličan se fenomen pojavljuje i kod tent preslikavanj T.

Za mjerenje divergencije (razilaženja) dviju orbita koje startaju u početnim uvjetima koji se malo razlikuju, x_0 i $x_0 \pm \delta$, koristi se tzv. **Lyapunovljev eksponent**. Neka je greška u n-toj iteraciji

$$e_n = \left| f^n(x_0) - f^n(x_0 + \delta) \right|,$$

a relativna greška

$$\left|\frac{e_n}{\delta}\right| = \frac{|f^n(x_0) - f^n(x_0+\delta)|}{\delta}.$$

Ako preslikavanje f ima osjetljivu ovisnost o početnim uvjetima, mi očekujemo da će relativna greška rasti eksponencijalno sa n, pa je

$$e^{n\lambda} = \lim_{\delta\to 0}\frac{e_n}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\left|\frac{f^n(x_0) - f^n(x_0+\delta)}{\delta}\right|, \quad \text{za neko } \lambda > 0.$$

Otuda je

$$e^{\lambda n} = \left|\frac{d}{dx}f^n(x_0)\right| = \left|f'(x_0)\, f'(x_1) ... f'(x_{n-1})\right|,$$

odnosno

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left|f'(x_k)\right| \quad \left(= \ln\left[\left|f'(x_0)\right|\left|f'(x_1)\right| ... \left|f'(x_{n-1})\right|\right]^{\frac{1}{n}}\right)$$

Ovo nam sugerira da definiramo Lyapunovljev eksponent $\lambda(x_0)$ za preslikavanje f kao

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|[f^n(x_0)]'\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left|f'(x_k)\right|. \tag{1.37}$$

Slijedi i formalna definicija Lyapunovljevog eksponenta i Lyapunovljevog broja.

Definicija 1.6.2 *Neka je f glatko preslikavanje na $\mathbb{R}$ i x_0 data početna tačka.* ***Lyapunovljev eksponent*** *$\lambda(x_0)$ preslikavanja f dat je formulom (1.37), uz pretpostavku da limes postoji. U slučaju kad je bilo koji od izvoda jednak nuli, smatrat ćemo da je $\lambda(x_0) = -\infty$. Lyapunovljev broj $L(x_0)$ se definira kao eksponent Lyapunovljevog eksponenta, kad god ovaj drugi postoji, to jest*

$$L(x_0) = e^{\lambda(x_0)}.$$

Uočimo sljedeće: ako primjenom preslikavanja na dvije bliske početne vrijednosti dovodi do dvije udaljenije tačke, tada je apsolutna vrijednost izvoda preslikavanja veća od 1 kada se računa u ovim tačkama orbite, pa je zbog toga logaritam te apsolutne vrijednosti pozitivan. Ako se tačke orbite neprekidno razilaze, tada je brzina promjene logaritma apsolutnih vrijednosti derivacija pozitivna, a time i prisutnost osjetljive zavisnosti o početnim uvjetima. Kao što ćemo vidjeti u sljedećim primjerima, ako je Lyapunovljev eksponent pozitivan, onda postoji osjetljiva zavisnost o početnim uvjetima.

Primjer 1.6.2 *Naći Lyapunovljev eksponent od tent preslikavanja*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \textit{for } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \textit{for } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Rješenje. Neka je $x_0 \in (0,1)$. Tada je

$$T(x_k) = \begin{cases} 2x_k & \text{for } 0 \leq x_k \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x_k) & \text{for } \frac{1}{2} < x_k \leq 1, \end{cases}$$

pa je $|T'(x_k)| = 2$. Prema (1.37), imamo

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln 2 = \ln 2 \approx 0.6931.$$

Ovo implicira da tent preslikavanje posjeduje osjetljivu ovisnost o početnim uvjetima. ♣

Vrlo često je Lyapunovljeve eksponente za različite vrijednosti parametra nemoguće egzaktno itračunati, pa se koristi numerički pristup. Objasnimo to u slučaju logističkog preslikavanja $f_a(x) = ax(1-x)$. Za fiksnu vrijednost parametra a startujmo s početnom tačkom x_0 (npr. 0.5). Odbacimo prvih 400 iteracija i izračunajmo dodatnih 100 iteracija. Lyapunovljev eksponent se može sada aproksimirati formulom

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{100} \sum_{k=401}^{500} \ln|a - 2ax_k|.$$

Startujući s $a = 3$ i nastavljajući izračunavanje po gornjoj formuli u svakoj narednoj vrijednosti s korakom $\frac{1}{1000}$, zaključno s $a = 4$, i ucrtavajući dobijene vrijednosti u (a, λ) koordinatnu ravan, dobit ćemo graf Lyapunovljevih eksponenata logističkog preslikavanja f_a kao funkciju od a.

Negativni šiljci odgovaraju 2^2 periodičnim orbitama gdje imamo stabilnu periodičnu orbitu koja nema osjetljivu ovisnost. Takoder, λ ostaje negativan za $3 < a < a_\infty \approx 3.57$ i prilazi ka nuli u bifurkaciji udvostručavanja perioda. Kad λ raste ka 4, on oscilira izmedu pozitivnih i negativnih vrijednosti. Pozitivne vrijednosti od λ rastu ka $\ln 2$ kako smo bliži i bliži $\lambda = 4$, što demonstrira da je f_a sve osjetljiviji na početne uvjete.

Povežimo sada Lyapunovljeve eksponente s haotičnim ponašanjem orbita. Uvest ćemo prvo pojam asimptotski periodičnih orbita.

Orbita $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ se naziva **asimptotski periodičnom** ako postoji periodična orbita $\{y_1, y_2, y_3, ...\}$ takva da je

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Sad smo spremni definirati haotične orbite u smislu Yorka.

Definicija 1.6.3 ***(Haotične orbite u smislu Yorka)***

Neka je f preslikavanje na $\mathbb{R}$ i neka je $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ ograničena orbita od f. Ta orbita je haotična ako

1. $\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ *nije asimptotski periodična,*
2. *ni jedan Lyapunovljev eksponent nije 0,*
3. $\lambda(x_0) > 0.$

1.6.7 Vježba

Gruba procjena Lyapunovljevog koeficijenta $\lambda(x_0)$ preslikavanja f može biti dobijena formulom

$$\lambda(x_0) \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{e_n}{\delta} \right|. \tag{1.38}$$

U zadacima 1.6.12-1.6.15, koristiti formulu (1.38) za aproksimaciju Lyapunovljevog eksponenta.

1.6.12 $f(x) = 4x^3 - 3x$ *na* $[-1, 1]$, $n = 5, 6, 7$, $x_0 = 0.1$, $\delta = 0.01$

1.6.13 $f(x) = 4x(1 - x)$ *na* $[0, 1]$, $n = 5, 6, 7$, $x_0 = 0.1$, $\delta = 0.01$

1.6.14 $f(x) = 8x^4 - 8x^2$ *na* $[-1, 1]$, $n = 5, 6, 7$, $x_0 = 0.1$, $\delta = 0.01$

1.6.15 $f(x) = \sin x$ *na* $[0, 2\pi]$, $n = 5, 6, 7$, $x_0 = 0.3$, $\delta = 0.01$

1.6.16 *(a) Naći Lyapunovljev eksponent Bakerovog preslikavanja*

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{for } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

(b) Pokazati direktno da B posjeduje osjetljivu ovisnost o početnim uvjetima.

