Prof. dr. Mehmed Nurkanović

Sistemi linearnih diferentnih jednadžbi - I

Do sada smo se bavili diferentnim jednadžbama koje su imale samo jednu nezavisnu i samo jednu zavisnu varijablu. Budući da većina životnih situacija ipak nije tako jednostavna, sada ćemo se posvetiti proučavanju sistema diferentnih jednadžbi sa više od jedne zavisne varijable. Pri tome ćemo se ograničiti na sisteme diferentnih jednadžbi prvog reda. Ovakvim sistemima se često izražavaju neki diskretni modeli iz prakse, kao što su modeli u matematičkoj biologiji (proučavanje kompeticije između pojedinih vrsta u populacionim dinamikama), modeli u fizici (proučavanje kretanja tijela u interakciji) i tome slično. Ovi se sistemi jako puno primjenjuju i u proučavanju sistema upravljanja, neurologiji, elektrotehnici itd. U ovom poglavlju biće pokazano i kako se svaka linearna diferentna jednadžba višeg reda može transformirati u sistem diferentnih jednadžbi prvog reda (analogno istoj situaciji u teoriji diferencijalnih jednadžbi), kao i obrnuto

Autonomni sistemi diferentnih jednadžbi

Homogeni autonomni (vremenski invarijantni) sistem k linearnih diferentnih jednadžbi prvog reda ima oblik

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1}^{(1)} = a_{11}x_n^{(1)} + a_{12}x_n^{(2)} + \ldots + a_{1k}x_n^{(k)} \\ x_{n+1}^{(2)} = a_{21}x_n^{(1)} + a_{22}x_n^{(2)} + \ldots + a_{2k}x_n^{(k)} \\ \quad\vdots \\ x_{n+1}^{(k)} = a_{k1}x_n^{(1)} + a_{k2}x_n^{(2)} + \ldots + a_{kk}x_n^{(k)} \end{array} \qquad (n = 0, 1, ...)\right\}. \tag{1}$$

Riječ je o tzv. homogenom sistemu diferentnih jednadžbi. (

Sistem (1) može se napisati u matričnom obliku

$$X_{n+1} = AX_n, \quad (n = 0, 1, ...) \tag{2}$$

gdje je $X_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^k$, i $A = (a_{ij})$ je $k \times k$ realna nesingularna matrica. Sistem (1) se smatra *autonomnim* ili *vremenski invarijantnim*, pošto su svi elementi matrice A konstante.

Rješenje sistema (1) je svaki niz vektora $X_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^k$ koji zadovoljava taj sistem.

Ako za neko $n_0 \geqslant 0$ specificiramo da je $X_{n_0} = \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)^T$, tada se sistem (1) zove *problemom početnih vrijednosti* (skr. PPV). Štaviše, jednostavnim iteriranjem (ili pak direktnom zamjenom u jednadžbu), može se pokazati da je rješenje takvog PPV dato sa

$$X_n = A^{n-n_0}\boldsymbol{\alpha}, \tag{3}$$

gdje je $A^0 = I$, $k \times k$ jedinična matrica. Mi ćemo uglavnom koristiti da je $n_0 = 0$. U tom slučaju imamo da je rješenje promatranog PPV dato sa

$$X_n = A^n X_0 = A^n \boldsymbol{\alpha}. \tag{4}$$

Iz jednakosti (4) vidimo da je jedini problem da se dođe do rješenja sitema diferentnih jednadžbi (1) ustvari izračunavanje n-tog stepena matrice A. Iz linearne algebre je poznato da se taj problem može riješiti na različite načine (s manje ili više napora). Mi ćemo sada demonstrirati tri takva načina: neposrednom primjenom Hamilton-Cayleyjevog teorema, tzv. diskretni analogon Putzerovog algoritma i primjenom binomnog obrasca za matrice.