1.6.17 *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{for } 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ 2 - 3x & \text{for } \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3} \\ 3 - 3x & \text{for } \frac{2}{3} < x \le 1. \end{cases}$$

(a) Naći Lyapunovljev koeficijent od f.
(b) Pokazati direktno da f ima osjetljivu ovisnost o početnim uvjetima.

1.6.18 *Promatrajmo generaliziranio Bakerovo preslikavanje*

$$B_a(x) = \begin{cases} 2ax & \text{for } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ a(2x - 1) & \text{for } \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases}$$

gdje je $a > 0$.
(a) Izračunati Lyapunovljev eksponent od B_a.
(b) Odrediti vrijednosti od a za koje B_a ima osjetljivu ovisnos o početnim uvjetima.

Poglavlje 2

Dinamika dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema

2.1 Uvod

Neka je F vektorsko preslikavanje tako da $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, odnosno $F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$, gdje su $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tada se

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

naziva sistemom diferentnih jednadžbi u ravni, odnosno dvodimenzionalnim diskretnim dinamičkim sistemom. Sistem (2.1) možemo pisati i u obliku

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n, v_n) \\ v_{n+1} &= g(u_n, v_n) \end{aligned} \quad n = 0, 1, ..., \tag{2.2}$$

uzimajući da je $X = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, a $u, v \in \mathbb{R}$.

Također ćemo razmatrati i diferentnu jednadžbu drugog reda

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, ..., \tag{2.3}$$

koja se može napisatin u obliku (2.1), tako da i ona spada u klasu dvodimezionalnih dinamičkih sistema. Zaista, uvođenjem smjena

$$\begin{aligned} u_n &= x_{n-1}, \\ v_n &= x_n, \end{aligned}$$

dobijamo sistem diferentnih jednadžbi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n, \\ v_{n+1} &= f(v_n, u_n). \end{aligned}$$

Označimo sa $\|\cdot\|$ bilo koju normu vektora i pridruženu normu matrice, kako bismo mogli uvesti definicije tačke ekvilibrijuma i periodičnih tačaka DDS (2.1).

Definicija 2.1.1

1. ***Tačka ekvilibrijuma*** *DDS (2.1), odnosno DDS (2.2) je tačka* $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ *takva da je*

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\overline{x}, \overline{y}) \\ g(\overline{x}, \overline{y}) \end{pmatrix}.$$

   To jest, $\overline{X}$ *je* ***fiksna tačka*** *funkcije* F.

2. ***Periodična tačka*** *perioda* m *DDS (2.1) je tačka* $P = (r, s) \in \mathbb{R}^2$ *takva da je ona tačka ekvilibrijuma* m*-te iteracije* F^m *preslikavanja* F.

3. *Neka je* (x_0, y_0) *data tačka iz* $\mathbb{R}^2$*. Parovi* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...$ *koji su definirani induktivno pomoću (2.2) nazivaju se* ***iteracijama*** *od* (x_0, y_0)*, a niz* $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *se naziva* ***pozitivnom orbitom*** *od* (x_0, y_0) *i označava se sa*

$$\mathcal{O}^+((x_0, y_0)).$$

   Dakle,

$$\mathcal{O}^+((x_0, y_0)) = \left\{(x_0, y_0), F(x_0, y_0), ..., F^k(x_0, y_0), ...\right\}.$$

4. *Ako je preslikavanje* F *invertibilno, definiramo negativnu orbitu od* (x_0, y_0) *da bude*

$$\mathcal{O}^-((x_0, y_0)) = \left\{(x_0, y_0), F^{-1}(x_0, y_0), ..., F^{-k}(x_0, y_0), ...\right\},$$

   gdje F^{-n} *označava* n*-tu kompoziciju od* F^{-1} *sa samim sobom.*

5. *Kada postoje obje, i pozitivna i negativna orbita, tada se* ***orbitom*** *od* (x_0, y_0) *naziva unija pozitivne i negativne orbite:*

$$\mathcal{O}((x_0, y_0)) = \mathcal{O}^+((x_0, y_0)) \cup \mathcal{O}^-((x_0, y_0)) \ .$$

U slučaju diferentne jednadžbe drugog reda (2.3) definiramo njenu tačku ekvilibrijuma, odnosno fiksnu tačku preslikavanja f, kao tačku $\overline{x} \in \mathbb{R}$ za koju vrijedi $\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x})$. Periodičnom tačkom minimalnog perioda dva jednadžbe (2.3) nazivamo tačku $P = (p, q) \in \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi

$$p = f(p, q) \quad \text{i} \quad q = f(q, p).$$

2.2 Stabilnost

Definicija 2.2.1

1. *Tačka ekvilibrijuma $\overline{X}$ DDS (2.1) se naziva* ***stabilnom*** *(ili* ***lokalno stabilnom****) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \delta$ implicira $\left\|X_n - \overline{X}\right\| < \varepsilon$ za sve $n \geqslant 0$. Inače se ekvilibrijum $\overline{X}$ naziva* ***nestabilnim****.*

2. *Tačka ekvilibrijuma $\overline{X}$ DDS (2.1) se naziva* ***asimptotski stabilnom*** *(ili* ***lokalno asimptotski stabilnom****) ako je ona stabilna i postoji $\gamma > 0$ tako da $\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \gamma$ implicira*
$$\lim_{n\to\infty} \left\|X_n - \overline{X}\right\| = 0.$$

3. *Tačka ekvilibrijuma $\overline{X}$ DDS (2.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom*** *ako je ona asimptotski stabilna i ako, za svako X_0, vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty} \left\|X_n - \overline{X}\right\| = 0.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma $\overline{X}$ DDS (2.1) se naziva* ***globalno asimptotski stabilnom u odnosu na skup*** *$S \subset \mathbb{R}^2$ ako je ona asimptotski stabilna i ako, za svako $X_0 \in S$, vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty} \left\|X_n - \overline{X}\right\| = 0.$$

5. *Tačka ekvilibrijuma $\overline{X}$ DDS (2.1) se naziva* ***globalni atraktor*** *sa skupom $S \subset \mathbb{R}^2$ kao oblašću privlačenja, ako je*
$$\lim_{n\to\infty} X_n = \overline{X}$$
za svako rješenje s početnim uvjetom $X_0 \in S$.

Napomena 2.2.1 *Pojmovi stabilnosti i asimptotske stabilnosti periodičnih tačaka definiraju se analogno.*

2.2.1 Stabilnost linearnih sistema

Razmatrajmo specijalan slučaj sistema (2.1) za $F(X) = AX$, gdje je A matrica formata 2×2, odnosno sistem

$$X_{n+1} = AX_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{2.4}$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$\kappa(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + p\lambda + q,$$

gdje je $p = TrA$ i $q = \det A$, a karakteristična jednadžba matrice A je

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su dati sa

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

Ukoliko je $|\lambda_-| < 1$ i $|\lambda_+| < 1$, ekvilibrijum $\overline{X} = (0,0)$ je lokalno asimptotski stabilan. Iz ovog slijedi sljedeći jednostavni kriterij za loklnu asimptotsku stabilnost $\overline{X} = (0,0)$.

Teorem 2.2.1 *[1, 2, 4] Tačka ekvilibrijuma $\overline{X} = (0,0)$ sistema (2.4) je lokalno asimptotski stabilna ako vrijede sljedeća tri uvjeta:*

(i)

$$1 + p + q > 0, \tag{2.5}$$

(ii)

$$1 - p + q > 0, \tag{2.6}$$

(iii)

$$q < 1, \tag{2.7}$$

ili što je ekvivalentno s

$$|p| < 1 + q < 2. \tag{2.8}$$

Dokaz. Dokaz ostavljamo čitaocu kao Zadatak 2.2.5. ∎

Primijetimo da je rješenje sistema (2.4) dato sa

$$X_n = A^n X_0,$$

tako da je pri tome glavni problem izračunavanje matrice A^n za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Ovdje ćemo demonstrirati dva načina izračunavanja te matrice: binomnom formulom i korištenjem Hamilton-Cayleyevog teorema.