Neka je, dakle, A kvadratna matrica k-tog reda. Poznato je da jednadžba

$$AX = \lambda X, \tag{5}$$

gdje je λ parametar, uvijek ima trivijalno rješenje $X = \mathbf{0}$. Ako jednadžba (5) ima i netrivijalno rješenje X za neko λ, tada se to λ naziva *svojstvenom (karakterističnom) vrijednošću* matrice A, a X se naziva odgovarajućim *svojstvenim (karakterističnim) vektorom*. Svojstvene vrijednosti matrice A zadovoljavaju tzv. karakterističnu jednadžbu

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{6}$$

Polinom

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda) &= \det(A-\lambda I) \\ &= (-1)^k \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + ... + p_{k-1}\lambda + p_k\end{aligned}$$

nazivamo *svojstvenim* ili *karakterističnim polinomom* matrica A.

Teorem 1 ***(Hamilton-Cayleyjev teorem)*** *Svaka kvadratna matrica A zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu, to jest*

$$\kappa(A) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

gdje je $\mathbf{0}$ *nula-matrica.*

Hamilton-Cayleyjev teorem pokazuje da se matrica A^k može prikazati kao linearna kombinacija matrica $I, A, A^2, ..., A^{k-1}$. Međutim, uočimo da jednadžba (7) može poslužiti za izračunavanje bilo kojeg stepena n matrice A. Naime, iz (7), odnosno

$$(-1)^k A^k + p_1 A^{k-1} + ... + p_{k-1}A + p_k I = \mathbf{0},$$

slijedi

$$(-1)^k A^{n+k} + p_1 A^{n+k-1} + ... + p_{k-1}A^{n+1} + p_k A^n = \mathbf{0},$$

što je linearna diferentna jednadžba k-tog reda s konstantnim koeficijentima, koju znamo riješiti. Jedino treba voditi računa da su konstante, koje se dobiju pri formiranju općeg rješenja te jednadžbe, ustvari konstantne matrice, koje se određuju korištenjem početnih uvjeta, to jest prvih k stepena matrice A. Ilustrirajmo to sljedećim primjerom.

Primjer 2 *Odrediti A^n $(n \in \mathbb{N})$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Odredimo prvo karakteristični polinom matrice A.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)^2 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.\end{aligned}$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 3$. Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu imamo

$$A^{n+3} - 7A^{n+2} + 15A^{n+1} - 9A = \mathbf{0}.$$

Posljednja jednadžba je homogena linearna diferentna jednadžba trećeg reda s konstantnim koeficijentima, čije je opće rješenje, kao što znamo, dato sa

$$A^n = C_1 \cdot 1^n + (C_2 + nC_3) \cdot 3^n,$$

gdje su C_1, C_2, C_3 konstantne matrice. Odredimo te matrice. Naime, iz

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &\Rightarrow \quad A^0 = C_1 + C_2, \\ n = 1 \quad &\Rightarrow \quad A^1 = C_1 + (C_2 + C_3) \cdot 3, \\ n = 2 \quad &\Rightarrow \quad A^2 = C_1 + (C_2 + 2C_3) \cdot 3^2,\end{aligned}$$

slijedi

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^n - 2n\cdot 3^{n-1} & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3^{n+1} - n\cdot 3^{n-1} & -n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 4n\cdot 3^{n-1} & 2 - 2\cdot 3^n & 3^n + 2n\cdot 3^{n-1} \end{bmatrix}. \quad \clubsuit$$

Vidimo da je, kada je kvadratna matrica A reda k, potrebno izračunati k konstantnih matrica, što u slučaju većeg broja k može da predstavlja poteškoću zbog glomaznosti računanja. Zbog toga ćemo navesti još jedan metod za računanje matrice A^n $(n \in \mathbb{N})$, koji se također zasniva na Hamilton-Cayleyjevom teoremu. Riječ je o tzv. *diskretnom analogonu Putzerovog algoritma*. Ideja dolazi iz teorije diferencijalnih jednadžbi pri rješavanju Cauchyjevog problema

$$X' = AX, \qquad X(t_0) = X_0,$$

gdje je $A = (a_{ij})$ matrica reda $k \times k$, a $X \in \mathbb{R}^k$. Rješenje je određeno sa

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0,$$

pri čemu se za računanje matrice e^{At} koristi Putzerov algoritam.