Primjena binomne formule bazirana je na sljedećem teoremu.

Teorem 2.2.2 *Ako matrice A i B komutiraju, to jest ako je $AB = BA$, tada vrijedi*

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Ideja je da se matrica A napiše u obliku zbira $A = \alpha I + B$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), gdje je B relativno jednostavna matrica u smislu da je $B^k = \mathbf{0}$, za neki ne veliki broj k. Kako matrice I i B komutiraju, može se primijeniti prethodni teorem.

Primjer 2.2.1 *Izračunati matricu A^n ako je* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Rješenje. Kako je

$$A = \frac{1}{2}I + B,$$

gdje je $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B^k = \mathbf{0}$ za sve $k = 2, 3, ...$, prema binomnoj formuli imamo

$$A^n = \left(\frac{1}{2}I + B\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k} B^k = \frac{1}{2^n}I + n\frac{1}{2^{n-1}}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{bmatrix}.$$

♣

Drugi način izračunavanja matrice A^n je zasnovan na sljedećem dobro poznatom teoremu iz linearne algebre.

Teorem 2.2.3 ***(Hamilton-Cayleyev teorem)*** *Svaka kvadratna matrica A zadovoljava svoju karakteristiènu jednadžbu, to jest*

$$\kappa\,(A) = \mathbf{0}, \tag{2.9}$$

gdje je $\mathbf{0}$ *nula-matrica.*

Primjer 2.2.2 *Koristeći Teorem 2.2.3 izračunajmo A^n za matricu A iz Primjera 2.2.1.*

Rješenje. Karakteristični polinom matrice A je

$$\kappa\,(A) = \det\,(A - \lambda I) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2,$$

odakle je $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}$. Prema Teoremu 2.2.3 vrijedi

$$\kappa\,(A) = A^2 - A + \frac{1}{4}I = \mathbf{0},$$

odakle se, množenjem s A^n, dobije

$$A^{n+2} - A^{n+1} + \frac{1}{4}A^n = \mathbf{0},$$

što je diferentna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima, čije je opće rješenje dato s

$$A^n = (C_1 + nC_2)\,\frac{1}{2^n},$$

gdje su C_1 i C_2 konstantne matrice koje odredimo iz početnih uvjeta:

$$n = 0 \Longrightarrow A^0 = C_1 \Longrightarrow C_1 = I,$$

$$n = 1 \Longrightarrow A = (C_1 + C_2)\,\frac{1}{2} \Longrightarrow C_2 = 2A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$A^n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{2^n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{bmatrix}.$$

♣

2.2.2 Vježba

2.2.1 *Izračunati matricu A^n $(n \in \mathbb{N})$ koristeći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A:*

1. $A = \begin{bmatrix} -4.5 & 5 \\ -7.5 & 8 \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$,
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$,
4. $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2.2 *Neka je $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran sa $L(X) = AX$, gdje je A iz Zadatka 2.2.1 pod 1. Izračunati $L^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

2.2.3 *Riješiti diferentnu jednadžbu $X_{n+1} = AX_n$, gdje je A iz Zadatka 2.2.1 pod 2. i $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

2.2.4 *Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran sa $F(X) = AX$, gdje je A iz Zadatka 2.2.1 pod 4. Izračunati $L^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*

2.2.5 *Dokazati Teorem 2.2.1.*

2.2.6 *Odrediti lokalnu stabilnost tačke ekvilibrijuma sistema $X_{n+1} = AX_n$, gdje je:*

1. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$,
3. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$,
5. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$.

2.2.7 *Pokazati: ako je $\overline{X}$ fiksna tačka linearnog preslikavanja F na $\mathbb{R}^2$ i ako je ona lokalno asimptotski stabilna, tada ona mora biti i globalno asimptotski stabilna.*

2.2.3 Stabilnost preko linearizacije

Definicija 2.2.2 *1. Ako je $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y})$ fiksna tačka glatkog (neprekidno diferencijabilnog) preslikavanja $F = (f, g)$ i ako je $JF(\overline{x}, \overline{y})$ Jakobijeva matrica od F u tački $(\overline{x}, \overline{y})$, tj.*

$$J_F(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \end{bmatrix}$$

onda se linearno preslikavanje $J_F(\overline{x}, \overline{y}) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dato sa

$$J_F(\overline{x}, \overline{y})(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\, y \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\, x + \frac{\partial g}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\, y \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

naziva ***linearizacijom*** *preslikavanja F u fiksnoj tački $(\overline{x}, \overline{y})$.*

2. Za tačku ekvilibrijuma $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y})$ preslikavanja $(x, y) \longrightarrow F(x, y)$ kažemo da je ***hiperbolička*** *ako je preslikavanje (2.10) hiperboličko, to jest, ako Jakobijan $J_F(x, y)$ u $(\overline{x}, \overline{y})$ nema svojstvenih vrijednosti po modulu jednakih jedan. Inače se tačka naziva* ***nehiperboličkom****.*

Glavni rezultat u analizi linearizirane stabilnosti je sljedeći rezultat.

Teorem 2.2.4 (Linearizirana stabilnost) *[5] Neka je $F = (f, g)$ jedna C^1 funkcija definirana na otvorenom skupu W u $\mathbb{R}^2$ i neka je $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y}) \in W$ tačka ekvilibrijuma od F. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) *Ako sve svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\overline{x}, \overline{y})$ leže u otvorenom disku $|\lambda| < 1$, onda je ekvilibrijum $(\overline{x}, \overline{y})$ asimptotski stabilan.*

(b) *Ako je bar jedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\overline{x}, \overline{y})$ po modulu veća od jedan, tada je ekvilibrijum $(\overline{x}, \overline{y})$ nestabilan.*

Napomena 2.2.2 *(a) Ako je hiperbolički ekvilibrijum $(\overline{x}, \overline{y})$ asimptotski stabilan, tada postoji otvorena okolina O tačke $(\overline{x}, \overline{y})$ u kojoj sve tačke konvergiraju ka tački ekvilibrijuma pod pozitivnim iteracijama, tj.*

$$F^n(a, b) \longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \qquad \text{za svako} \qquad (a, b) \in O.$$

Takav ekvilibrijum se naziva ***sink*** *ili* ***atraktivni ekvilibrijum****.*

(b) Kad je ekvilibrijum nestabilan, tada postoje dvije kvalitativno različite situacije.

*1. Ako su obje svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\overline{x}, \overline{y})$ po modulu veće od 1, tada postoji otvorena okolina O tačke $(\overline{x}, \overline{y})$ u kojoj sve tačke konvergiraju ka tački ekvilibrijuma pod negativnim iteracijama. Takav ekvilibrijum se naziva **izvor** ili **repeler**.*

*2. Ako je jedna svojstvena vrijednost Jakobijana $J_F(\overline{x}, \overline{y})$ po modulu manja a druga veća od 1, tada u svakoj otvorenoj okolini tačke ekvilibrijuma neke tačke konvergiraju ka ekvilibrijumu pod pozitivnim iteracijama dok druge konvergiraju ka ekvilibrijumu pod negativnim iteracijama. Takav ekvilibrijum se naziva **sedlasta tačka**.*

Prije nego navedemo uvjete koje trebaju zadovoljavati svojstvene vrijednosti Jakobijana $J_F(\overline{x}, \overline{y})$ da bi tačka ekvilibrijuma bila lokalno asimptotski stabilna, repeler ili sedlasta tačka, biće nam potreban *Schur-Cohnov kriterij*, odnosno *Routh-Hurwitzov kriterij.*

Teorem 2.2.5 (Routh-Hurwitzov kriterij) *[4] Promatrajmo polinomsku jednadžbu*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2.11}$$

s realnim koeficijentima i $a_0 > 0$. Potreban i dovoljan uvjet da svi korijeni jednadžbe (2.11) imaju negativan realni dio je

$$\triangle_k > 0 \quad za \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

gdje je $\triangle_k$ principijelni minor reda k matrice reda $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Potrebni i dovoljni uvjeti da svi korijeni jednadžbe (2.11) leže u otvorenom jediničnom disku $|\lambda| < 1$ su pronadeni pomoću Routh-Hurwitzovog kriterija i činjenice da Möbiusova transformacija

$$z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

transformira otvoreni jedinični disk iz λ-ravni u otvorenu lijevu poluravan u z-ravni.

Teorem 2.2.6 (Schur-Cohnov kriterij) *[4] Jednadžba (2.11) ima sve svoje korijene u otvorenom jediničnom disku $|\lambda| < 1$ ako i samo ako jednadžba*

$$P\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$$

ima sve svoje korijene u lijevoj poluravni $Re(z) < 0$.

Primjenom Schur-Cohnovog kriterija dobija se sljedeći rezultat za asimptotsku stabilnost ekvilibrijuma nula diferentne jednadžbe drugog reda

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.13}$$

Teorem 2.2.7 *[4] Neka su $p, q \in \mathbb{R}$. Tada je potreban i dovoljan uvjet za asimptotsku stabilnost jednadžbe (2.13) da je*

$$|p| < 1 + q < 2.$$

Bazirajući se na Schur-Cohnovom kriteriju, mi možemo dati eksplicitne uvjete da tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.3) bude lokalni sink, izvor (repeler), sedlasta tačka ili nehiperbolički ekvilibrijum.

Prije toga neophodno je napraviti linearizaciju jednadžbe (2.3). Već smo vidjeli da uvodenjem smjena

$$\begin{aligned} u_n &= x_{n-1}, \\ v_n &= x_n, \end{aligned}$$

dobijamo sistem diferentnih jednadžbi

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n, \\ v_{n+1} = f(v_n, u_n). \end{cases} \tag{2.14}$$

Očito je da ako je $\overline{x}$ tačka ekvilibrijuma jednadžbe (2.3), onda je $(\overline{x}, \overline{x})$ tačka ekvilibrijuma sistema (2.14). Prema (2.10) linearizacija sistema (2.14) je oblika

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(v)\, u_n + \frac{\partial}{\partial v}(v)\, v_n \\ \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{x})\, v_n + \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{x})\, u_n \end{bmatrix},$$

odakle dobijemo

$$v_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{x})\, v_n + \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{x})\, v_{n-1},$$

što predstavlja lineariziranu jednadžbu jednadžbe (2.3) oko $\overline{x}$.

Ako

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{x}), \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{x})$$

označavaju parcijalne derivacije funkcije $f(u, v)$ izračunate u ekvilibrijumu jednadžbe (2.3), tada se jednadžba

$$v_{n+1} = pv_n + qv_{n-1}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.15}$$

naziva *lineariziranom* jednadžbom koja je pridružena jednadžbi (2.3) u tački $\overline{x}$.

Teorem 2.2.8 ***(Linearizirana stabilnost A)****(v. [5])*
Promatrajmo diferentnu jednadžbu (2.3) i njoj pridruženu lineariziranu jednadžbu (2.15).

1. *Ako su oba korijena kvadratne jednadžbe*

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0, \tag{2.16}$$

u otvorenom jediničnom disku , onda je ekvilibrijum $\overline{x}$ jednadžbe (2.3) ***lokalno asimptotski stabilan****.*

2. *Ako je barem jedan od korijena jednadžbe (2.16) po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan, onda je ekvilibrijum $\overline{x}$ jednadžbe (2.3)* ***nestabilan****.*

3. *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednadžbe (2.3) leže u otvorenom jediničnom disku je*

$$|p| < 1 - q < 2. \tag{2.17}$$

U tom slučaju lokalno asimptotski stabilan ekvilibrijum $\overline{x}$ se naziva ***sink****.*

4. *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednadžbe (2.16) budu po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan je*

$$|p| < |1 - q| \qquad i \qquad |q| > 1. \tag{2.18}$$

U tom slučaju nestabilan ekvilibrijum $\overline{x}$ se naziva ***repeler ili izvor****.*

5. *Potreban i dovoljan uvjet da jednadžba (2.16) ima jedan korijen po apsolutnoj vrijednosti veći od jedan, a drugi po apsolutnoj vrijednosti manji od jedan je*

$$|p| > |1 - q| \quad i \quad p^2 + 4q > 0.$$

U tom slučaju nestabilan ekvilibrijum $\overline{x}$ zove se ***sedlo****.*

6. *Potreban i dovoljan uvjet da oba korijena jednadžbe (2.3) leže na jediničnom disku je*

$$|p| = |1 - q| \quad ili \quad q = -1 \quad i \quad |p| \leq 2.$$

U tom slučaju ekvilibrijum $\overline{x}$ se naziva ***nehiperboličkim ekvilibrijumom****.*

Teorem 2.2.9 *(v. [5])*

1. *Tačka ekvilibrijuma $(\overline{x}, \overline{y})$ DDS (2.1) je lokalno asimptotski stabilna ako svako rješenje karakteristične jednadžbe*

$$\lambda^2 - TrJ_F(\overline{x}, \overline{y})\,\lambda + DetJ_F(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \tag{2.19}$$

leži unutar jediničnog kruga. Potreban i dovoljan uvjet da svako rješenje karakteristične jednadžbe (2.19) leži unutar jediničnog kruga je

$$|TrJ_F(\overline{x}, \overline{y})| < 1 + DetJ_F(\overline{x}, \overline{y}) < 2.$$

2. *Slično, tačka ekvilibrijuma $(\overline{x},\overline{y})$ DDS (2.1) je lokalni repeler ako svako rješenje karakteristične jednadžbe (2.19) leži izvan jediničnog kruga. Potreban i dovoljan uvjet da svako rješenje karakteristične jednadžbe (2.19) leži izvan jediničnog kruga je*

$$|TrJ_F(\overline{x},\overline{y})| < |1 + DetJ_F(\overline{x},\overline{y})| \qquad i \qquad |DetJ_F(\overline{x},\overline{y})| > 1.$$

3. *Tačka ekvilibrijuma $(\overline{x},\overline{y})$ DDS (2.1) je lokalna sedlasta tačka ako karakteristična jednadžba (2.19) ima jedan korijen koji leži unutar jediničnog kruga i jedan korijen koji leži izvan jediničnog kruga. Potreban i dovoljan uvjet da jedan korijen leži unutar jediničnog kruga i jedan korijen leži izvan jediničnog kruga je*

$$|TrJ_F(\overline{x},\overline{y})| > |1 + DetJ_F(\overline{x},\overline{y})| \quad i \quad TrJ_F(\overline{x},\overline{y})^2 - 4DetJ_F(\overline{x},\overline{y}) > 0.$$

4. *Tačka ekvilibrijuma $(\overline{x},\overline{y})$ DDS (2.1) je nehiperbolička ako i samo ako karakteristična jednadžba (2.19) ima bar jedan korijen koji leži na jediničnoj kružnici, to jest ako i samo ako je*

$$|TrJ_F(\overline{x},\overline{y})| = |1 + DetJ_F(\overline{x},\overline{y})|$$

ili

$$DetJ_F(\overline{x},\overline{y}) = 1 \quad i \quad TrJ_F(\overline{x},\overline{y}) \leq 2.$$

U slučaju nehiperboličkog ekvilibrijuma situacija je znatno složenija u određivanju karaktera njegove stabilnosti i potrebno je, općenito govoreći, izvršiti specijalna razmatranja. Preciznije, karakter stabilnosti tačke ekvilibrijuma u ovom slučaju se određuje pomoću članova višeg reda u Taylorovom razvoju za preslikavanje F.