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ svojstvene vrijednosti kvadratne matrice A, pri čemu se svaka svojstvena vrijednost pojavljuje onoliko puta kolika je njena višestru-kost. Definirajmo

$$M_0 = I, \tag{8}$$
$$M_j = (A - \lambda_j I) M_{j-1}, \qquad (j = 1, 2, ..., k). \tag{9}$$

Očito je, primjenom Hamilton-Cayleyjevog teorema,

$$M_k = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I) = \kappa(A) = \mathbf{0}.$$

Prema tome, $M_n = \mathbf{0}$ za sve $n \geq k$.

Iz prethodnog zaključujemo da se bilo koji stepen A^n matrice A može predstaviti kao linearna kombinacija od $M_0, M_1, ..., M_j$ za $j = 1, 2, ..., k-1$. Dakle,

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} c_j(n) M_{j-1}, \qquad n = 0, 1, ... \;. \tag{10}$$

Uočimo jednu važnu činjenicu koja slijedi iz (10). Naime, za $n = 0$, dobija se

$$A^0 = I = c_1(0) I + c_2(0) M_1 + ... + c_k(0) M_{k-1},$$

odakle, na osnovu definicije jednakosti dviju matrica, slijedi

$$c_1(0) = 1, c_2(0) = c_3(0) = ... = c_k(0) = 0. \tag{11}$$

Kako je $A^{n+1} = A^n A$, na osnovu (10), imamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} c_j(n+1) M_{j-1} &= A^{n+1} = AA^n = A\left[\sum_{j=1}^{k} c_j(n) M_{j-1}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} c_j(n) AM_{j-1}. \end{aligned}$$

Zamjenom AM_{j-1} iz (9) slijedi

$$\sum_{j=1}^{k} c_j(n+1) M_{j-1} = \sum_{j=1}^{k} c_j(n) \left[M_j + \lambda_j M_{j-1}\right]. \tag{12}$$

Upoređivanjem koeficijenata lijeve i desne strane u (12), vodeći računa o (11), dobija se

$$\begin{aligned} c_1(n+1) &= \lambda_1 c_1(n), \qquad & c_1(0) = 1, \\ c_j(n+1) &= \lambda_j c_j(n) + c_{j-1}(n), \quad & c_j(0) = 0, \quad j = 2,3,...,k. \end{aligned} \tag{13}$$

Rješavanjem diferentnih jednadžbi (13) (koje su linearne prvog reda), imamo-

$$c_1(n) = \lambda_1^n, \qquad c_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} c_{j-1}(i), \qquad j = 2,3,...,k. \tag{14}$$

Jednakosti (9), (10), i (14) zajedno čine algoritam za izračunavanje matrice A^n, kojeg ćemo ubuduće kratko zvati Putzerovim algoritmom.

Primjer 3 *Putzerovim algoritmom izračunati A^n $(n \in \mathbb{N})$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Kako je $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 3$, prema (9), imamo

$$\begin{aligned} M_1 &= A - \lambda_1 I = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \\ M_2 &= (A - \lambda_2 I) M_1 = (A - 3I)(A - I) = A^2 - 4A + 3I \\ &= \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz (14) slijedi

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \lambda_1^n = 1, \\ c_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_2^{n-1-i} c_{2-1}(i) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} c_1(i) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} \\ &= \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}, \\ c_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_3^{n-1-i} c_{3-1}(i) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} c_2(i) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} \left(\frac{3^i - 1}{2} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^n - 1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} \\ &= \frac{n}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Na osnovu toga, prema (10), imamo

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{j=1}^{3} c_j(n) M_{j-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3^n - 2n \cdot 3^{n-1} & -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - n \cdot 3^{n-1} & -n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 4n \cdot 3^{n-1} & 2 - 2 \cdot 3^n & 3^n + 2n \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Demonstrirajmo sada izračunavanje n-tog stepena matrice A u slučaju kada ta matrica ima imaginarne svojstvene vrijednosti.

Primjer 4 *Ako je*

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix},$$

izračunati A^n $(n\in\mathbb{N})$

a) Putzerovim algoritmom,

b) neposrednom primjenom Hamilton-Cayleyjevog teorema.