Primjer 2.2.3 *U DDS*

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n\frac{y_n}{1+y_n} \\ y_{n+1} &= By_n\frac{x_n}{1+x_n} \end{aligned}\right\}, \quad n = 0,1,2,\dots\,,$$

koji je razmatran detaljno u [6], odrediti nenegativne tačke ekvilibrijuma i ispitati lokalnu stabilnost tih tačaka uz pretpostavku $A > 0$ i $B > 0$.

Rješenje. Tačke ekvilibrijuma promatranog DDS su rješenja sistema jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= A\overline{x}\frac{\overline{y}}{1+\overline{y}} \\ \overline{y} &= B\overline{y}\frac{\overline{x}}{1+\overline{x}} \end{aligned}\right\},$$

odakle slijedi da postoje dva nenegativna ekvilibrijuma: $E_0 = (0,0)$, za sve vrijednosti parametara $A > 0$ i $B > 0$, te $E_1 = \left(\frac{1}{B-1}, \frac{1}{A-1}\right)$, za $A > 1$ i $B > 1$. Kako je

$$f(x,y) = A\frac{xy}{1+y}, \quad g(x,y) = B\frac{xy}{1+x},$$

to je Jakobijeva matrica preslikavanja $F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ u proizvoljnoj tački (x,y) oblika

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Ay}{1+y} & \frac{Ax}{(1+y)^2} \\ \frac{By}{(1+x)^2} & \frac{Bx}{1+x} \end{bmatrix}.$$

Zbog toga je

$$J_F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

čije su svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = 0$, pa je ekvilibrijum E_0 lokalno asimptotski stabilan za sve vrijednosti parametara $A > 0$ i $B > 0$.

S druge strane, imamo

$$J_F(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(A-1)^2}{A(B-1)} \\ \frac{(B-1)^2}{B(A-1)} & 1 \end{bmatrix},$$

čija je karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 - 2\lambda + \left(1 - \frac{(A-1)(B-1)}{AB}\right)$$

i odgovarajuće svojstvene vrijednosti $\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\frac{(A-1)(B-1)}{AB}}$. Kako je $0 < \frac{(A-1)(B-1)}{AB} < \frac{AB}{AB} = 1$, to je $\lambda_+ > 1$ i $0 < \lambda_- < 1$, ekvilibrijum E_1 je nestabilan, preciznije sedlasta tačka. ♣

Primjer 2.2.4 *U Pielouovoj (Beverton-Holtovoj) logističkoj jednadžbi s kašnjenjem*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{1 + bx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{2.20}$$

$a > 0$ i $b > 0$, odrediti nenegativne tačke ekvilibrijuma i ispitati njihovu lokalnu stabilnost.

Rješenje. Tačke ekvilibrijuma jednadžbe (2.20) su rješenja jednadžbe

$$\overline{x} = \frac{a\overline{x}}{1 + b\overline{x}},$$

odnosno $\overline{x}_1 = 0$, za sve vrijednosti parametara $a > 0$ i $b > 0$, te $\overline{x}_2 = \frac{a-1}{b}$, za $a > 1$ i $b > 0$. Kako je $f(u, v) = \frac{au}{1+bv}$, to je

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{x}) = \frac{a}{1 + b\overline{x}}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{x}) = -\frac{ab\overline{x}}{(1 + b\overline{x})^2},$$

te je linearizirana jednadžba jednadžbe (2.20)

$$y_{n+1} - \frac{a}{1 + b\overline{x}} y_n + \frac{ab\overline{x}}{(1 + b\overline{x})^2} y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

U slučaju ekvilibrijuma $\overline{x}_1 = 0$ odgovarajuća karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - a\lambda = 0,$$

čije su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = a$. Iz tog proizilazi da je ekvilibrijum $\overline{x}_1 = 0$ lokalno asimptotski stabilan ako je $a < 1$, nehiperbolički za $a = 1$ i nestabilan, odnosno sedlasta tačka ako je $a > 1$.

Uočimo da za $a < 1$ vrijedi

$$x_{n+1} \leq a x_n,$$

odakle je

$$0 \leq x_n \leq a^n x_0,$$

što implicira $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, odnosno $\overline{x}_1 = 0$ je globalni atraktor. Zbog njegove lokalne asimptotske stabilnosti znači da je i globalno asimptotski stabilan.

Za $a = 1$ imamo da je $x_{n+1} \leq x_n$ za sve $n = 0, 1, \ldots$, to jest niz $\{x_n\}$ je monotono opadajući i ograničen je odozdo brojem 0, dakle, konvergentan je. Uzimajući da je $l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, iz (2.20) slijedi

$$l = \frac{al}{1 + bl},$$

odakle se dobije da je $l = 0$. Dakle, $\overline{x}_1 = 0$ je globalni atraktor, pa je i globalno asimptotski stabilan. Ovo je primjer gdje je nehiperbolički ekvilibrijum globalno asimptotski stabilan.

S druge strane, u slučaju ekvilibrijuma $\overline{x}_2 = \frac{a-1}{b}$ uvedimo oznake

$$p = \frac{a}{1 + b\overline{x}_2} = 1 \text{ i } q = -\frac{ab\overline{x}_2}{(1 + b\overline{x}_2)^2} = \frac{1 - a}{a}.$$

Nije teško se uvjeriti da ispitivanje stabilnosti ekvilibrijuma $\overline{x}_2$ pomoću ispitivanja modula svojstvenih vrijednosti odgovarajuće karakteristične jednadžbe može biti mnogo složeniji i dugotrajniji proces nego korištenjem Teorema 2.2.8, 3., prema kojem je ekvilibrijum $\overline{x}_2$ lokalno asimptotski stabilan ako je

$$|p| < 1 - q < 2 \Longleftrightarrow 1 < 1 + \frac{a - 1}{a} < 2 \Longleftrightarrow a > 1.$$

♣

2.2.4 Vježba

2.2.8 *Ispitati lokalnu stabilnost tačaka ekvilibrijuma jednadžbe*

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + 2x_{n+1}x_n + \frac{13}{16}x_n = 0.$$

2.2.9 *Odrediti uvjete na* α *tako da* $(\overline{x}, \overline{y}) = (0,0)$ *bude LAS pod preslikavanjem*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{\alpha x}{1+\beta y^2} \end{bmatrix}, \quad \beta > 0.$$

2.2.10 *Odrediti stabilnost svih fiksnih tačaka preslikavanja*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 - \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}.$$

2.2.11 *Odrediti stabilnost svih fiksnih tačaka preslikavanja*

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + \frac{1}{4} \\ 4x - y^2 \end{bmatrix}.$$

2.2.12 *Sistem diferentnih jednadžbi*

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta x_n y_n}{1+\beta y_n},$$

gdje je $\alpha \in (1, \infty)$ *i* $\beta \in (0, \infty)$ *i početni uvjeti* x_0, y_0 *je specijalan slučaj host-parazitoid modela. Ispitati lokalnu stabilnost svih tačaka ekvilibrijuma datog sistema. Odrediti periodična rješenja minimalnog perioda dva i ispitati njihovu lokalnu stabilnost.*

2.2.13 *Modificirani Nicholson-Baileyev model za dvije populacione vrste*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n e^{\left(c - \frac{c}{K}x_n - a y_n\right)} \\ y_{n+1} &= b x_n \left(1 - e^{-a y_n}\right), \end{aligned}$$

modelira predator-prey (lovac-žrtva) interakciju. Svi parametri a, b, c *i* K, *kao i početni uvjeti* x_0, y_0 *su pozitivni. Odrediti sve tačke ekvilibrijuma datog modela i ispitati njihovu lokalnu stabilnost.*

2.2.5 Metod Lyapunovljeve funkcije

Ovaj metod je prvobitno, od strane ruskog matematičara A.M. Lyapunova, korišten kao direktni metod za ispitivanje stabilnosti nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. U novije vrijeme se uspješno može koristiti i u slučaju diferentnih jednadžbi i sistema diferentnih jednadžbi. On se može koristiti općenito i u višedimenzionalnim sistemima, ali ćemo se ovdje zadržati na dvodimenzionalnom slučaju.

Promatrajmo diskretni dinamički sistem (2.1), odnosno (2.2).

Definicija 2.2.3 *Funkciju $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***Lyapunovljevom funkcijom*** *na podskupu $\mathcal{D}$ od $\mathbb{R}^2$ ako je*

1. V je neprekidna na $\mathcal{D}$

2. $\Delta V(X) = V(F(X)) - V(x) \leq 0$ kad su X i $F(X) \in \mathcal{D}$.

Neka $\mathcal{B}(C, \rho)$ označava otvorenu sferu u $\mathbb{R}^2$ s centrom u C i radijusa ρ, to jest

$$\mathcal{B}(C, \rho) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \|X - C\| < \rho \right\}.$$

Definicija 2.2.4 *Kažemo da je funkcija V* ***pozitivno definitna*** *u $\overline{X}$ ako je*

1. $V\left(\overline{X}\right) = 0$

2. $V(X) > 0$ za sve $X \in \mathcal{B}\left(\overline{X}, \rho\right)$, $X \neq \overline{X}$.

Navedimo sada prvi Lyapunovljev teorem stabilnosti.

Teorem 2.2.10 ***(Lyapunovljev teorem stabilnosti)*** *Pretpostavimo da je V Lyapunovljeva funkcija za DDS (2.1), odnosno (2.2) u okolini $\mathcal{O}$ tačke ekvilibrijuma $\overline{X}$ i da je V pozitivno definitna u odnosu na $\overline{X}$. Tada je $\overline{X}$ stabilan. Osim toga, vrijedi*

i) Ako je $\Delta V(X) < 0$ za sve X, $F(X) \in \mathcal{O}$ i $X \neq \overline{X}$, tada je $\overline{X}$ asimptotski stabilan.

ii) Ako je $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$ i

$$V(X) \to \infty \quad kad \ \|X\| \to \infty, \tag{2.21}$$

tada je $\overline{X}$ globalno asimptotski stabilan.

Dokaz se može vidjeti u [1].

Sljedeći teorem govori o ograničenosti rješenja DDS (2.1), odnosno (2.2).

Teorem 2.2.11 *Ako je V Lyapunovljeva funkcija na skupu $\left\{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| > \alpha\right\}$ za neko $\alpha > 0$ i ako vrijedi uvjet (2.21), tada su sva rješenja od (2.1), odnosno (2.2) ograničena.*

Definicija 2.2.5 *Neka je V Lyapunovljeva funkcija na podskupu $\mathcal{D}$ od $\mathbb{R}^2$. Definirajmo skup*

$$\mathfrak{L} = \left\{ X \in \overline{\mathcal{D}} : \Delta V(X) = 0 \right\}$$

i neka je $\mathcal{M}$ maksimalan invarijantan podskup od $\mathfrak{L}$, to jest definirajmo $\mathcal{M}$ kao uniju svih invarijantnih podskupova od $\mathfrak{L}$.

Zbog potpunosti u ispitivanju stabilnosti DDS (2.1), odnosno (2.2) neophodno je poznavati sljedeći rezultat, poznat kao *LaSalleov princip invarijantnosti* [1], [2].

Teorem 2.2.12 ***(LaSalleov princip invarijantnosti)*** *Pretpostavimo da je V pozitivno definitna Lyapunovljeva funkcija za DDS (2.1), odnosno (2.2) u $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Tada za svako ograničeno rješenje X_n od (2.1) koje ostaje u $\mathcal{D}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, postoji broj a takav da $X_n \to \mathcal{M} \cap V^{-1}(a)$ kad $n \to \infty$.*

Napomena 2.2.3 *Uočimo sljedeće: ako je $\mathcal{M} = \left\{\overline{X}\right\}$ jednočlan skup, onda nam Teorem 2.2.12 kaže da je $\overline{X}$ definitivno asimptotski stabilna fiksna tačka.*

Primjer 2.2.5 *U [6] je razmatran sljedeći sistem diferentnih jednadžbi koji modelira kooperaciju (izmedu dviju populacija ili izmedu dviju kompanija)*

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n \frac{y_n}{1+y_n} \\ y_{n+1} &= By_n \frac{x_n}{1+x_n} \end{aligned}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \; . \tag{2.22}$$

Ovaj sistem ima jedinstvenu tačku ekvilibrijuma $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ za $0 < A \le 1$, $0 < B \le 1$, koji je globalno asimptotski stabilan.
Dokazati ovu tvrdnju koristeći metod funkcije Lyapunova.

Rješenje. Naime, pokazat ćemo globalnu asimptotsku stabilnost tačke ekvilibrijuma $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ DDS (2.22) pod pretpostavkom da je $0 < A \le 1$, $0 < B \le 1$, i za sve $x_0 \ge 0$ i $y_0 \ge 0$ kako slijedi. Koristit ćemo odgovarajuću pozitivno definitnun Lyapunovljevu funkciju $V : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ oblika $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$ od preslikavanja

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} Ax\dfrac{y}{1+y} \\ By\dfrac{x}{1+x} \end{bmatrix}.$$

Tada, za $x \ge 0$, $y \ge 0$, $(x, y) \ne (0, 0)$, dobijemo

$$\begin{aligned} \Delta V = V\left(F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) - V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \left(Ax\frac{y}{1+y}\right)^2 + \left(By\frac{x}{1+x}\right)^2 - x^2 - y^2 \\ &= x^2\left(A^2\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 - 1\right) + y^2\left(B^2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 1\right) \\ &\le x^2\left(A^2 - 1\right) + y^2\left(B^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Ako je $0 < A < 1$, $0 < B < 1$, onda je $\Delta V < 0$, što implicira da je $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ asimptotski stabilane. Dalje, kako $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 \to \infty$, kad $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\| \to \infty$

, ekvilibrijum $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je globalno asimptotski stabilan, prema Teoremu 2.2.10. U drugom slučaju, kada je $0 < A \leq 1$ i $0 < B \leq 1$, koristit ćemo tzv. LaSalleov princip invarijantnosti da ispitamo asimptotsku stabilnost od E_0. Imamo sljedeća dva podslučaja za razmotranje.