Rješenje. a) Matrica A ima svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2}=1\pm i$. Zbog toga je

$$\begin{aligned} M_0 &= I, \\ M_1 &= A-\lambda_1 I = A-(1+i)\,I=\begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ -5 & -2-i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \lambda_1^n=(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right), \\ c_2(n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_2^{n-1-k}c_1(k)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-i)^{n-1-k}(1+i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{n-1-k}}{(1+i)^{n-1-k}}(1+i)^k=\frac{2^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+i)^{2k}}{2^k} \\ &= \frac{2^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}i^k=\frac{2^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\cdot\frac{i^n-1}{i-1} \\ &= (1-i^n)(1-i)^{n-2}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} 1-i^n &= 1-\cos\tfrac{n\pi}{2}-i\sin\tfrac{n\pi}{2}=2\sin\tfrac{n\pi}{4}\left(\sin\tfrac{n\pi}{4}-i\cos\tfrac{n\pi}{4}\right), \\ (1-i)^{n-2} &= 2^{\frac{n-2}{2}}\left(\cos\tfrac{(n-2)\pi}{4}+i\sin\tfrac{(n-2)\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{n-2}{2}}\left(\sin\tfrac{n\pi}{4}+i\cos\tfrac{n\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

vrijedi

$$c_2(n)=(1-i^n)(1-i)^{n-2}=2^{\frac{n}{2}}\sin\tfrac{n\pi}{4}.$$

Konačno dobijamo

$$\begin{aligned} A^n &= c_1(n)\,I+c_2(n)\,M_1 \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix} \cos\frac{n\pi}{4}+2\sin\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -5\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4}-2\sin\frac{n\pi}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu imamo

$$A^2-2A+2I=\mathbf{0},$$

odnosno

$$A^{n+2}-2A^{n+1}+2A^n=\mathbf{0},$$

odakle je

$$A^n=2^{\frac{n}{2}}\left[C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right],$$

gdje su C_1 i C_2 konstantne matrice koje treba odrediti koristeći početne uvjete. Dakle,

$$\begin{aligned} n=0 \Rightarrow\quad & A^0=C_1\Rightarrow C_1=I, \\ n=1 \Rightarrow\quad & A=2^{\frac{1}{2}}\left[C_1\tfrac{\sqrt{2}}{2}+C_2\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\Rightarrow C_2=A-I=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa se dobije

$$A^n = 2^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} + 2\sin\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -5\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} - 2\sin\frac{n\pi}{4} \end{bmatrix}. \quad \clubsuit$$

Korisno je, ponekad, znati i sljedeći način izračunavanja n-tog stepena matrice A, koji se zasniva na upotrebi binomnog obrasca za matrice.

Teorem 5 *Ako matrice A i B komutiraju, to jest ako je $AB = BA$, tada vrijedi*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Ideja je da se matrica A napiše u obliku zbira $A = \alpha I + B$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), gdje je B relativno jednostavna matrica u smislu da je $B^k = \mathbf{0}$, za neki ne veliki broj k. Kako matrice I i B komutiraju, može se primijeniti prethodni teorem.

Primjer 6 *Riješiti sljedeći sistem diferentnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= 2x_n^{(1)} + x_n^{(2)}, \qquad x_0^{(1)} = 1, \\ x_{n+1}^{(2)} &= 2x_n^{(2)} + x_n^{(3)}, \qquad x_0^{(2)} = 0, \\ x_{n+1}^{(3)} &= 2x_n^{(3)}, \qquad x_0^{(3)} = -1. \end{aligned}$$

Rješenje. Dati sistem se može napisati u matričnom obliku

$$X_{n+1} = AX_n, \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

gdje je

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ x_n^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prema jednakosti (4), imamo

$$X_n = A^n X_0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

te je dovoljno naći matricu A^n. Ovdje se uspješno može primijeniti metod zasnovan na binomnom obrascu za matrice. Naime, $A = 2I + B$, gdje je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^3 = B^4 = ... = \mathbf{0}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} A^n &= (2I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I + n2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$X_n = A^n X_0 = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ x_n^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-3}\left(8-n^2+n\right) \\ -n2^{n-1} \\ -2^n \end{bmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \quad . \qquad \clubsuit$$

Zadaci za vježbu:
4.2.7-4.2.10, 4.2.12-4.2.14
i
4.3.4-4.3.17