(i) Pretpostavimo da je $0 < A \leq 1$, $0 < B \leq 1$, i $A + B < 2$. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $0 < A < 1$ i $B = 1$. Tada je $\Delta V = x^2 \left(A^2 - 1\right)$, što je jednako nuli ako je $x = 0$. To znači da je skup

$$\mathfrak{L} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta V \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta V \left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}$$

ustvari Oy-osa. Kako je $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ za sve $y \in \mathbb{R}_+$, maksimalni invarijantni podskup od $\mathfrak{L}$ pod preslikavanjem F je $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, koji je jednočlan skup. Iz ovog slijedi da je E_0 asimptotski stabilan.

(ii) Ako je $A = B = 1$, onda je $\Delta V = 0$ za $x = 0$ ili $y = 0$ i $\mathfrak{L}$ je unija dviju koordinatnih osa. Jasno je da je $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, što implicira da je E_0 asimptotski stabilan.

Preostaje da se dokaže globalna atraktivnost tačke ekvilibrijuma E_0 u slučajevima (i) i (ii).

Ako je $0 < A < 1$i $B = 1$, tada je

$$x_{n+1} = Ax_n \frac{y_n}{1 + y_n} \leq Ax_n \Longrightarrow x_n \leq A^n x_0, \quad n = 0, 1, ...,$$

i

$$y_{n+1} = y_n \frac{x_n}{1 + x_n} \leq y_n, \quad n = 0, 1, ...,$$

što implicira da je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ i da je niz $\{y_n\}$ monotono opadajući, pa je stoga i konvergentan. Jasno je da je $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, pošto bi u suprotnom postojao još neki drugi ekvilibrijum u prvom kvadrantu.
Analogno se izvodi dokaz i u slučaju kad je $A = 1$ i $0 < B < 1$.

Ako je $A = B = 1$, onda su nizovi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ monotono opadajući, pa su konvergentni. To znači da postoje brojevi r, $s \geq 0$ takvi da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = s.$$

Jasno je da mora biti $r = s = 0$, jer bi u suprotnom DDS (2.22) imao dvije tačke ekvilibrijuma u prvom kvadrantu. ♣

Primjer 2.2.6 *Sljedeći DDS predstavlja jedan kompetitivni model poznat kao Leslie-Gowerov model*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} \dfrac{ax_n}{1 + c_n^{(11)}x_n + c^{(12)}y_n} \\ \dfrac{by_n}{1 + c^{(21)}x_n + c_n^{(22)}y_n} \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.23}$$

Koristeći metod funkcije Lyapunova ispitati globalnu stabilnost ekvilibrijuma $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, koji je jedinstven za* $0 < a < 1$*,* $0 < b < 1$*, i pri tome je lokalno asimptotski stabilan.*

Rješenje. Uzimajući za Lyapunovljevu funkciju $V : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ oblika $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$ od preslikavanja $F = \begin{bmatrix} \dfrac{ax}{1 + c^{(11)}x + c^{(12)}y} \\ \dfrac{by}{1 + c^{(21)}x + c^{(22)}y} \end{bmatrix}$, možemo zaključiti da je tačka ekvilibrijuma E_0 globalno asimtotski stabilna za $0 < a < 1$ i $0 < b < 1$. Nime, ako je $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$ i $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V\left(F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) - V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\
&= \left(\frac{ax}{1 + c^{(11)}x + c^{(12)}y}\right)^2 + \left(\frac{by}{1 + c^{(21)}x + c^{(22)}y}\right)^2 - x^2 - y^2 \\
&= x\left(\left(\frac{a}{1 + c^{(11)}x + c^{(12)}y}\right)^2 - 1\right) + y^2\left(\left(\frac{b}{1 + c^{(21)}x + c^{(22)}y}\right)^2 - 1\right) \\
&\leq x^2\left(a^2 - 1\right) + y^2\left(b^2 - 1\right) < 0.
\end{aligned}$$

Pošto $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 \to \infty$, kad $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\| \to \infty$, to je, prema Teoremu 2.2.10, tačka ekvilibrijuma $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Sistema (2.23) globalno asimptotski stabilna. ♣

2.2.6 Vježba

2.2.14 *Promatrajmo sistem diferentnih jednadžbi*

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= y_n - y_n\left(x_n^2 + y_n^2\right) \\
y_{n+1} &= x_n - x_n\left(x_n^2 + y_n^2\right).
\end{aligned}$$

Ispitati stabilnost njegove tačke ekvilibrijuma $(0, 0)$*.*

2.2.15 *Dat je sistem*

$$x_{n+1} = f_1(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = f_2(x_n, y_n),$$

pri čemu je $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$*, a za* $X = (x, y)$ *u okolini koordinatnog početka vrijedi*

$$f_1(x, y) f_2(x, y) > xy.$$

Pokazati da je $(0,0)$ *nestabilan ekvilibrijum datog sistema.*
(Uputa: Uzeti $V = xy$*.)*

2.2.16 *Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma sistema*

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2$$
$$x_{n+1} = 2x_n y_n$$

prevodeći ga u polarni sistem ($x_n = r_n \cos\theta_n$*,* $y_n = r_n \sin\theta_n$*).*

2.2.17 *Odrediti stabilnost fiksne tačke* $(0,0)$ *preslikavanja*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2y - 2yx^2 \\ \frac{1}{2}x + xy^2 \end{bmatrix}.$$

2.2.18 *Odrediti stabilnost fiksne tačke* $(0,0)$ *preslikavanja*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{\alpha x}{1+\beta y^2} \end{bmatrix}, \quad \beta > 0.$$

2.3 Diskretni Dirichletov teorem

Koncept Lyapunovljeve funkcije može se ponekad uspješno koristiti za ispitivanje stabilnosti nehiperboličkog ekvilibrijuma primjenom tzv. diskretnog Dirichletovog teorema. U tom slučaju je neophodno poznavati neku od invarijanti promatranog DDS. U slučaju DDS (2.1), gdje je $X_n \in \mathbb{R}^2$, $F : S \to S$ neprekidno preslikavanje i $S \subset \mathbb{R}^2$, za funkciju $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je neprekidna **invarijanta** ako je $I(F(X)) = I(X)$ za svako $X \in S$.

Teorem 2.3.1 ***(Diskretni Dirichletov teorem** [3])* *PromatrajmoDDS (2.1) i pretpostavimo da je* $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *neprekidna invarijanta. Ako* I *dostiže izoliranu lokalnu minimalnu ili maksimalnu vrijednost u (fiksnoj) tački ekvilibrijuma* $\overline{X}$ *ovog sistema, onda postoji funkcija Lyapunova jednaka* $\pm\left(I(X) - I\left(\overline{X}\right)\right)$ *i takva da je ekvilibrijum* $\overline{X}$ *stabilan.*

Dokaz v. u [3].

Primjer 2.3.1 (Lyness-ova jednadžba) *Dokazati da Lynesova jednadžba ([3])*

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{x_{n-1}}, \tag{2.24}$$

gdje je $a > 0$ *parametar i* $x_1 > 0$, $x_0 > 0$ *ima invarijantu oblika:*

$$I\left(x_n, x_{n-1}\right) = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\left(a + x_n + x_{n-1}\right), \tag{2.25}$$

a zatim ispitati stabilnost pozitivne tačke ekvilibrijuma.

Rješenje. S (2.25) je zaista data invarijanta jednadžbe (2.24) jer vrijedi

$$\begin{aligned}
I\left(x_{n+1}, x_n\right) &= \left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(a + x_{n+1} + x_n\right) \\
&= \left(1 + \frac{x_{n-1}}{a + x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(a + \frac{a + x_n}{x_{n-1}} + x_n\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\frac{a + x_n + x_{n-1}}{a + x_n} \cdot \frac{\left(a + x_n\right)\left(x_{n-1} + 1\right)}{x_{n-1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\left(a + x_n + x_{n-1}\right) \\
&= I\left(x_n, x_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Prema tome, invarijanta je oblika

$$I\left(x, y\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(a + x + y\right).$$

Oba ekvilibrijuma, $\overline{x}_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$, zadovoljavaju jednadžbu $x^2 - x - a = 0$. Pozitivni ekvilibrijum $\overline{x} = \overline{x}_{+}$ je sigurno nehiperbolički, jer su zadovoljeni uvjeti

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overline{x}, \overline{x}\right) = -\frac{a + \overline{x}}{\overline{x}^2} = -1 \Longleftrightarrow \overline{x}^2 - \overline{x} - a = 0$$

i

$$P = \frac{1}{\overline{x}} \leq 2 \Longleftrightarrow 1 \leq 1 + \sqrt{1 + 4a}.$$

Potreban uvjet za egzistenciju ekstrema daje

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial x} &\equiv \left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{y + a}{x^2}\right) = 0, \\
\frac{\partial I}{\partial y} &\equiv \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{x + a}{y^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo $x = y$ i jednadžbu $x^2 - x - a = 0$. Ovo pokazuje da su kritične tačke upravo tačke ekvilibrijuma. Sada ćemo provjeriti Hessian u pozitivnoj kritičnoj tački $\overline{x} = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, koju ćemo dalje označavati sa p. Dakle,

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

gdje je

$$A = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(p,p) = 2\frac{(p+1)(p+a)}{p^4} > 0, \quad B = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}(p,p) = \frac{a-2p^2}{p^4}$$

i

$$C = A.$$

Sada je

$$\det H = AC - B^2 = \frac{(3a + 2(a+1)p)\left(a + 2(a+1)p + 4p^2\right)}{8} > 0,$$

što implicira da invarijanta I dostiže minimum u (p,p). Prema tome,

$$\min\{I(x,y) : (x,y) \in S\} = I(p,p) = \frac{(p+1)^2 (a+2p)}{p^2},$$

pa je, prema Teoremu 2.3.1,

$$V(x,y) = I(x,y) - \frac{(p+1)^2(a+2p)}{p^2},$$

što pokazuje da je $\overline{x}$ stabilna. ♣

2.3.1 Vježba

2.3.1 *Promatrajmo generaliziranu Lynesovu jednadžbu ([5], Example 4.1)*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{(cx_n + d)\, x_{n-1}},$$

gdje su a, b, c i d pozitivni parametri, a početni uvjeti $x_{-1} > 0$ i $x_0 > 0$.

a. Pokazati da ova jednadžba ima sljedeću invarijantu

$$I(x_n, x_{n-1}) = \frac{ab}{x_n x_{n-1}} + \left(a^2 + bd\right)\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) + ad\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right)$$
$$+ \left(ac + d^2\right)(x_n + x_{n-1}) + cdx_n x_{n-1}.$$

b. Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma jednadžbe.

2.3.2 *Promatrajmo jednadžbu ([5])*

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n + cx_n^2}{\left(c + dx_n + ex_n^2\right) x_{n-1}},$$

gdje su a, b, c *i* d *pozitivni parametri, a početni uvjeti* $x_{-1} > 0$ *i* $x_0 > 0$.

a. Pokazati da ova jednadžba ima sljedeću invarijantu

$$\begin{aligned} I\left(x_n, x_{n-1}\right) = {} & \frac{a}{x_n x_{n-1}} + b\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) + c\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \\ & + d\left(x_n + x_{n-1}\right) + edx_n x_{n-1}. \end{aligned}$$

b. Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma jednadžbe.

2.3.3 *Koristeći Zadatak 2.3.2, odrediti invarijante i ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma sljedećih jednadžbi:*

1. Specijalan slučaj Mayevog host-parazitoid modela

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{\left(1 + x_n\right) x_{n-1}},$$

2. Yang-Basterova jednadžba ([5])

$$x_{n+1} = \frac{\left(\omega + 2\right) x_n}{1 + \frac{x_n^2}{2}} - x_{n-1}.$$

2.3.4 *Promatrajmo jednadžbu*

$$x_{n+1} = \frac{cx_n x_{n-1} + x_n + c - c^2}{x_n\left(x_n x_{n-1} - c\right)},$$

gdje je c *pozitivni parametar, a početni uvjeti* $x_{-1} > 0$ *i* $x_0 > 0$.

a. Pokazati da ova jednadžba ima sljedeću invarijantu

$$I\left(x_n, x_{n-1}\right) = \left(1 + x_{n-1}\right)\left(1 + x_n\right)\left(1 + \frac{1}{x_n x_{n-1} - c}\right).$$

b. Ispitati stabilnost tačaka ekvilibrijuma jednadžbe.

2.3.5 *Odrediti invarijantu sistema ([5])*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{ay_n}{1 + x_n^2} \\ y_{n+1} &= \frac{bx_n}{1 + y_n^2}, \end{aligned}$$

gdje su a *i* b *parametri. Iskoristiti ovu invarijantu za pronalaženje odgovarajuće Lyapunovljeve funkcije, a zatim koristeći to ispitati stabilnost svih tačaka ekvilibrijuma sistema. (Uputa: sistem reducirati na diferentnu jednadžbu drugog reda.)*

2.3.6 *Pokazati da sljedeća diferentna jednadžba s varijabilnim koeficijentima (tzv. periodična verzija Lynessove jednadžbe [5])*

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, ..., \quad x_{-1} = c > 0,\ x_0 = d > 0,$$

gdje su $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *nenegativni periodični koeficijenti svaki perioda dva sa* $a_0 + b_0 > 0$ *i* $a_1 + b_1 > 0$*, posjeduje invarijantu oblika*

$$I(x_n, x_{n-1}) = a_{n+1} b_n x_{n-1} + a_n b_{n+1} x_n + \frac{a_{n+1}\left(a_n^2 b_{n+1} + b_n^2\right)}{x_{n-1}} + \frac{a_n\left(a_{n+1}^2 b_n + b_{n+1}^2\right)}{x_n}$$
$$+ \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} b_{n+1} + \frac{x_n}{x_{n-1}} b_n\right) a_{n+1} a_n + \frac{a_{n+1} a_n b_{n+1} b_n}{x_n x_{n-1}}.$$

Bibliografija

[1] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations, 3rd edition,* Springer, New York, 2005.

[2] S. Elaydi, *Discrete Chaos,* 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[3] M. R. S. Kulenović, Invariants and Related Liapunov Functions for Difference Equations, *Appl. Math. Letters*, 13 (7) (2000), 1-8.

[4] M.R.S. Kulenović and G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton,, London, 2001.

[5] M.R.S. Kulenović and O. Merino, *Discrete Dynamical systems and Difference Equations with Mathematica,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2002.

[6] M.R.S. Kulenović and M. Nurkanović, Global Asysmpotic Behavior of a Two-dimensional System of Difference Equations Modelling Cooperation, *JDEA*, Vol. 9 (1) (2003), 149-159.

[7] M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene*, Denfas, Tuzla, 2008.

[8] M. Nurkanović and Z. Nurkanović, *Linearne diferentne jednadžbe - Teorija i zadaci s primjenama*, PrintCom, Tuzla, 2016.

[9] T.Y. Li and J.A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), 985-992.